Lezione 3
Dinamica: Leggi delle Forze

Versione: 1.03 – 10.11.16

Effetti delle forze Forze

Nei **Tre Principi della Dinamica** vengono descritti gli **effetti delle forze**, come queste agiscono e quali siano le conseguenze sul moto dei corpi:

*"le forze sono le **cause** (**delle variazioni**) del **moto**; tramite le **equazioni del moto** possiamo risalire a **come un corpo varia il suo movimento**."*

Attenzione: Questa **NON è una definizione di cosa sia una forza** ma solamente di **quali siano i suoi effetti**.

Il **Secondo Principio**, $\vec{F} = m\vec{a}$, fornisce la definizione di **massa inerziale**; non può essere utilizzato anche come definizione di **Forza** (*al contrario di come spesso si legge*) altrimenti i concetti di **massa inerziale** e di **forza** rimarrebbero reciprocamente indeterminati.

Sul concetto di Forza

Qual è allora la definizione di Forza?

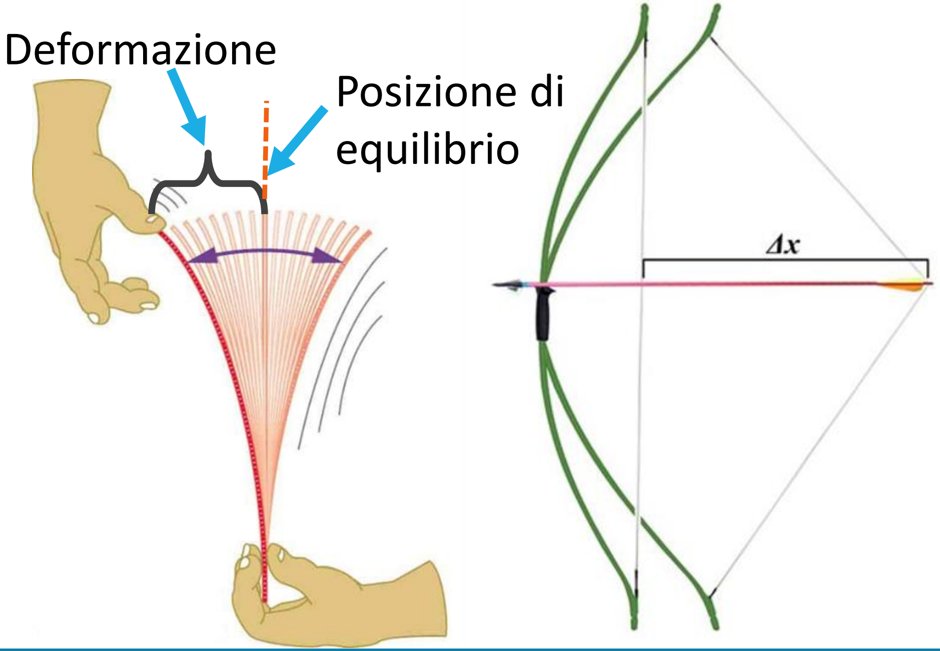
- Le **Forze sono** la **descrizione** da un punto di vista **matematico** (sono funzioni a valori vettoriali) che Newton (e la Meccanica Newtoniana) fa delle **interazioni tra corpi**.
  In un certo senso, le **interazioni** sono ''la causa'' delle **Forze**.

- La loro espressione rappresenta un **modello** (o **legge empirica**, sperimentale) per la data **interazione**.

Leggi (empiriche) delle Forze

Applicando il **Metodo Scientifico**, tramite esperimenti ed osservazioni, è stato possibile risalire alla **forma** (**Legge**) delle varie **Forze/interazioni** esistenti in **Natura**.

Esempio: nel 1600, lo scienziato britannico **Robert Hooke** studiò il comportamento di vari ''*materiali elastici*''. Notò che questi, **se deformati** per uno **spostamento** $\Delta\vec{x}$ dalla loro ''configurazione di **equilibrio**'', una volta lasciati liberi **accelaravano in quantità proporzionale a** $\Delta\vec{x}$ per tornare come prima.



Leggi delle Forze, classificazione matematica

L'espressione matematica di una Forza descrive un certo tipo di interazione. Questa espressione può dipendere dalle varie **variabili cinematiche** $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a})$ che caratterizzano il moto di un corpo, più altri **coefficienti** (costanti caratteristiche, $\mu, k_G, k_e, \ldots$) che mi descrivono **l'intensità e le "scale caratteristiche" dell'interazione**:

$$\overrightarrow{Forza} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \ldots, \mu, k_G, k_e, \ldots)$$

Possiamo classificare le forze in base alla loro dipendenza dalla variabili cinematiche; **forze diverse** (per le **costanti caratteristiche**) ma con la stessa dipendenza funzionale dalle variabili cinematiche, daranno origine, dal punto di vista funzionale, alle **stesse leggi orarie**.

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze costanti

Le **Forze costanti** (le più frequenti che incontreremo) sono descritte da **vettori costanti**, cioè **indipendenti dalle variabili cinematiche** (ma dipendenti dalle **costanti caratteristiche** del **tipo di interazione**):

$$\vec{F} = cost.$$

Queste implicano (se $\boldsymbol{m}$ **è costante**) l'**equazione del moto**:

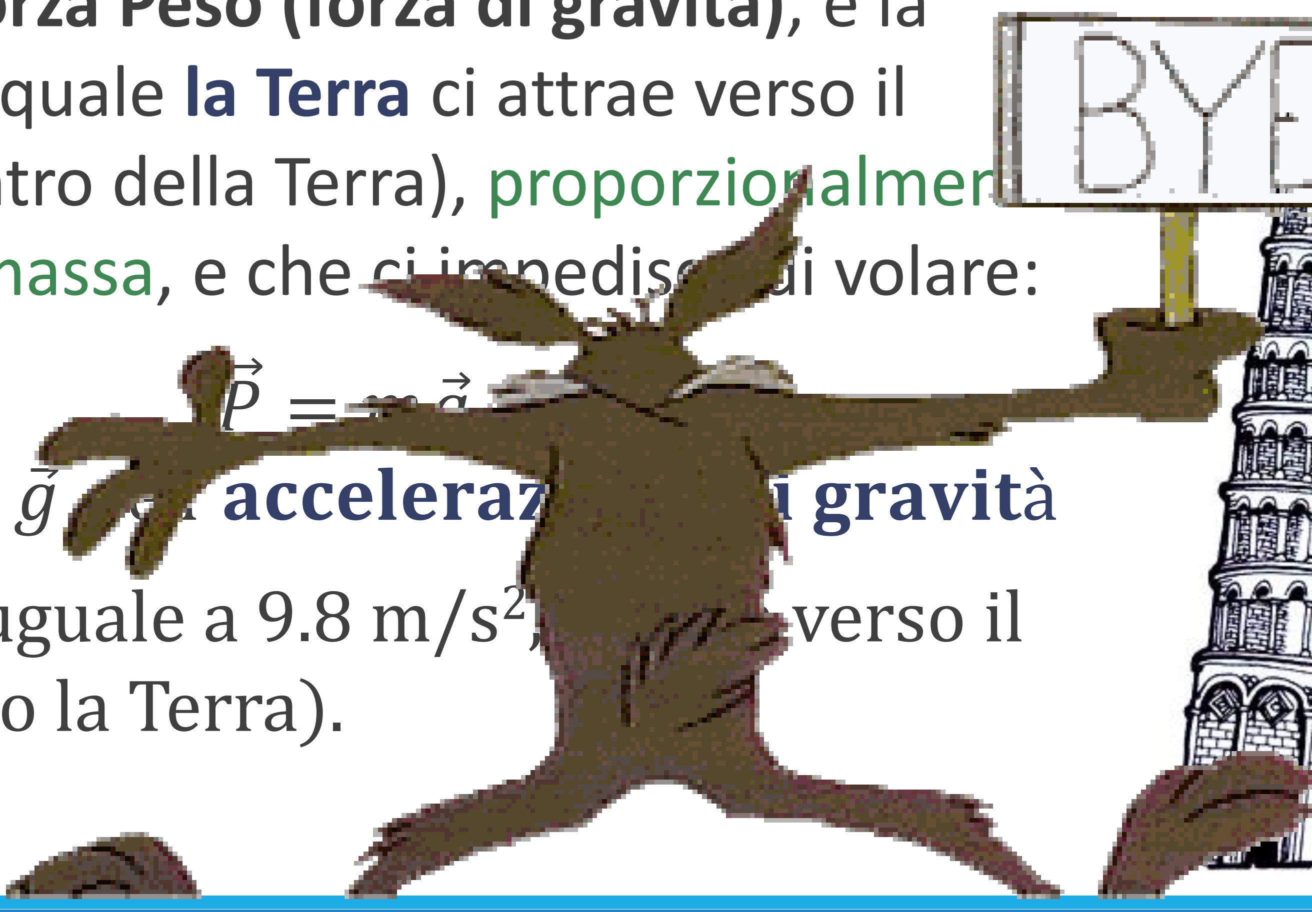
$$\vec{F} = m\vec{a} = cost.$$

dove anche $\vec{a}$ è costante e quindi ho un moto uniformemente accelerato, la cui legge oraria è:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0}.$$

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze costanti

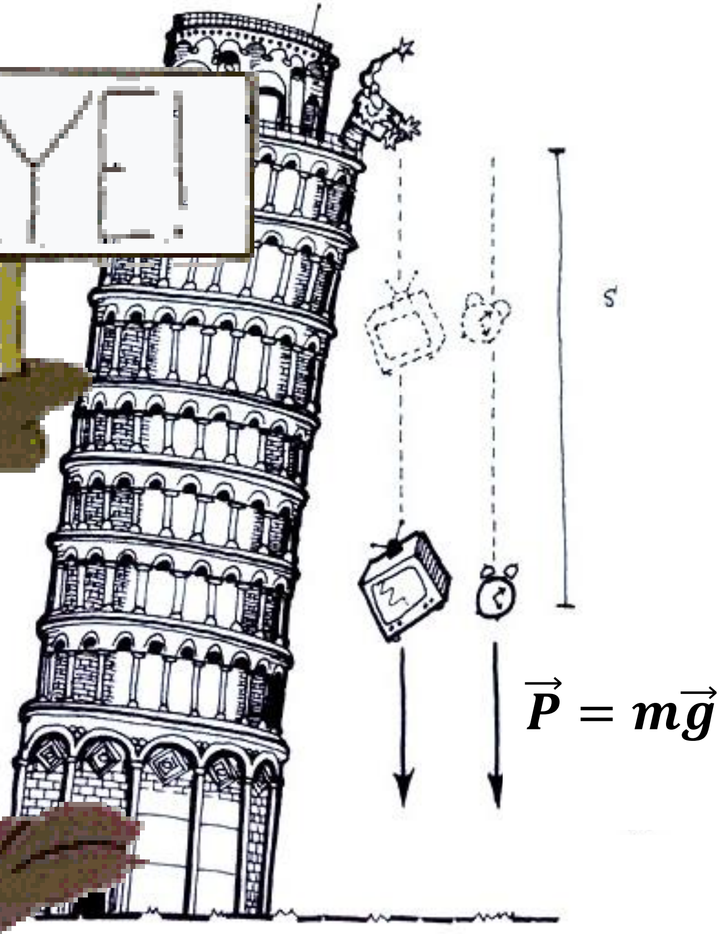
Esempio: Forza Peso (forza di gravità), è la forza con la quale **la Terra** ci attrae verso il basso (il centro della Terra), proporzionalmente alla nostra massa, e che ci impedisce di volare:



$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove $\vec{g}$ è l'**accelerazione di gravità**

in modulo uguale a 9.8 m/s^2, diretta verso il basso (verso la Terra).



Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze costanti

Esempio: Forza Peso (forza di gravità)

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}.$$

Attenzione!! $\quad$ ***massa*** $\neq$ ***Peso***

La **massa è una proprietà (scalare) intrinseca di un corpo**; si misura in chilogrammi (unità SI), descrive il comportamento dinamico di un corpo (vedi II Principio) e rappresenta la quantità ed il tipo di sostanza che lo compone. Il **Peso è una grandezza vettoriale**, dotata quindi anche di punto di applicazione, direzione e verso. Sulla Luna la massa è la stessa che sulla Terra ma il Peso è 1/6 (in modulo).

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Forze armoniche (o elastiche): sono Forze **linearmente dipendenti dallo spostamento**.

Chiamando un **generico spostamento** $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ rispetto ad una **posizione di equilibrio** $\vec{x}_0$ (cioè **dove la forza è zero**), una **Forza armonica** si scrive:

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\Delta\vec{x}}$$

la cui equazione del moto, per la variabile cinematica (posizione) $\vec{x}$ è:

$$-k\Delta\vec{x} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

Le soluzioni di questa equazione (differenziale) sono **soluzioni oscillatorie** con **periodo**:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

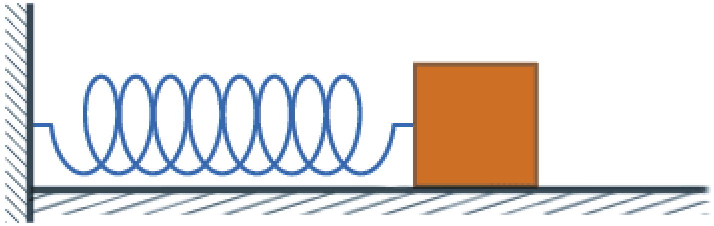
Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Esempio: Forza elastica, rappresenta la forza (**di richiamo**, per questo il segno "$-$") a cui è soggetto un **corpo legato ad una molla**, ed è descritta dalla **Legge di Hooke** (1670 ca.):

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{ke}\,\Delta\vec{\boldsymbol{x}}}$$

dove $\vec{x}$ una posizione, e si misura in metri, è k_e è la **costante elastica della molla**, e si misura in **Newton/metri**.

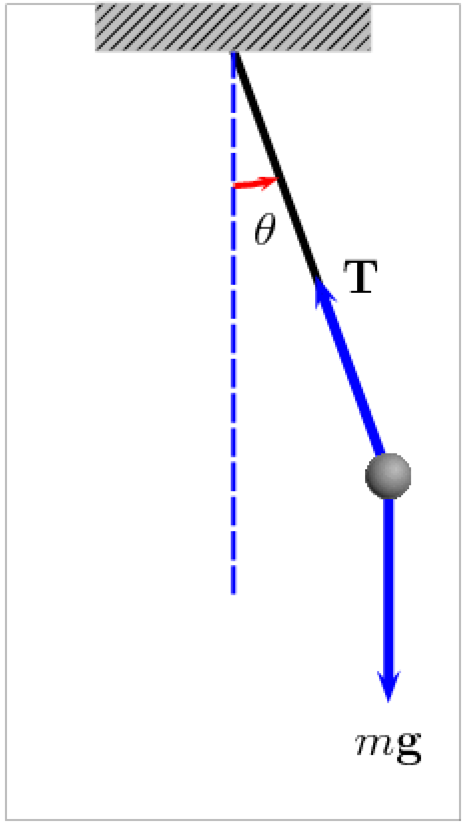
Più la molla è rigida, più k_e è grande e le oscillazioni sono veloci.



Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Esempio: pendolo semplice, per piccole oscillazioni, il suo moto angolare può essere descritto dalla (componente angolare della) forza

$$F_\vartheta \simeq -mg\vartheta = m\ell \frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$



dove ϑ è l'**angolo** (**orientato**, il segno "$-$" indica opposizione al suo verso) che **il filo del pendolo** forma con la **verticale**, e si misura in **radianti** (π radianti sono uguali a 180°), è ℓ è la lunghezza del pendolo, e si misura in metri.

"Più la corda è lunga la corda più sono lente le oscillazioni".

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Forze proporzionali all'inverso del quadrato della distanza.

Sono il **tipo più importante di forze** perché **descrivono due delle interazioni fondamentali** della **Natura** (interazione **gravitazionale** ed int. **elettrostatica**).

Sono "**interazioni a distanza**" ed i loro effetti possono estendersi a distanze infinite (come la gravità) a meno che non vengano "schermati" (la carica el.).

La loro intensità è caratterizzata dalla formula:

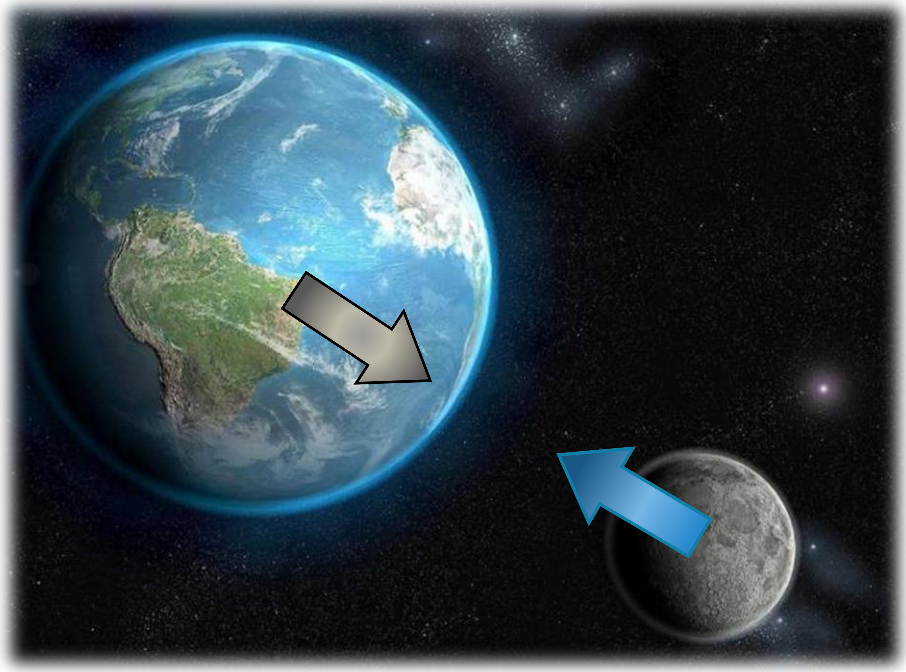
$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

dove r **è la distanza tra i due oggetti interagenti**, caratterizzati dalle **grandezze** q_1 **e** q_2, che rappresentano le loro **proprietà rispetto al tipo di interazione**.

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Esempio: Forza gravitazionale, descritta dalla **Legge di Gravitazione Universale di Newton**:

$$\boxed{\vec{F}_G = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r}}$$



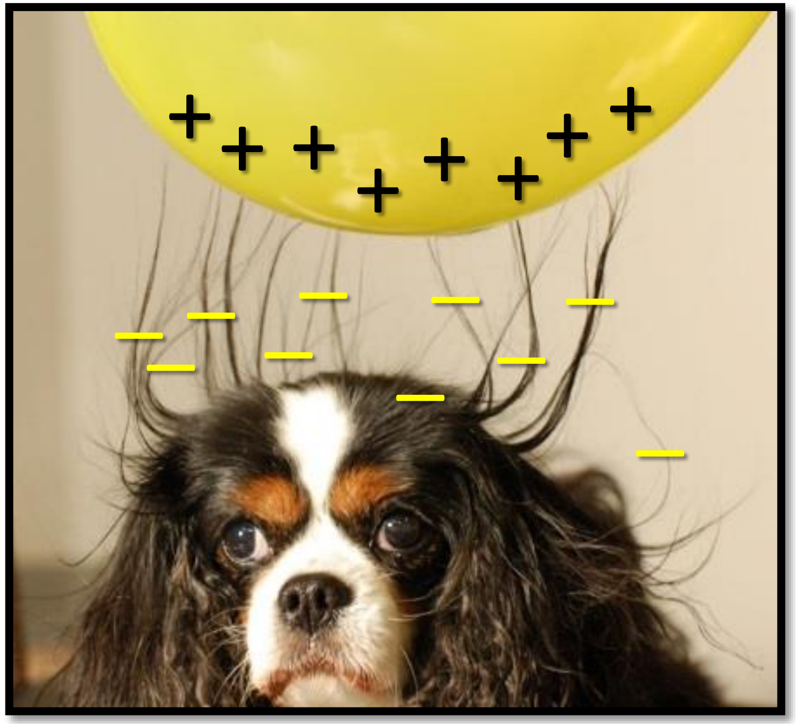
dove $\vec{F}_G$ è la **forza**, diretta come il raggio vettore $\vec{\boldsymbol{r}}$ (notare il **versore** $\hat{\boldsymbol{r}}$), che un corpo di **massa gravitazionale** $\boldsymbol{m_1}$ risente per effetto di un corpo $\boldsymbol{m_2}$, a **distanza** $\vec{r}$ dal primo. $\boldsymbol{G}$ è la **costante di gravitazione universale** $\sim 6.7 \times 10^{-11}$ (unità di mis.).

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Esempio: Forza elettrostatica, descritta dalla **Legge di Coulomb**:

$$\boxed{\vec{F}_E = -k_E \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}}$$

dove $\vec{F}_E$ è la **forza** che un corpo di **carica elettrica q_1** sente per effetto di un altro corpo carico q_2. $\boldsymbol{k_E}$ è la **costante elettrostatica** $\sim 8.9 \times 10^9$ (unità di mis.).

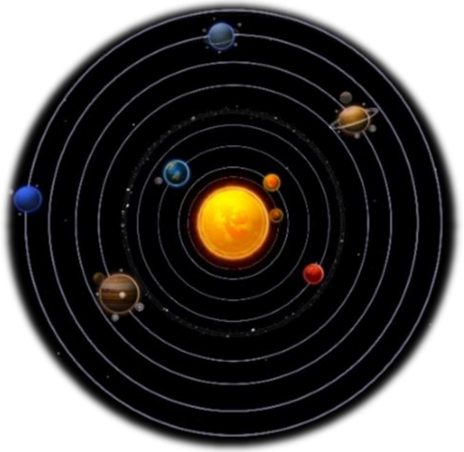


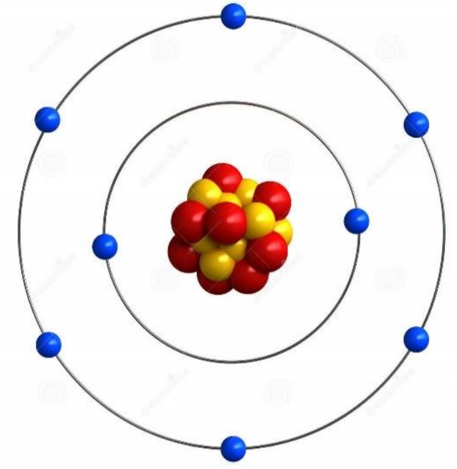
Nota che a differenza delle masse (grav.) **le cariche elettriche possono essere sia positive che negative**!

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da posizione

Osservazione: la **Legge di Gravitazione Universale** e la **Legge di Coulomb** hanno la stessa dipendenza funzionale (come **l'inverso del quadrato della distanza, $^1/_{r^2}$**) rispetto alla **variabile cinematica $\vec{r}$**, la posizione di un corpo massivo o carico rispetto all'altro.

Le soluzioni dell'equazioni del moto (le **leggi orarie**) saranno **identiche dal punto di vista funzionale**; cambieranno i coefficienti (le **costanti di interazione**) che caratterizzano le scale di grandezza con cui avviene il moto.





Sistema Solare vs.
Atomo (classico) di Ossigeno

Analogie: forma delle orbite, numero di pianeti/elettroni;
Differenze: scale di grandezza: 10^{13} m vs. 10^{-10} m, occupanti per orbita.

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da velocità

Le **Forze dipendenti dalla velocità** si chiamano, in generale, **Forze Ritardanti**, poiché (quelle più comuni in **Natura**) sono **sempre** opposte alla velocità.

Esistono due ***modelli* (empirici)** principali di forze ritardanti:

$$\vec{F}_V = -\lambda\vec{v}$$ (**Legge di Stokes**, regime laminare)

più facile da trattare analiticamente, dove $\boldsymbol{\lambda}$ ($= \boldsymbol{6\pi\, \eta r}$, $\boldsymbol{\eta}$ **coef. di viscosità**, $\boldsymbol{r}$ il raggio di un oggetto sferico) prende il nome di **coefficiente di attrito viscoso**, oppure

$$\vec{F}_V = -\left(\frac{1}{2} D\rho A\, v^2\right)\hat{v}$$ (regime vorticoso)

dove D è il coefficiente di resistenza del mezzo viscoso in cui si muove il corpo, ρ è la sua densità, A è la superficie “d’impatto” dell’oggetto che si sta muovendo, e $\hat{\boldsymbol{v}}$ **è il versore velocità** (vettore unitario con verso e direzione uguali a quelli di $\vec{\boldsymbol{v}}$).

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da velocità

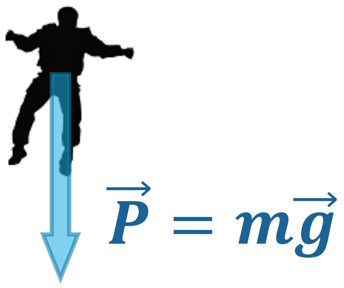
Esempio: Caduta nell'atmosfera di un paracadutista

- Prima di aprire il paracadute, il paracadutista è soggetto alla sola **forza di gravità/forza peso** (si trascura ora l'attrito dell'aria):

$$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$$

- Il suo moto è **uniformemente accelerato verso il basso** di $\vec{g}$. Considerando solo la componente verticale del suo moto (l'altezza, h) ho la **legge oraria**:

$$h(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0.$$



Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da velocità

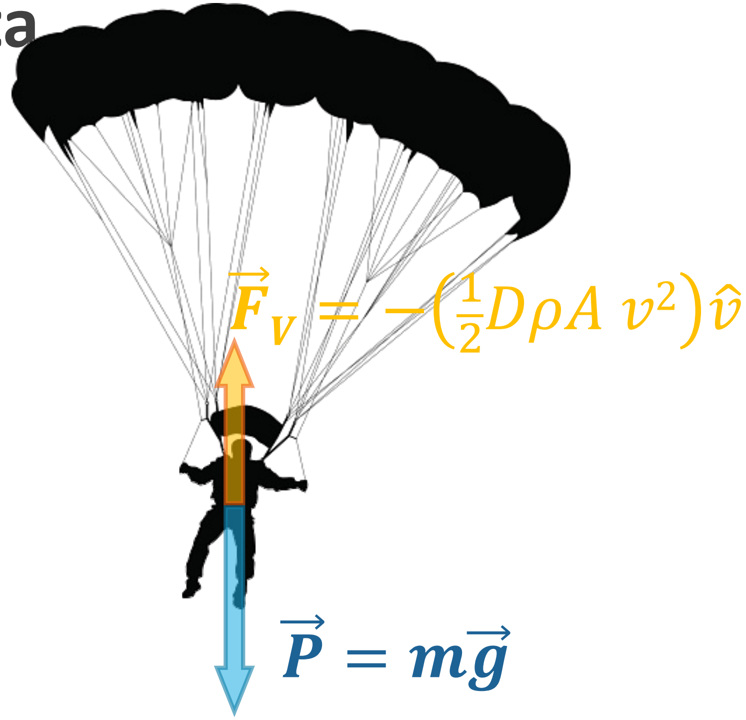
Esempio: Caduta nell'atmosfera di un paracadutista

- Se ad un certo istante apre il paracadute, la **Forza Resistente** esercitata dell'aria diventa rilevante:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_V = m\vec{g} - \left(\tfrac{1}{2}D\rho A\, v^2\right)\hat{v}.$$

- Accelererà verso il basso fino a raggiungere una **velocità limite, $\vec{v}_{lim}$**, tale per cui $P = FV$,

$$\boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{2\,mg}{D\,\rho A}}}.$$

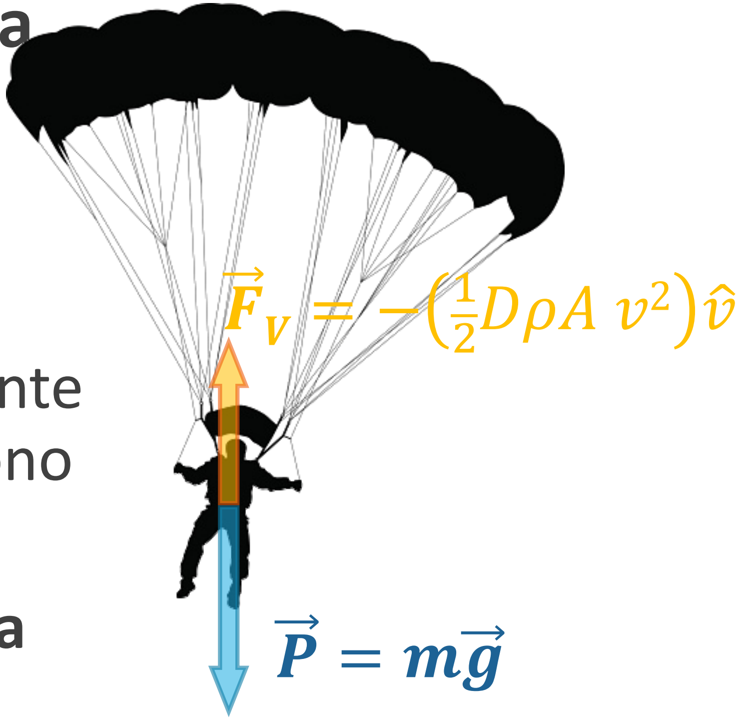


La **risultante delle forze sarà zero** ed il suo moto procederà in modo **rettilineo ed uniforme** con velocità $\vec{v}_{lim}$.

Leggi delle Forze, classificazione matematica: Forze dip. da velocità

Esempio: Caduta nell'atmosfera di un paracadutista

$$\boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{2\,mg}{D\ \rho A}}}$$



Osservazioni: 1. Perché il sasso cade prima della piuma?

Dall'espressione per v_{lim} si vede che cadono più velocemente gli oggetti più massivi (m), oppure, a parità di massa, cadono prima quelli con superficie d'impatto (A) minore.

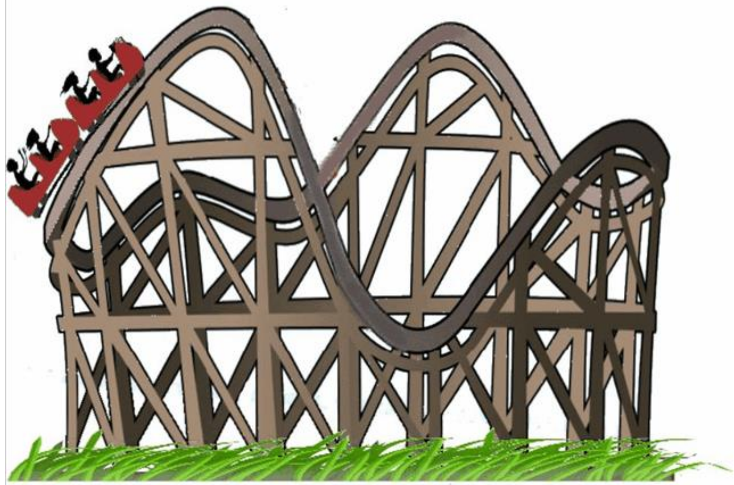
2. **Perché gli aerei sono fatti a punta e hanno la fusoliera cilindrica?**
3. **Cosa cambia per un sasso che affonda nell'acqua?**
4. **Perché è difficile fare atterrare le sonde su Marte?**

Leggi delle Forze, classificazione matematica: altri tipi di Forze

Forze di reazione, forze che dipendono da altre forze

Un altro esempio comune di leggi delle Forze è quello delle **forze che dipendono da altre forze**.

Queste comprendono le **forze d'attrito** e le **reazioni vincolari**.
Sono **Forze di contatto** che si esercitano in generale tra un corpo fermo o in movimento ed un **vincolo**, che impone al corpo di muoversi **lungo una certa traiettoria** (**reazioni vincolari**) o **senza "scivola-mento"** (velocità relativa) tra i due (**attrito dinamico**).

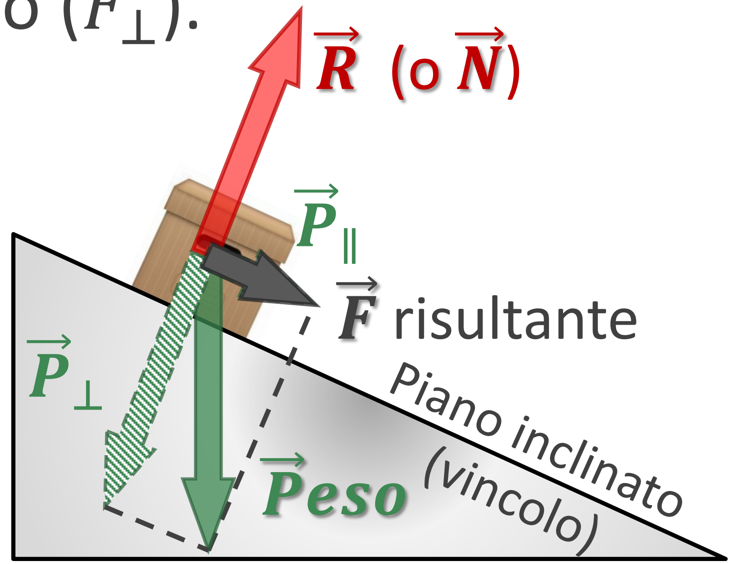


Esempio di "vincolo"

Leggi delle Forze, classificazione matematica: altri tipi di Forze

Reazione vincolare ($\vec{R}$): è la forza che "ci impedisce di sprofondare nel pavimento" (il vincolo).
Ha una **componente perpendicolare** al piano, che spesso viene chiamata **reazione normale** ($\vec{N}$), uguale e contraria alla risultante delle forze applicate perpendicolarmente a questo ($\vec{F}_\perp$).

Suggerimento: in generale, per trovare il valore delle reazioni vincolari bisogna prima trovare la risultante di tutte le altre forze.



Leggi delle Forze, classificazione matematica: altri tipi di Forze

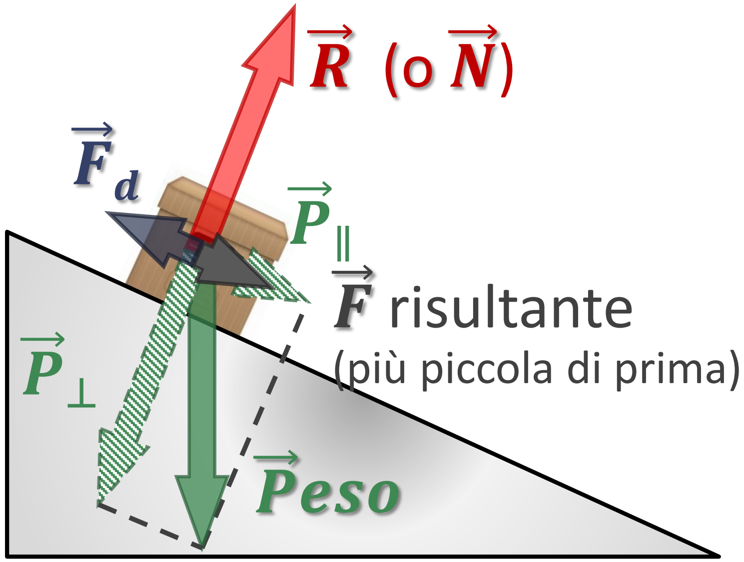
Forza di attrito dinamico: è la forza che si oppone al moto ($-\hat{v}$) di ‘‘scivolamento’’ di un corpo che **si sta muovendo** su di un vincolo (piano, strada…) in proporzione uguale alla **forza con cui preme perpendicolarmente** ($\vec{F}_\perp$) su di esso:

$$\vec{F}_d = -\mu_d F_\perp \hat{v}.$$

La costante di proporzionalità $\boldsymbol{\mu_d}$ prende il nome di **coefficiente di attrito dinamico**.

Questa forza è quella che ci permette, tra le altre cose, di **frenare** (e accelerare) quando siamo in macchina.

Tra **gomma e asfalto** $\mu_d \simeq 0.8$, mentre con **asfalto bagnato** $\mu_d \simeq 0.4 \div 0.6$.



Leggi delle Forze, classificazione matematica: altri tipi di Forze

Forza di attrito statico: è la forza che si oppone al moto ($-\hat{v}$) di "scivolamento" (dovuto ad una forza con componente parallela al vincolo, $\vec{F}_{\parallel}$) di <u>un corpo **fermo**</u> su di un vincolo (piano, strada…) in proporzione uguale alla **forza con cui preme perpendicolarmente** ($\vec{F}_{\perp}$) su di esso:

$$\vec{F}_s \leq -\mu_s F_{\perp} \hat{v}.$$

Al massimo uguale (e opposta) a $\vec{F}_{\parallel}$

La costante di proporzionalità $\boldsymbol{\mu_s}$ prende il nome di **coefficiente di attrito statico**. In generale $\boldsymbol{\mu_s} > \boldsymbol{\mu_d}$.

Questa forza è quella che ci permette, tra le altre cose, di **fare le curve** quando siamo in macchina.

Nota: a volte $\vec{F}_s$ viene considerata, insieme a $\vec{N}$, parte della reazione vincolare $\vec{R}$ (non necessariamente perpendicolare al vincolo quindi).