Lezione 4
Dinamica: Lavoro ed Energia

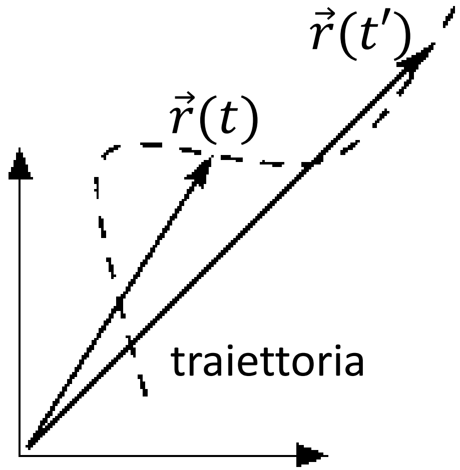
Versione: 1.02 – 25.07.22

Introduzione: metodo delle forze

Cinematica: abbiamo imparato che la **legge oraria,**

$$\boldsymbol{\vec{r}(t)} \qquad \text{“posizione spaziale al tempo } t\text{”}$$

fornisce una descrizione completa del moto di un corpo.



Dinamica (metodo delle forze): per ricavare $\vec{r}(t)$, a meno di non “filmare” (misurare la posizione) per un tempo t arbitrario, possiamo utilizzare l’**equazione del moto di Newton**,

$$\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}},$$

intesa come **equazione differenziale** (la cui incognita non è una *variabile*, come t, ma una *funzione*, come $\vec{r}(t)$). Risolvendola troviamo l’espressione della posizione in funzione del tempo (date opportune condizioni iniziali: $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$).

Introduzione (II): metodo delle forze

La procedura appena descritta prende il nome di **Metodo delle Forze**.
L'abbiamo vista all'opera nel caso (molto semplice) in cui la **risultante delle forze** in gioco era **costante**, per cui $\vec{a} = cost.$ e la conseguente legge oraria era quelle di un **moto uniformemente accelerato**.

Osservazioni

- Spesso, per forze con dipendenze funzionali più complicate rispetto alle variabili cinematiche, non è facile risolvere le relative eq. differenziali del moto;
- In molti casi non interessa la legge oraria del moto, $\vec{r}(t)$, ma solo sapere il valore di alcune grandezze (come $\vec{v}$) in alcuni punti della traiettoria; non ci interessa il ''quando'' ma il ''come'' un corpo percorrerà un certo tratto. Come vedremo, esistono alcune quantità conservate;
- Per molte forze è **nota la dipendenza dalla posizione** (si pensi alla forza d'attrazione Terra-Luna) ma non la dipendenza dal tempo senza conoscere la legge oraria (dove sarà la Luna domani?).

Introduzione (III): un cambio di variabili…

Sfruttiamo le osservazioni precedenti per fare un "esercizio di matematica":

studiamo gli effetti di una **forza costante** sulla variazione del moto di un corpo, non legando lo spostamento $(\vec{r}-\vec{r}_0)$ al tempo t ma alla variazione di velocità $(\vec{v}-\vec{v}_0)$:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t - \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t) = \vec{a}\,t + \vec{v}_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t \\ \vec{a}t = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{a}\cdot(\vec{r}(t)-\vec{r}_0) = \frac{1}{2}\vec{a}t\cdot\vec{a}t \\ \cdots \qquad + \vec{v}_0\cdot\vec{a}t \end{cases}$$

(legge oraria e della velocità) (metto in evidenza $\Delta\vec{r}$ e $\Delta\vec{v}$) (moltiplico *scalarmente* - il risultato è uno scalare - entrambe le eq. vettoriali per $\vec{a}$)

Sostituisco la seconda eq. nella prima e ottengo (ometto la dipendenza implicita da t):

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\Delta\vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{v}_0)^2 + \vec{v}_0\cdot(\vec{v}-\vec{v}_0) \\ &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2 \end{aligned}$$

Teorema dell'energia cinetica (o delle Forze vive) per $\vec{F} = cost.$

Moltiplichiamo quindi l'ultima eq. per la massa m del corpo soggetto ad un forza risultante $\vec{F}$ per ottenere (dall'eq. del moto $\vec{F} = m\vec{a}$):

$$m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = \boxed{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{m}{\boldsymbol{v}_0}^2}.$$

Il risultato trovato è molto importante, prende il nome di **Teorema dell'energia cinetica (per $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{cost.}$)** o **Teorema delle Forze vive**.

Analizziamola:

- $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\vec{\boldsymbol{r}}$: prende il nome di **Lavoro**, $\boldsymbol{L}$, si misura in **Joule = Newton·metri**, e descrive la combinazione di forza e spostamento <u>da essa prodotto</u>;
- Il prodotto scalare indica <u>che **solo componenti parallele** allo spostamento contribuiscono</u>: possiamo riscriverla: $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{\parallel}\Delta\boldsymbol{r}$.
Es.: le forze $\perp$ ai vincoli (come le reazioni vincolari) non compiono lavoro.

Teorema dell'energia cinetica per $\vec{F} =$ *cost.*: osservazioni

$$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2}.$$

- I due termini a destra prendono il nome di **energia cinetica** del corpo,

$$\boxed{K \text{ oppure } E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

e rappresentano cinematicamente lo stato iniziale e finale del corpo. Come il Lavoro, anche l'energia cinetica si misura in Joule. <u>Notare dipendenza da v^2</u>;

- La **variazione dell'energia cinetica, ΔK**, è uguale al **lavoro** fatto dalla forza $\vec{F}$ nello spostare il corpo di un tratto $\Delta\vec{r}$:

$$\boxed{L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_{\parallel}\Delta r = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \Delta K}.$$

Forze conservative

$$\boxed{\boldsymbol{L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \Delta K}}$$

- Il lavoro fatto da una $\vec{\boldsymbol{F}}$ costante **non dipende dal percorso** seguito dal corpo ma solo da $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$, cioè da posizione iniziale e finale.
  Esempio: il lavoro fatto su un percorso chiuso ($\Delta\vec{r} = 0$, in cui "parto e torno" allo stesso punto) è zero;
- Questa è una proprietà comune ad un gran numero di forze. Tali forze vengono dette **forze conservative**;
- Dipendendo L solo da posizione iniziale, $\vec{r}_0$, e finale, $\vec{r}$, posso riscrivere questo per mezzo di una **funzione della posizione:**

$$\boxed{\boldsymbol{L(\text{da } \vec{r}_0 \text{ a } \vec{r}) = U_0 - U(\vec{r}) = -\Delta U}}$$

Energia potenziale

$$\boxed{\boldsymbol{L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta U \quad = \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \Delta K}}$$

- Questa *funzione della posizione* prende il nome di **energia potenziale.**

Notare la convenzione di segni con la quale è stata definita ed il fatto che sia ‘‘ben definita’’ la sua variazione (ma non il suo valore generale);

- Nel caso della **forza peso,** $\boldsymbol{\vec{P} = m\vec{g}}$, ΔU è uguale a:

$$\boldsymbol{\Delta U} = U - U_0 = mgh - mgh_0 = \boldsymbol{mg\Delta h}$$

dove $\boldsymbol{h}$, **l’altezza**, è la componente di $\vec{r}$ (anti)parallela alla forza di gravità.

$\boldsymbol{U = mgh}$ prende il nome di **energia potenziale gravitazionale**.

Conservazione dell'Energia Meccanica

Per un corpo soggetto a sole forze conservative, possiamo definire un'**energia potenziale** per ognuna di loro, ed esprimere il loro **lavoro** sul corpo per mezzo della variazione di queste.

Portando tutto ad uno stesso membro:

$$\boldsymbol{L = -\Delta U = \Delta K} \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\Delta K + \Delta U = 0}}$$

o alternativamente definire la funzione **Energia Meccanica** come:

$$\boxed{\boldsymbol{E = K + U}}, \qquad \Delta E = 0, \qquad E = E_0.$$

L'ultima relazione ci dice che:
''in presenza di **sole forze conservative**, l'**Energia Meccanica** di un corpo è una **quantità conservata**'', il suo valore cioè non cambia durante la traiettoria.

Esempio di conservazione dell'energia meccanica

Esempio: nel caso della caduta di un grave, soggetto alla sola forza gravitazionale $\vec{P} = m\vec{g}$, ho i seguenti valori dell'energie:

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \qquad U = mgh,$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.}$$

Se un corpo lanciato in aria aumenta la sua altezza, $\Delta h > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta U > 0}$, e di conseguenza diminuirà la sua energia cinetica, $\boldsymbol{\Delta K < 0}$, e quindi la sua velocità fino a fermarsi e ridiscendere, come noto.

Conservazione dell'energia meccanica ed eq. del moto forniscono lo stesso risultato con un approccio diverso (va preferito il più facile!).

Lavoro ed energia potenziale per forze non costanti: forze armoniche

In caso di **forze non costanti** il calcolo del lavoro può non essere semplice (non disponendo di elementi di calcolo differenziale).
L'unico esempio che siamo in grado di affrontare è quello di:

Forze armoniche: in uno **spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$** rispetto alla posizione di equilibrio $\vec{r}_0$ ($\vec{F}(\vec{r}_0) = 0$) la **forza armonica $\vec{F} = -k\Delta\vec{r}$** non rimane costante ma varia. Non posso esprimere quindi il lavoro come $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, utilizzando una forza qualsiasi, ma posso usare la sua media durante lo spostamento:

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{F}(\vec{r}_0)+\vec{F}(\vec{r})}{2} = -\frac{1}{2}k\Delta\vec{r},$$

$$L = \vec{F}_m \cdot \Delta\vec{r} = -\frac{1}{2}k\Delta\vec{r} \cdot \Delta\vec{r} = -\frac{1}{2}k\Delta r^2,$$

$$-L = \boxed{\Delta U_e(\vec{r}) = \frac{1}{2}k\Delta r^2}.$$

Forze esterne e Forze non-conservative

Supponiamo di avere un corpo soggetto ad una forza risultante $\vec{F}$ composta da una **parte conservativa**, $\vec{F}_c$, per la quale posso esprimere il lavoro tramite un'**energia potenziale**, una **parte non-conservativa**, $\vec{F}_{\mathrm{NC}}$, per esempio dovuta alle forze d'attrito o alle forze ritardanti, ed una **componente esterna**, $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$, come una mano che muove l'oggetto:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{\mathrm{NC}} + \vec{F}_{\mathrm{ext}},$$

per le quali posso definire il lavoro totale:

$$L = Lc + L_{\mathrm{NC}} + L_{\mathrm{ext}} = -\Delta U + L_{\mathrm{NC}} + L_{\mathrm{ext}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta E = \Delta K + \Delta U = L_{\mathrm{NC}} + L_{\mathrm{ext}}}}$$

Importante!!

Questa è l'**eq. delle Forze vive** in cui sono stati esplicitati i contributi dei vari tipi di forze.

Potenza di una forza

Per una forza risultante qualsiasi, sia costante che non, possiamo introdurre un'altra utile quantità:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{K}}{\Delta \boldsymbol{t}}}.$$

Questa prende il nome di **potenza della forza**, indica la ''rapidità con cui viene svolto un lavoro'' e descrive la **variazione di energia cinetica nell'unità di tempo** (altro enunciato del **Teo. Delle Forze Vive** o **dell'Energia Cinetica**).

Si misura in:

$$\text{Joule/secondi} = \text{Newton·metri/secondi} = m^2 \cdot kg/s^3 = \textbf{Watt}.$$

Esercizio: una macchina di una tonnellata passa da ferma ad una velocità di 100 km/h in 10 sec. Calcolare la potenza richiesta al motore. **[Attenzione alle unità di misura!!]**

Altre leggi di conservazione

Abbiamo visto che, in **assenza di forze esterne e di forze non-conservative**, l'energia meccanica si conserva durante il moto di un corpo.

Dall'equazione del moto sappiamo che, per un corpo soggetto ad una forza risultante $\vec{F}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{q}}{\Delta t},$$

dove $\Delta\vec{q}$ è la variazione della quantità di moto del corpo.

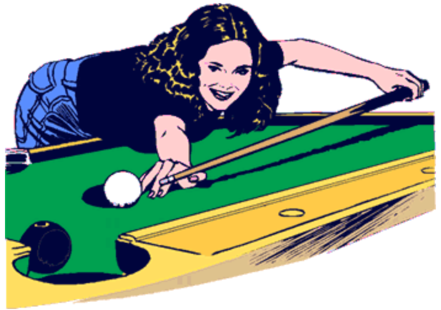
- Se la risultante delle forze è nulla, $\vec{F} = 0$, la **quantità di moto** è una **grandezza (vettoriale!!) conservata**: $\vec{q} = m\vec{v} = \vec{q}_0 = m\vec{v}_0$;
- Se al contrario ho una forza risultante $\vec{F}$, supposta costante, posso descrivere il suo effetto per mezzo della **variazione della quantità di moto**:

$$\boxed{\Delta\vec{q} = \vec{F}\,\Delta t = \textbf{impulso della forza}} = \text{Newton·sec}$$

Applicazione delle leggi di conservazione nell'interazione tra corpi: Urti

Gli **urti** (**interazioni** di "**breve durata**" tra corpi, con *variazioni apprezzabili* delle loro proprietà cinematiche, ma anche del loro **numero**, **massa**, etc.) sono uno degli esempi più importanti di applicazione delle leggi di conservazione appena viste.

L'interazione può essere descritta da **forze di contatto**, come nel caso di **due palle da biliardo che si scontrano**,
oppure da **forze a distanza**, come nel **passaggio ravvicinato di un satellite vicino ad un pianeta** (gravity assist), ed in generale l'espressione matematica di queste può essere molto complicata.



Sfruttando però le **leggi di conservazione**, possiamo ricavare informazioni sulle proprietà cinematiche (velocità, traiettoria) dei due corpi interagenti prima e dopo l'urto.

Assumiamo infatti che l'interazione avvenga per un tempo limitato e che i (due o più) corpi siano "**liberi**" **prima e dopo l'urto**.

Urti (II): caso elastico

Consideriamo un **sistema di due corpi** (palle da biliardo, satelliti…), di masse m_1 ed m_2, con **velocità iniziali** (prima dell'urto) $\vec{v}_{1i}$ e $\vec{v}_{2i}$, che interagiscono ''in qualche modo''.

Esaminiamo cosa ci dicono le leggi di conservazione sullo stato finale (dopo l'urto):

Urto elastico: si definisce quello in cui **l'energia totale del sistema si conserva**.

L'esempio più semplice è quello in cui le **masse** delle particelle **rimangono le stesse**:

$$E_{\text{tot } i} = E_{1i} + E_{2i} = E_{1i} + E_{2i} = E_{\text{tot } f}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2}$$

Inoltre, dal **Teorema dell'impulso:** $\Delta \vec{q}_1 = \vec{F}_{2\to 1} \Delta t,$ $\Delta \vec{q}_2 = \vec{F}_{1\to 2} \Delta t,$

ma per il **terzo principio:** $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$ e quindi $\Delta \vec{q}_1 = \vec{F}_{2\to 1} \Delta t = -\vec{F}_{1\to 2} \Delta t = -\Delta \vec{q}_2,$

$$\Delta \vec{q}_1 = m_1 (\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) = -m_2 (\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) = -\Delta \vec{q}_2$$

Quindi: $$\boldsymbol{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}}$$

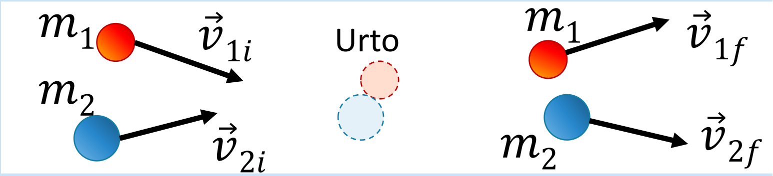
Urti (III): caso anelastico

Urto anelastico: si definisce quello in cui **l'energia totale del sistema NON si conserva**. L'esempio più semplice è quello in cui **i (due) corpi si "fondono" in uno** di massa $\boldsymbol{M = m_1 + m_2}$. Per tenerlo insieme serve una certa **energia di legame**:

$$\boldsymbol{BE} = -\Delta \boldsymbol{E} = E_i - E_f = \boldsymbol{\frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 - \frac{1}{2} M V^2}$$

Come prima invece si **conserva la quantità di moto:**

$$\boldsymbol{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{V}}.$$

	Quantità di moto (conservata)	Energia	Schema
Elastico	$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$	Conservata: $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}{}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}{}^2$	
Anelastico	$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{V}$	Non conservata: $BE = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 - \frac{1}{2} M V^2$