

Appendici

Un ripasso di matematica

Appendice A Algebra

776 L'algebra è sostanzialmente un *corpus* di regole e procedimenti per esplorare in modo logico le relazioni tra concetti usando simboli per una presentazione concisa e facile da leggere. Di solito si ha a che fare con equazioni che descrivono le interdipendenze tra grandezze fisiche. Per esempio, il cammino l percorso in un intervallo di tempo t da un uccello che si muove alla velocità v è dato da $l = vt$. *Un'equazione si può risolvere rispetto a soltanto una grandezza incognita.* Per esempio, se si conosce che la velocità è 2 m/s e che il cammino percorso è 500 m (e si trascurano per il momento le unità di misura), l'equazione precedente diventa $500 = 2t$: una sola equazione, una sola incognita (cioè, t). Quanto vale l'intervallo di tempo impiegato dall'uccello per compiere il viaggio? Per rispondere a questa domanda, si risolve l'equazione rispetto a t ; a questo scopo, *si isola l'incognita in un membro dell'equazione.* Per farlo, si devono ricordare alcune regole logiche:

1. Se si addiziona o si sottrae la stessa quantità (costante o variabile) a entrambi i membri di un'uguaglianza, questa resta invariata; $100 = 100$; $100 - 2 = 100 - 2$.

2. Se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di un'uguaglianza per la stessa quantità (costante o variabile), questa resta invariata: $100 = 100$; $100/2 = 100/2$.

3. Se si elevano alla stessa potenza entrambi i membri di un'uguaglianza (per esempio, se si elevano al quadrato entrambi i membri o si estrae la radice quadrata di entrambi i membri, o se si elevano al cubo entrambi i membri o si estrae la radice cubica di entrambi i membri), l'uguaglianza rimane invariata: $100 = 100$; $\sqrt{100} = \sqrt{100}$.

Quando è possibile, si applica prima la regola 1 e poi la regola 2. Si isola la variabile a qualsiasi potenza sia elevata e, se l'esponente della potenza è diverso da 1, si usa la regola 3 per renderlo uguale a 1.

Ritorniamo al volo dell'uccello: $2t = 500$. Per isolare t , si elimina il 2 (usando la regola 2) dividendo entrambi i membri per 2; quindi, $t = 250$ s.

Risolviamo l'equazione $8x + 2 = 42$ rispetto a x . Per isolare x , prima si elimina il 2 per mezzo della regola 1: $8x = 42 - 2$ da cui $8x = 40$. Poi si elimina l'8 usando la regola 2: $x = 40/8$ da cui $x = 5$.

Ora risolviamo l'equazione $5x^2 + 12 = 57$ rispetto a x . Applicando la regola 1 si ottiene: $5x^2 = 57 - 12$, da cui $5x^2 = 45$. Poi si isola x^2 usando la

regola 2 per dividere entrambi i membri per 5: $x^2 = 9$. Ora si usa la regola 3, estraendo la radice quadrata di entrambi i membri: $x = \pm 3$. È importante notare che si hanno 2 soluzioni: $+3$ e -3 .

Si vuole risolvere l'equazione $\frac{3}{4}t^2 - 6 = 0$ rispetto a t . Si usa la regola 1 per trasportare 6 nel secondo membro, ottenendo: $\frac{3}{4}t^2 = 6$. Ora, usando la regola 2, si moltiplicano entrambi i membri per 4 ottenendo $3t^2 = 24$. Usando di nuovo la regola 2, si dividono entrambi i membri per 3 ottenendo $t^2 = 8$. Ora, usando la regola 3, si estrae la radice quadrata di entrambi i membri, ottenendo: $t = \sqrt{8}$.

777 Alcune difficoltà

1. Dividere per frazioni può creare difficoltà: $8/(1/4)$ non dà 2. Il valore di una frazione non cambia quando si moltiplicano il numeratore e il denominatore per la stessa quantità. Nel caso in questione, si moltiplicano il numeratore e il denominatore per 4 ottenendo $32/1$. Analogamente, se è dato $(1/4)/(1/2)$, moltiplicando il numeratore e il denominatore per 2 si ottiene $(1/2)/1 = 1/2$.

2. $(a + b)^2$ non è uguale a $a^2 + b^2$! $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$.

3. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ non è uguale a $\frac{1}{a+b}$. Si possono addizionare soltanto i termini che hanno lo stesso denominatore. Per ridurre più frazione a un denominatore comune ab , si moltiplicano il numeratore e il denominatore per il fattore necessario: $\frac{b}{ba} + \frac{a}{ab}$ e si somma. Così

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

Analogamente

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

4. Si deve ricordare che $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, per esempio, $\sqrt{4}\sqrt{9} = \sqrt{36}$, ossia $2 \times 3 = 6$. Analogamente, $\sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; quindi, $\sqrt{25gr^2} = 5r\sqrt{g}$.

5. È data la relazione $F = GmM/R^2$, con $2GmM \neq R^2$. Come varia F se m raddoppia? La nuova F è $G(2m)M/R^2$, che è il doppio della F di partenza. Come varia F quando R raddoppia? La nuova F è $GmM/(2R)^2 = GmM/(4R^2)$, che è $1/4$ della F di partenza.

A.1. Esponenti

778 Un quadrato il cui lato ha lunghezza a ha un'area $a \times a$, che si può scrivere più concisamente come a^2 (a innalzata alla seconda potenza). Perciò, a^2 si legge « a al quadrato». Analogamente, un cubo di spigolo a ha un volume $a \times a \times a = a^3$, che si legge « a al cubo». In generale, a elevata all' n -esima potenza è a^n , dove l'esponente n può essere un numero qualsiasi, frazionario o intero, positivo o negativo. Le quantità elevate a varie potenze vengono spesso moltiplicate e divise. Per esempio, $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^2 a^3 = a^5$. In generale,

$$(a^n)(a^m) = a^{n+m} \quad (\text{A.1})$$

Le basi a che vengono innalzate alle potenze n e m sono uguali. Alternativamente, se le basi a e b sono diverse e vengono innalzate alla stessa potenza, allora

$$(a^n)(b^n) = (ab)^n \quad (\text{A.2})$$

Ecco un esempio di divisione di due potenze con la stessa base: $2^3/2^2 = 8/4 = 2 = 2^1$; i due 2 nel denominatore elidono due 2 nel numeratore o, ciò che è equivalente, si sottrae l'esponente del denominatore dall'esponente del numeratore. Più in generale,

$$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \times a \times a}{a \times a} = a^{3-2} = a$$

In generale

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (\text{A.3})$$

che indica che, per definizione,

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad (\text{A.4})$$

Quindi, $1/5 = 5^{-1}$, $1/3^2 = 3^{-2}$, $1/4^{-2} = 4^2$. Poiché $a/a = 1$, dall'equazione (A.3) consegue che $a^{1-1} = a^0 = 1$. *Qualsiasi quantità innalzata alla potenza 0 è uguale a 1.*

Gli esponenti frazionari corrispondono a radici; per esempio,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{A.5})$$

Perciò, usando l'equazione (A.1), si ottiene

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a^{1/2}a^{1/2} = a^1 = a$$

Poiché l'elevazione a potenza è l'operazione inversa dell'estrazione di radice, e viceversa,

$$(a^{1/n})^n = 1$$

Per esempio, $(25^{1/2})^2 = 5^2 = 25$. In generale,

$$(a^n)^m = a^{nm} \quad (\text{1.6})$$

dove n e m possono essere numeri interi o frazionari.

A.2. Potenze di 10: notazione scientifica

[779] Spesso si incontrano numeri che sono estremamente piccoli (come la massa di un elettrone, 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg) ed estremamente grandi (come il numero di stelle nell'Universo, ≈ 10 000 000 000 000 000 000 000). La *notazione scientifica* è un modo ste-

nografico per scrivere i numeri per mezzo delle potenze di 10:

$10^0 = 1$	$10^0 = 1$
$10^1 = 10$	$10^{-1} = 1/10 = 0,1$
$10^2 = (10 \times 10) = 100$	$10^{-2} = 1/(10 \times 10) = 0,01$
$10^3 = (10 \times 10 \times 10) = 1000$	$10^{-3} = 1/(10 \times 10 \times 10) = 0,001$
$10^4 = (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 10\,000$	$10^{-4} = 1/(10 \times 10 \times 10 \times 10) = 0,0001$

e così via. Quando l'esponente è positivo, il numero di zeri è uguale all'esponente della potenza di 10. Per esempio, il numero di stelle nell'Universo è 1 con 22 zeri, ossia $1 \cdot 10^{22}$, ossia, più semplicemente, 10^{22} .

Supponiamo di volere esprimere in notazione scientifica un numero maggiore di 1,0 espresso in forma ordinaria (come il numero di secondi in 1 a: 31 560 000). Anzitutto si indica la virgola nella sua posizione di riferimento (31 560 000,0). Poi si decide dove si vuole spostare la virgola (per esempio, $31,560\,000,0$). In questo caso, si deve spostare la virgola di 6 posti a sinistra, ottenendo 31,56; moltiplicando questo numero per 10^6 si sposta la virgola di 6 posti a destra, riportandola nella posizione di partenza. Perciò, $31\,560\,000 = 31,56 \times 1000\,000 = 31,56 \cdot 10^6$, ossia $3,156 \cdot 10^7$, ossia $0,3156 \cdot 10^8$. Per scrivere in notazione scientifica un numero minore di 1,0 (per esempio, 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg), si localizza di nuovo dove si vuole che compaia la virgola (0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg). La virgola è spostata di 31 posti a destra; quindi, moltiplicando 9,11 per 10^{-31} si sposta la virgola di 31 posti a sinistra, riportandola nella posizione di partenza. La massa di un elettrone è $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

Quando si moltiplicano o si dividono numeri scritti in notazione scientifica, i fattori che moltiplicano le potenze di 10 devono essere trattati separatamente dagli esponenti delle potenze di 10; per esempio,

$$(1,1 \cdot 10^{12})(5,0 \cdot 10^{17}) = (1,1 \cdot 5,0)(10^{12} \cdot 10^{17}) = 5,5 \cdot 10^{29}$$

$$\frac{(1,1 \cdot 10^{12})}{(5,0 \cdot 10^{17})} = \frac{(1,1)}{(5,0)} \times \frac{(10^{12})}{(10^{17})} = 0,22 \cdot 10^{-5}$$

Le calcolatrici scientifiche hanno un tasto «exp» che permette di introdurre gli esponenti e aiutano a tenere conto automaticamente della virgola.

A.3. Logaritmi

780 Supponiamo di avere un numero positivo y espresso come potenza di b , dove $b > 0$ e $b \neq 1$; quindi,

$$y = b^x$$

Per definizione, x è il logaritmo di y in base b ; perciò,

$$x = \log_b y$$

Il logaritmo x è l'esponente, e le due equazioni sono semplicemente modi diversi di dire la stessa cosa. Per esempio, se $2^3 = 8$, allora $3 = \log_2 8$; se $8^{-4/3} = 1/16$, allora $-4/3 = \log_8 1/16$. Poiché i logaritmi sono esponenti, le

leggi che governano gli uni sono assai simili a quelle che governano gli altri. Perciò, indipendentemente dalla base,

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

dove

$$\log_b b = 1$$

$$\log 1 = 0$$

e

$$b^{\log_b a} = a$$

Sono ampiamente usate due basi, 10 ed $e = 2,718\,281\,828 \dots$. Si hanno i *logaritmi decimali* (o *volgari* o *di Briggs*) quando $y = 10^x$, per cui $x = \log_{10} y$. Prima dell'avvento della calcolatrice elettronica, si usavano i logaritmi decimali per eseguire calcoli complicati. Il nostro interesse per i logaritmi decimali nasce dal concetto di livello di intensità (paragrafo 295), a cui è associata l'unità decibel (dB). Si hanno i *logaritmi naturali* (o *neperiani*) quando $y = e^x$, per cui $x = \ln y$ (è consuetudine scrivere $\ln y$ anziché $\log_e y$). La funzione esponenziale e^x (figura A1) e il logaritmo naturale (figura A2) si presentano in moltissime situazioni fisiche in cui la rapidità di variazione di una data grandezza dipende dalla grandezza stessa. Si può vedere questa dipendenza nella figura A1: la rapidità di variazione della curva $y = e^x$ è uguale a e^x . Quando le ordinate y dei punti della curva hanno valori piccoli, il coefficiente angolare (la pendenza) della curva in quei punti è piccola; quando le ordinate y dei punti della curva hanno valori grandi, il coefficiente angolare (la pendenza) della curva in quei punti è grande.

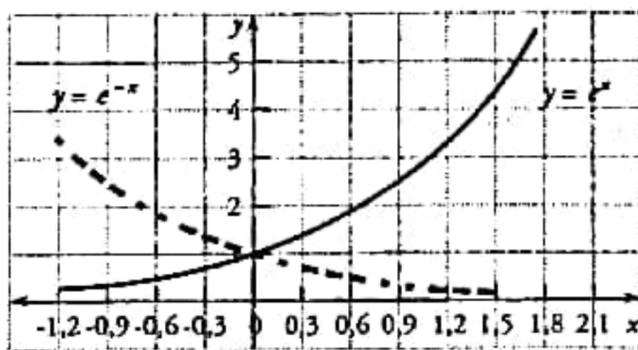


Figura A1

Questa proprietà significa che, se una certa grandezza N varia nel tempo in modo esponenziale, allora $\Delta N / \Delta t \propto N$.

Da quanto è stato detto consegue che

$$\ln e^x = x \quad \text{e} \quad e^{\ln x} = x$$

È importante notare che, nel caso di $y = e^x$, quando $y = 1$, allora $x = 0$; quindi, $y = 2$ quando $2 = e^x$, per cui $x = \ln 2 = 0,693$. Raddoppiando y , si ottiene $y = 4$ quando $x = \ln 4 = 1,386 = (0,693 + 0,693)$; e, di nuovo, $y = 8$ quando $x = \ln 8 = 2,079 = (0,693 + 1,386)$. Ogni volta che x aumenta di $0,693$, y raddoppia. In realtà, ogni volta che x aumenta di una quantità

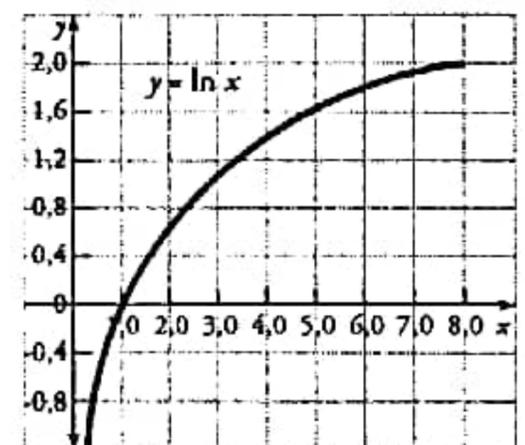


Figura A2

fissa, y aumenta secondo un fattore moltiplicativo fisso: y aumenta secondo lo stesso fattore in uguali intervalli di x . Quando x aumenta secondo il fattore $\ln 10 = 2,3026$, y aumenta secondo il fattore 10.

A.4. Proporzionalità ed equazioni

[781] Spesso si trova che una grandezza fisica dipende da un'altra grandezza fisica; per esempio, la forza esercitata da una molla dipende dall'allungamento della molla; l'intensità di corrente attraverso un resistore dipende dalla differenza di potenziale tra i suoi capi. Supponiamo che le grandezze A e B dipendano l'una dall'altra in modo tale che, quando una raddoppia, anche l'altra raddoppia. In tal caso si dice che le due grandezze sono **direttamente proporzionali** l'una all'altra, ossia, simbolicamente, $A \propto B$. D'altra parte, quando una delle due grandezze raddoppia, l'altra può dimezzarsi, nel qual caso $A \propto 1/B$; allora si dice che le due grandezze sono **inversamente proporzionali**. La tabella A1 dà un elenco di valori di A e dei corrispondenti valori di B . A prima vista potrebbe sembrare che non esista alcuna relazione tra i due insiemi di valori, ma, quando si forma il rapporto B/A , si vede che esiste una regolarità costante: $B/A = 3$. Perciò, $B = 3A$, e il numero 3 è detto **costante di proporzionalità**. Quando due grandezze sono direttamente proporzionali, si può sempre trasformare la proporzionalità in un'uguaglianza usando un'appropriata costante di proporzionalità. La lunghezza C di una circonferenza è direttamente proporzionale al suo diametro D , nel qual caso la costante di proporzionalità è π : $C = \pi D$. L'area A di una sfera è direttamente proporzionale al quadrato del suo raggio r , nel qual caso la costante di proporzionalità è 4π : $A = 4\pi r^2$.

Quando le variabili che compaiono in un'equazione si presentano soltanto alla prima potenza, l'equazione è detta **equazione di 1° grado** o **equazione lineare**; per esempio, $y = mx$, dove m è una costante. In questo caso, quando $x = 0$, $y = 0$ e la curva (figura A3) è una retta passante per l'origine.

A	B
3,1	9,3
18,0	54
5,2	15,6
71,0	213

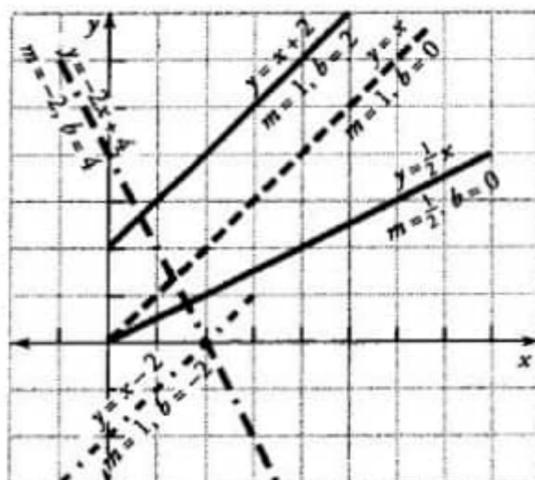


Figura A4

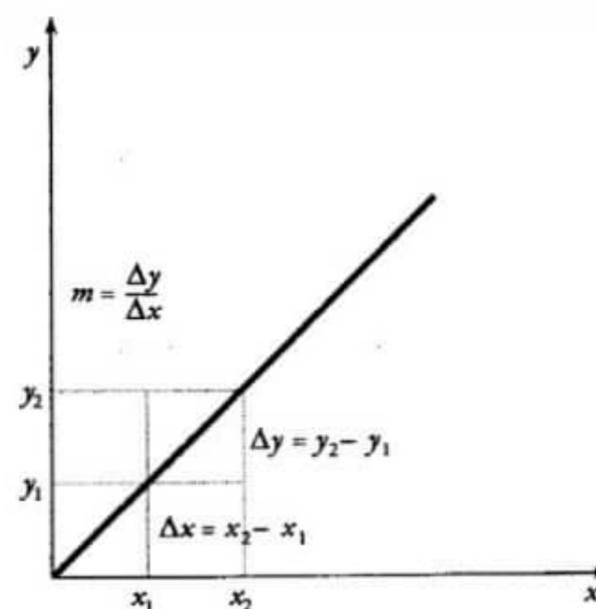


Figura A3

Per ogni coppia di punti della retta, $\Delta y/\Delta x$ è il **coefficiente angolare** (o **pendenza**) ed è uguale a m . Se si aggiunge a y una costante b cosicché $y = mx + b$, la retta trasla parallelamente a se stessa; b è l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y , ed è detta **intercetta con l'asse y** (figura A4).

L'equazione di 2° grado (o equazione quadratica)

[782] Un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato percorre uno spazio (un cammino) s dato dall'equazione (3.9): $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Questa equazione è tipica di una classe di equazioni che contengono una variabile (t in questo caso) elevata alla seconda potenza ed è detta **equazione di 2° grado** o **equazione quadratica**. Nella sua forma standard tutti i termini sono raccolti nel primo membro, mentre il secondo membro è 0:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a , b e c sono costanti. Questa equazione si può risolvere direttamente, ma di solito si ricorda la formula risolutiva nella forma

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

la quale, purché $b^2 > 4ac$, dà due soluzioni reali. Per esempio, nell'equazione $2x^2 + 6x - 20 = 0$, le costanti sono $a = 2$, $b = 6$ e $c = -20$; perciò,

$$x_+ = \frac{-6 + \sqrt{36 - 4(2)(-20)}}{2(2)} = \frac{-6 + \sqrt{196}}{4} = +2$$

$$x_- = \frac{-6 - \sqrt{36 - 4(2)(-20)}}{2(2)} = \frac{-6 - \sqrt{196}}{4} = -5$$

In un'analisi fisica può accadere che soltanto una delle due soluzioni corrisponde a una situazione possibile; allora si trascura semplicemente l'altra. Per esempio, si potrebbe risolvere l'equazione (3.9) rispetto al tempo e trovare che una delle due soluzioni è negativa: essa è accettabile matematicamente, ma non fisicamente.

Sistemi di equazioni

[783] Per ogni incognita si deve avere un'equazione indipendente (ossia, che non sia equivalente ad alcun'altra equazione del sistema). Le situazioni in cui si hanno una sola incognita e due incognite sono comuni in tutta la fisica. In realtà, nell'analisi dei circuiti si incontrano problemi in cui si hanno tante incognite quante sono le maglie del circuito, ma tre equazioni saranno il nostro limite. Supponiamo di avere 2 incognite, x e y , e 2 equazioni:

$$4x - 2y = 16$$

$$3x + 4y = 23$$

Molte coppie di numeri soddisfano ciascuna di queste equazioni (per esempio, nella prima, $x = 4$, $y = 0$, oppure $x = 0$, $y = -8$). Si vuole risolvere *simultaneamente* queste equazioni, in modo che le soluzioni soddisfino al tempo stesso entrambe le equazioni; in altri termini, si vuole risolvere il *sistema di equazioni*. A questo scopo si possono usare due metodi. (1) *Si risolve l'una o l'altra equazione rispetto all'una o all'altra incognita in funzione dell'altra e si sostituisce l'espressione trovata nell'equazione restante*. Dalla prima equazione, $4x = 16 + 2y$, $x = 4 + \frac{1}{2}y$. Ora si introduce questa espressione per x nella seconda equazione affinché essa contenga soltanto un'incognita: $3(4 + \frac{1}{2}y) + 4y = 23$, e quindi $12 + 3y/2 + 4y = 23$, $3y/2 + 8y/2 = 23 - 12$, $11y/2 = 11$,

$y/2 = 1$, $y = 2$. Introducendo questo valore di y nella prima equazione, si ottiene: $4x - 2(2) = 16$, $4x = 20$, $x = 5$. (q) Alternativamente, si moltiplica l'una o l'altra delle due equazioni, o si moltiplicano entrambe, per i fattori appropriati affinché l'una o l'altra delle due incognite abbia lo stesso coefficiente. Poi si sommano o si sottraggono le due equazioni a membro a membro, eliminando così quell'incognita. Nel caso in questione, per eliminare y , si moltiplica per 2 la prima equazione $4x - 2y = 16$ ottenendo

$$18x - 4y = 32$$

e si somma all'equazione equivalente ottenuta la seconda, ottenendo

$$18x - 4y = 32$$

$$13x + 4y = 23$$

$$\hline 11x = 55$$

da cui $x = 5$. Ora si sostituisce questo risultato in una delle due equazioni e si risolve rispetto a y .

A.5. Approssimazioni

[784] Spesso è desiderabile approssimare la soluzione di un problema, o come verifica rapida o perché la soluzione esatta è troppo elaborata per poter essere trattata. La formula

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3}b^3 + \dots \quad (\text{A.7})$$

dà alcune approssimazioni assai utili. In generale, se n è un numero intero positivo [in questo caso la formula A.7 è detta *formula del binomio* (o *formula di Newton*)], si ha un numero finito di termini; altrimenti, si ha un numero infinito di termini. Si presentano spesso espressioni della forma $(1 + x)^n$, che si possono approssimare usando il *teorema del binomio*, che si ottiene dalla formula (A.7) ponendo $a = 1$, $b = x$; perciò,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots \quad (\text{A.8})$$

Quando x è molto piccola ($x \ll 1$), il termine x^2 e i termini superiori saranno trascurabili e

$$[x \ll 1] \quad (1 + x)^n \approx 1 + nx$$

$$\text{con } n = 2 \quad (1 + x)^2 \approx 1 + 2x$$

$$\text{con } n = 3 \quad (1 + x)^3 \approx 1 + 3x$$

$$\text{con } n = \frac{1}{2} \quad (1 + x)^{1/2} = \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\text{con } n = -\frac{1}{2} \quad (1 + x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{con } n = -1 \quad (1 + x)^{-1} = \frac{1}{(1 + x)} \approx 1 - x$$

$$\text{con } n = \frac{1}{2} \quad (1 - x)^{1/2} = \sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Si provi a estrarre la radice quadrata di 1,000 000 001 0 su una calcolatrice. Ora si ponga $x = 0,000\ 000\ 001\ 0$, e la radice quadrata di $(1 + x)$ è $\approx 1,000\ 000\ 000\ 5$. Per $a \gg b$.

$$(a + b)^n = a^n \left[1 + \frac{b}{a} \right] \approx a^n \left[1 + n \frac{b}{a} \right] \quad (\text{A.9})$$

Qual è il valore di $a/(a + b)^2$ quando $a \gg b$? Poiché b è trascurabile rispetto ad a , $(a + b)^2 \approx (a)^2$ e $a/(a + b)^2 \approx 1/a$. Si verifichi questa espressione con l'equazione (A.9), $n = 2$ e $(a + b)^2 \approx a^2(1 + 2b/a) \approx a^2$. Si supponga che $b \gg a$, $(a + b)^2 \approx (b)^2$ e $a/(a + b)^2 \approx a/b^2$. Spesso si conosce come un sistema si comporta ai suoi estremi e si può confermare l'analisi a quegli estremi quando una quantità essenziale è molto grande o molto piccola. Per esempio, ogni equazione per la forza che si esercita tra due magneti deve dare una forza tendente a zero quando la distanza reciproca dei magneti diventa molto grande.

Un metodo utile per aumentare la probabilità che un'analisi sia corretta è semplificare i valori numerici arrotondandoli e poi eseguire rapidamente il calcolo per ottenere un risultato grossolano. Quando un valore numerico è arrotondato alla potenza di 10 più vicina, si dice che questa potenza di 10 è un **ordine di grandezza**. Per esempio, l'ordine di grandezza dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, $9,81 \text{ m/s}^2$, è 10 m/s^2 ; le grandi montagne hanno altezze dell'ordine di grandezza di 10 km ; la massa dell'elettrone, $9,109\ 389\ 7 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, è dell'ordine di grandezza di 10^{-30} kg ; il numero di atomi presenti in 1 cm^3 di un solido è dell'ordine di grandezza di 10^{23} .

Appendice B Geometria

786 La figura B1 fornisce alcune utili relazioni per gli angoli formati da rette che si intersecano e per gli angoli dei triangoli. Di particolare

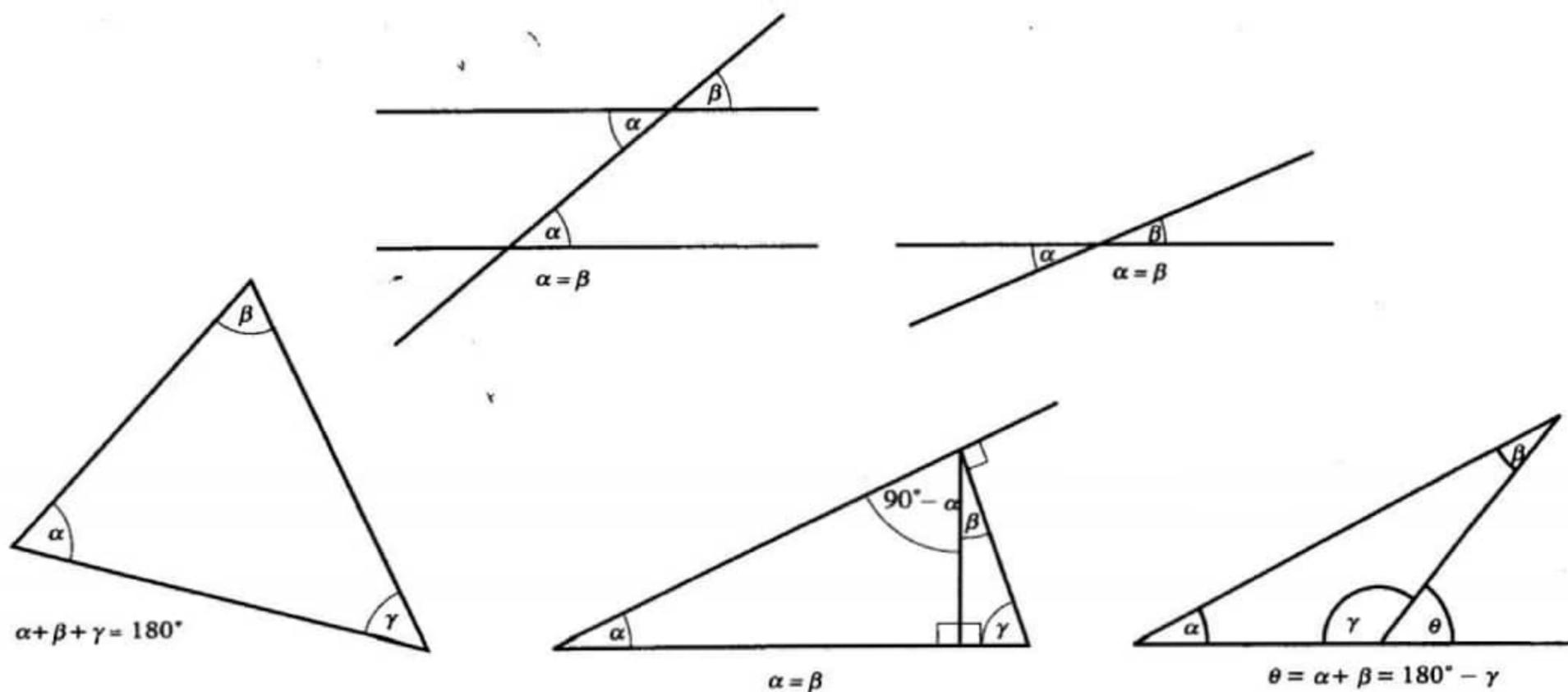


Figura B1

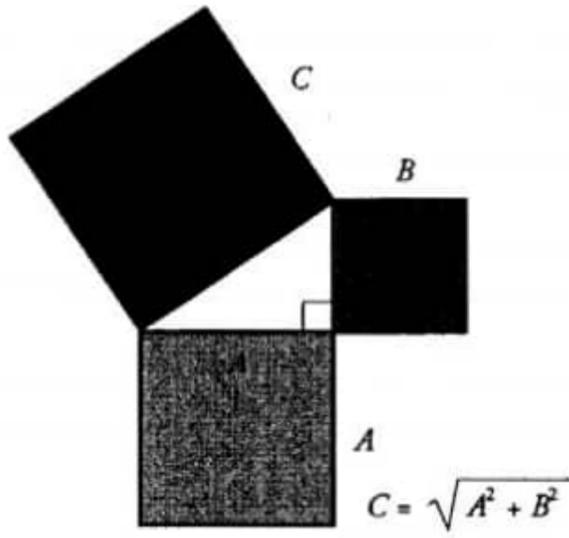


Figura B2

interesse è il **teorema di Pitagora**, che esprime la relazione tra le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo qualsiasi; di conseguenza,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

come nella figura B2. Esistono triangoli rettangoli i cui lati hanno lunghezze date da numeri interi; quelli che si incontrano più spesso hanno i lati di lunghezze 3, 4, 5 unità e 5, 12, 13 unità (figura B3).

La figura B4 indica le aree e i volumi di figure che si incontrano spesso in questo testo. Si noti che l'area della superficie curva (superficie laterale) di un cilindro circolare retto, $2\pi R h$, è l'area della superficie descritta («spazzata») da un segmento rettilineo di lunghezza h , perpendicolare alla base, il quale viene spostato parallelamente a se stesso lungo la circonferenza della base, di lunghezza $2\pi R$. Analogamente, il volume di un cilindro è dato dal prodotto dell'area della base per l'altezza (cioè, è il volume descritto da un segmento rettilineo di lunghezza h , perpendicolare alla base, il quale viene spostato parallelamente a se stesso in ogni punto della base).

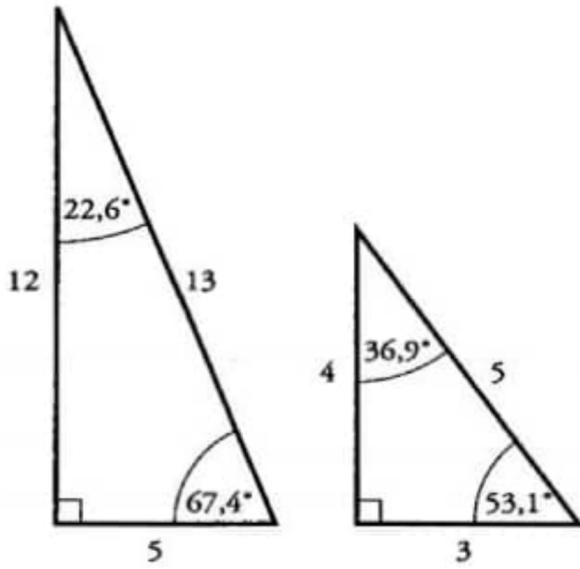


Figura B3

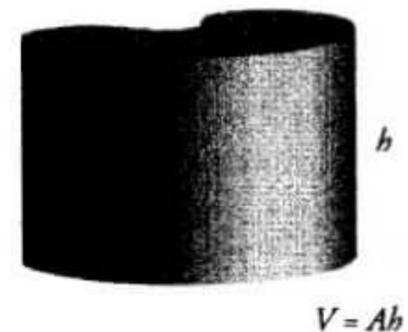
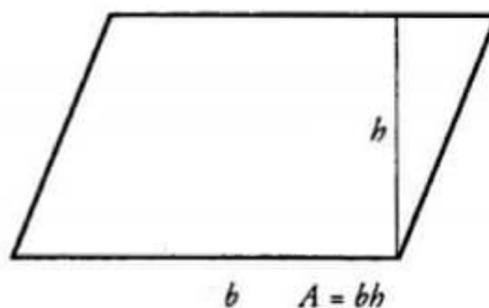
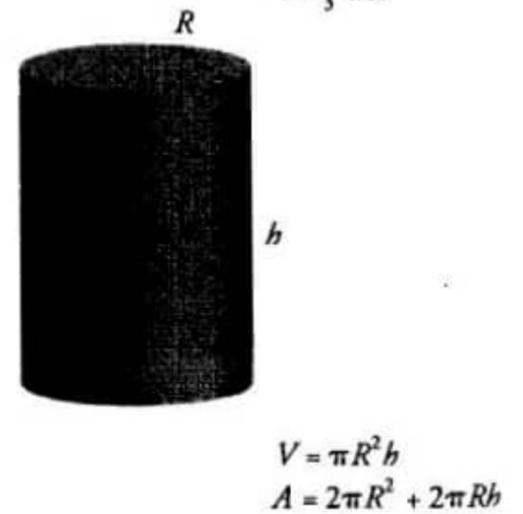
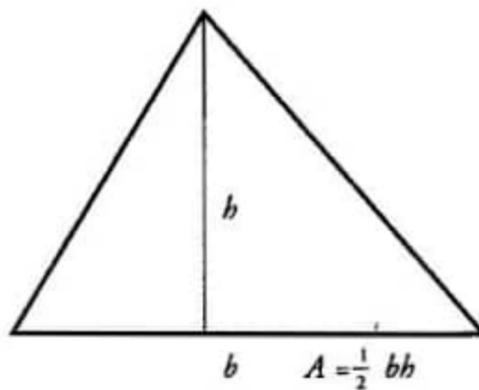
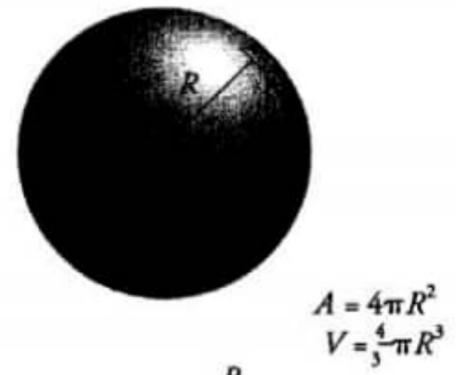
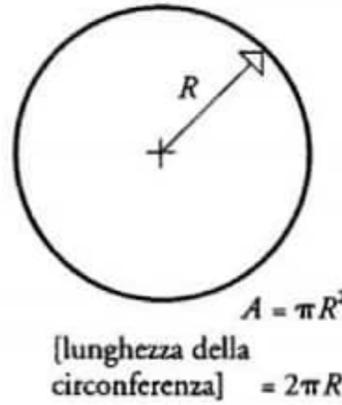
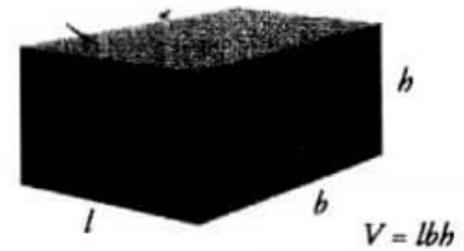
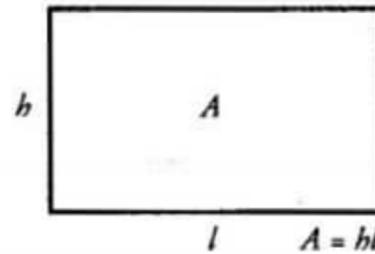


Figura B4

Appendice C Trigonometria

787 La figura C1a mostra un triangolo rettangolo con un angolo acuto θ e il cateto a adiacente a θ e il cateto b opposto a θ . Un particolare valore di θ fissa un insieme di triangoli, alcuni dei quali sono mostrati nella figura C1b. Anche se i triangoli sono diversi, i rapporti tra i lati in uno qualsiasi di essi sono uguali ai rapporti corrispondenti in tutti gli altri triangoli. In altre parole, il rapporto tra il cateto opposto a θ e il cateto adiacente a θ è lo stesso in ciascun triangolo ed è indicativo di θ . I vari rapporti possibili sono designati ciascuno con un nome e le calcolatrici elettroniche sono programmate per calcolarli. Conoscendo θ si può determinare ogni rapporto, e viceversa. Perciò,

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

Per esempio, per un angolo di 30° , il rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente sarà sempre 0,5774. Per determinarlo con una calcolatrice, prima ci si accerta che sia impostata nel modo *degree* (grado), poi si premono i tasti [3][0][tan]. Alternativamente, quando si conosce il rapporto si può trovare l'angolo premendo i tasti [0][.][5][7][7][4][tan⁻¹]. (La notazione \tan^{-1} , usata nei libri inglesi e sulle calcolatrice, equivale alla notazione arc tan usata nei libri italiani; $\text{arc tan } x$ designa l'angolo che ha x come tangente.)

Esaminando la figura C1a, si osserva che $\sin \theta = b/c = \cos \phi$ e che $\cos \theta = a/c = \sin \phi$; si badi a non confondere queste relazioni. Nella figura C1c, al

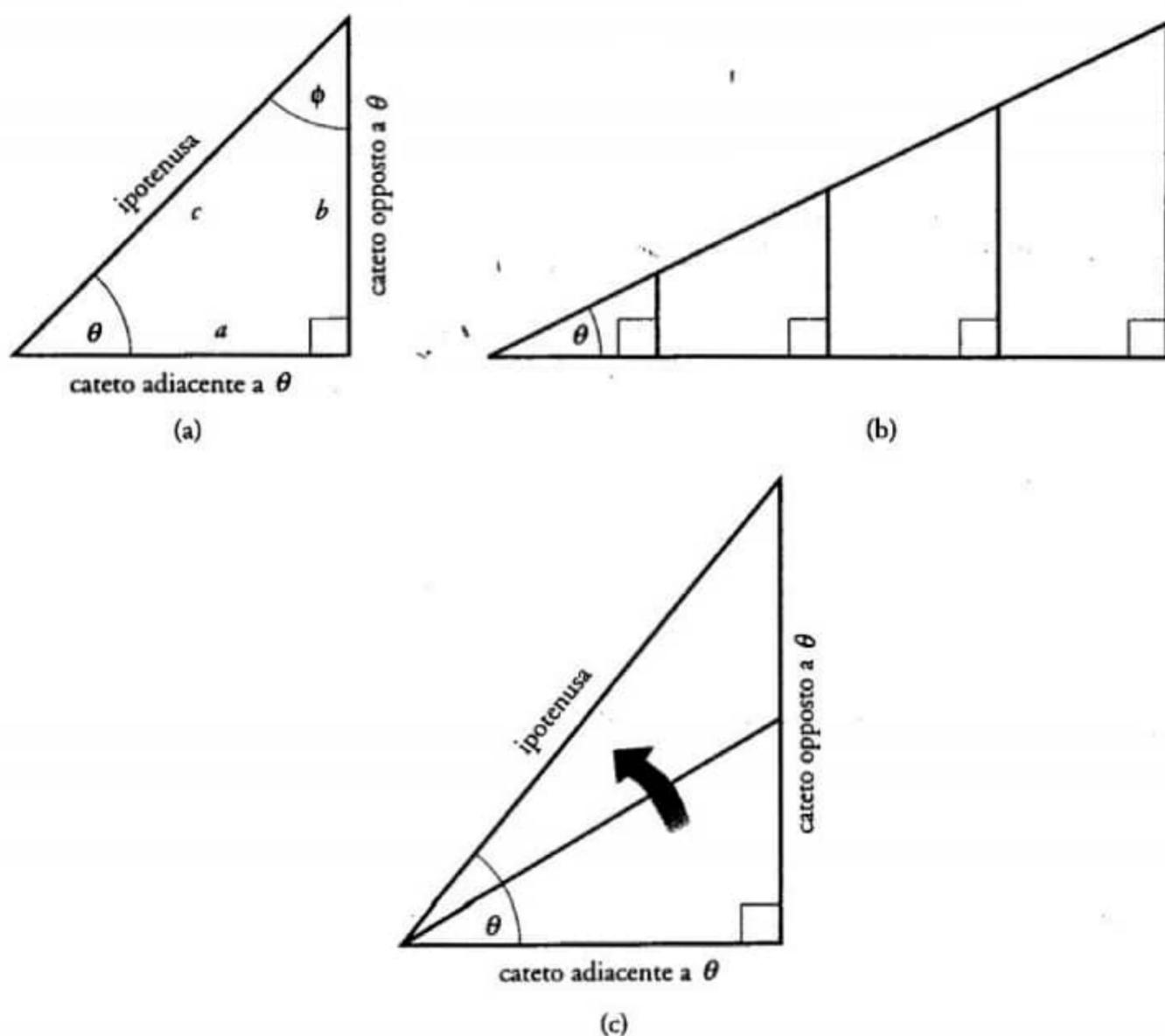


Figura C1

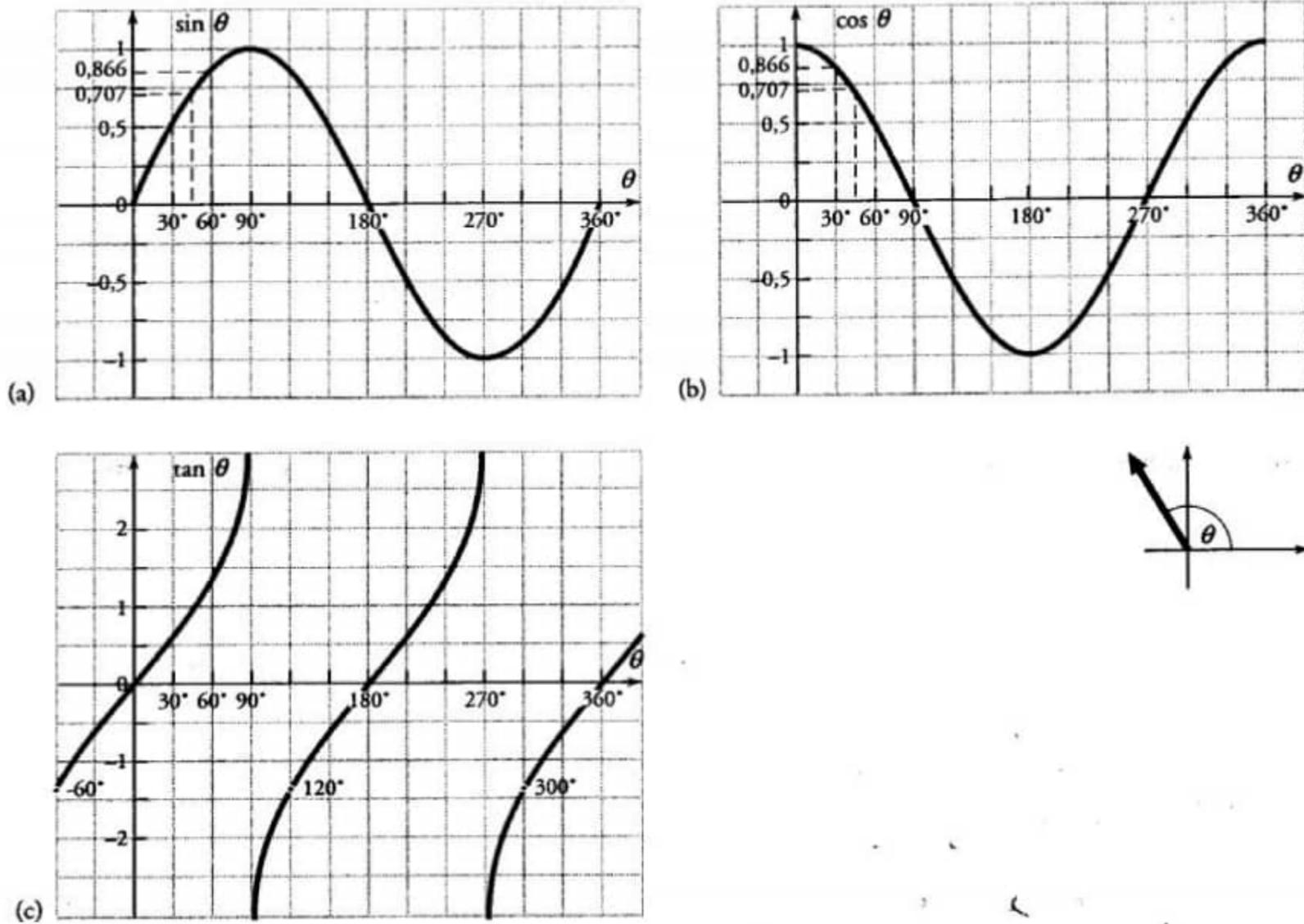


Figura C2

crescere di θ , mentre il cateto adiacente a rimane costante, crescono sia il cateto opposto a θ sia l'ipotenusa. Quando $\theta \approx 0$, $b \approx 0$, $a \approx c$, e quindi $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 1$ e $\tan \theta = 0$. Analogamente, quando $\theta \approx 90^\circ$, $c \approx b$ ed entrambi sono enormemente grandi. Così, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ e $\tan 90^\circ = 1$. Questi risultati sono riassunti nella figura C2, che fornisce $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\tan \theta$ per tutti i valori di θ compresi tra 0° e 360° .

Alcune relazioni utili sono

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

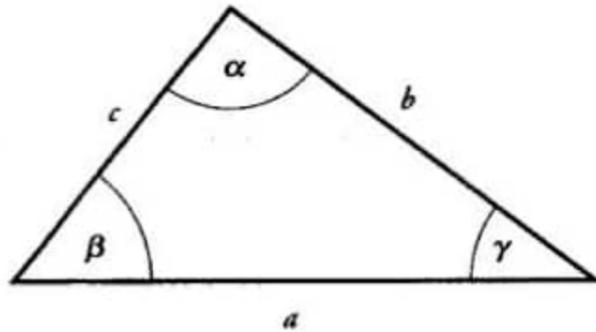


Figura C3

Per tutti i triangoli (figura C3)

[teorema dei seni]

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

[teorema del coseno
(teorema di Carnot)]

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Appendice D Vettori

[788] I vettori sono trattati in modo particolareggiato nel capitolo 2. Qui esamineremo alcune delle difficoltà che si incontrano spesso quando si ha a che fare con i vettori. La figura D1 mostra un vettore C in ciascun dei

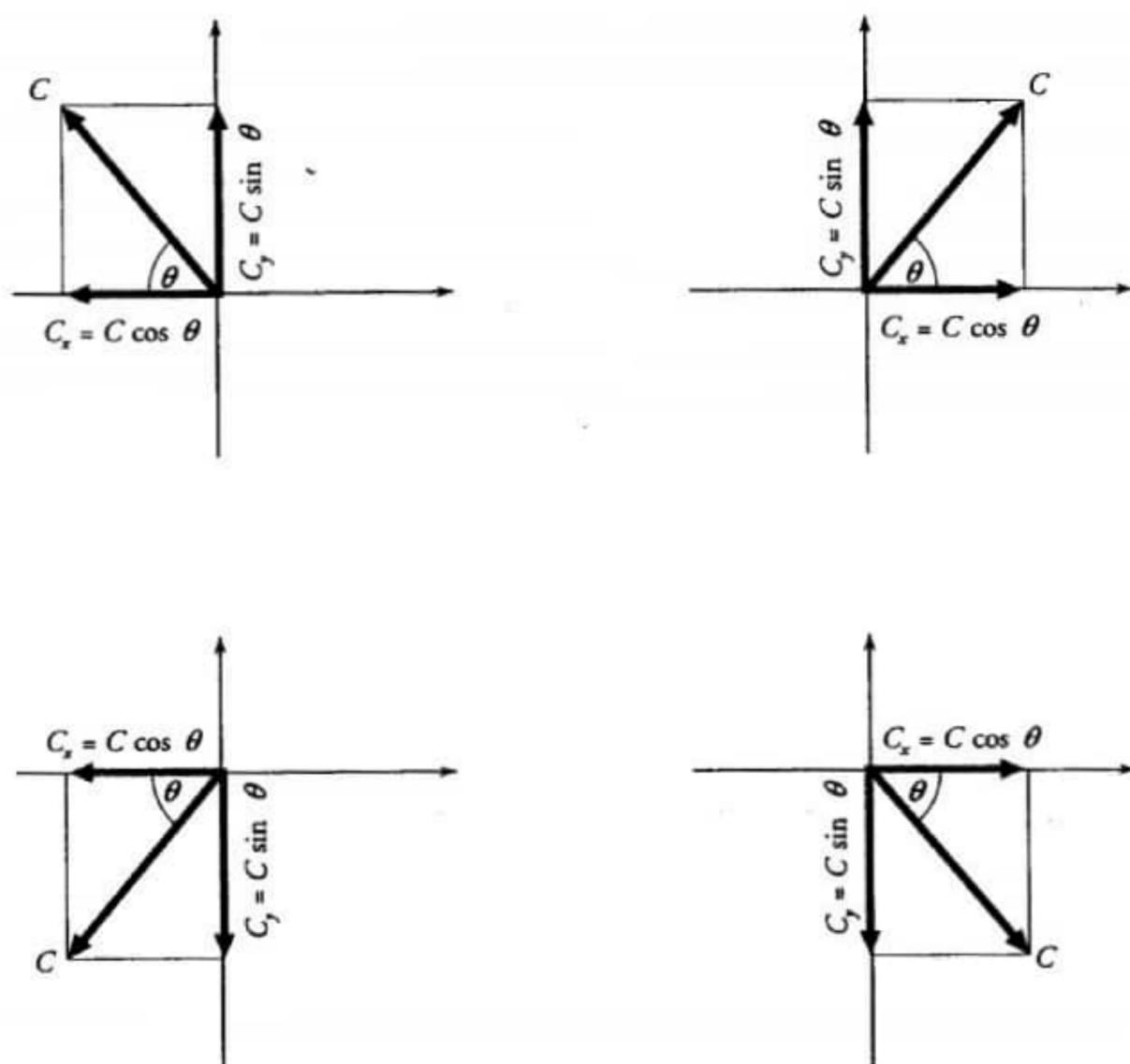


Figura D1

quattro quadranti e i corrispondenti (vettori) componenti x e y . In ciascun caso le (grandezze) componenti (ossia, i valori algebrici dei componenti) sono

$$C_x = C \cos \theta \quad \text{e} \quad C_y = C \sin \theta$$

dove l'angolo θ è misurato o al di sopra o al di sotto dell'asse x ed è sempre acuto. Ora supponiamo di sommare più vettori lungo l'asse x , ottenendo C_x , e di sommare più vettori lungo l'asse y , ottenendo C_y . Il passo successivo nella determinazione di C è usare la relazione $\tan \theta = C_y/C_x$ per trovare θ . È meglio scrivere la tangente trigonometrica nella forma $\tan \theta = |C_y|/|C_x|$, usando i valori assoluti delle componenti affinché $\tan \theta$ sia sempre positiva e θ sia sempre compreso tra 0° e 90° . La figura C2c è un diagramma di $\tan \theta$ in funzione di θ da 0° a 360° , dove θ è sempre misurato a partire dal semiasse x positivo. Perciò, $\text{arc tan}(-1,732)$ è sia 120° sia 300° , che giacciono nel secondo quadrante e nel quarto quadrante, rispettivamente, come ci si attende dalla figura. Una calcolatrice fornisce un'altra forma della risposta, cioè, -60° (equivalente a 300°). Trascura del tutto 120° , la qual cosa significa che, se si forma il rapporto delle componenti quando si determina la tangente e una di esse o entrambe sono negative, allora vi sarà una certa ambiguità nell'angolo che si ottiene. Per evitarla, si usa il rapporto dei valori assoluti e si determina in quale quadrante giace il risultante costruendo i componenti di valori algebrici C_x e C_y . Poi si misura $\theta < 90^\circ$ al di sopra o al di sotto dell'asse orizzontale, come nella figura D1.

Ora si vuole determinare analiticamente la somma, ossia il risultante, di due vettori A e B nelle quattro situazioni illustrate nella figura D2. In ciascun caso, si determinano $C_x = A_x + B_x$ e $C_y = A_y + B_y$. Poiché gli angoli sono compresi tra 0° e 90° , i seni e i coseni saranno positivi. Perciò, alle com-

ponenti lungo direzioni orientate opposte si devono assegnare segni positivi e negativi. Si attribuisce il segno positivo (+) a ogni componente lungo la direzione positiva dell'asse x o dell'asse y , e il segno negativo (-) a ogni componente lungo la direzione negativa dell'asse x o dell'asse y . Le espressioni appropriate sono indicate in ciascun caso nella figura D2.

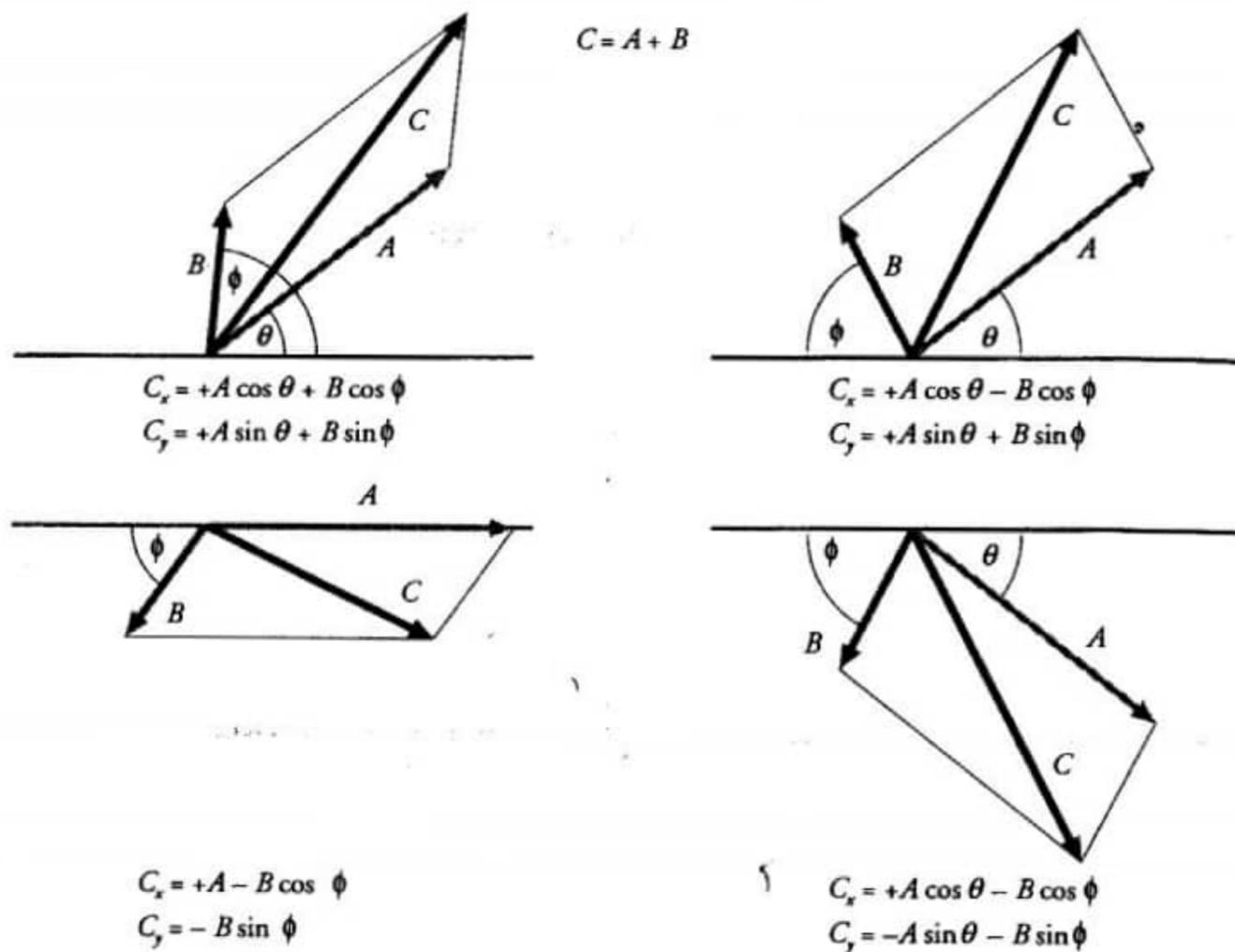


Figura D2

Appendice E Dimensioni

[789] Per determinare una distanza, un cammino percorso, ecc., si deve specificare l'unità di misura in cui deve essere misurato: metro (m), piede (ft), anno-luce (a.l.), ecc. Ma tutte queste misure hanno qualcosa in comune: sono tutte misure della stessa grandezza, la lunghezza, indipendentemente dall'unità di misura usata. In un sistema di unità di misura si scelgono alcune grandezze e le relative unità di misura come *fondamentali* e si derivano da esse, mediante relazioni di definizione, le unità di misura delle altre grandezze, dette *derivate*. Le *dimensioni* di ciascuna grandezza derivata sono quelle del prodotto delle grandezze fondamentali elevate ciascuna a un opportuno esponente; più esattamente, le *dimensioni* indicano questi esponenti, ciascuno dei quali può essere, secondo il caso, positivo, negativo o nullo. Una distanza ha le dimensioni di una lunghezza, o, più esattamente ha dimensione 1 rispetto alla lunghezza. La dimensione di una lunghezza è indicata con il simbolo [L]. Un'area è il prodotto di una lunghezza per una lunghezza e quindi ha le dimensioni [L][L] = [L²]; più esattamente, un'area ha dimensione 2 rispetto alla lunghezza. Si possono assegnare dimensioni a tutte le grandezze della meccanica assegnando le dimensioni della *lunghezza* [L], dell'*intervallo di tempo* [T] e della *massa* [M]. Per esempio la velocità, misurata in metri al secondo (m/s), o in chilometri all'ora (km/h), o in piedi al secondo (ft/s), ecc., ha le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo, ossia [L]/[T] = [L][T⁻¹]; più esattamente,

la velocità ha dimensione 1 rispetto alla lunghezza e dimensione -1 rispetto al tempo.

Il volume di una sfera di raggio R è $\frac{4}{3}\pi R^3$, mentre quello di un cubo di spigolo a è a^3 . Ciascuno è misurato, nel SI, in metri cubi (m^3) e ciascuno ha le dimensioni di un volume $[L^3]$; più esattamente ha dimensione 3 rispetto alla lunghezza. Ciò suggerisce che si può usare l'*analisi dimensionale*, con appropriate regole logiche, per verificare le equazioni che esprimono relazioni tra grandezze fisiche. A questo scopo, consideriamo l'equazione che rappresenta tre grandezze fisiche, A , B , C :

$$C = A + B$$

Si applicano tre regole. Prima regola: *le dimensioni si possono trattare come quantità algebriche*, ossia, si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere in conformità. Inoltre, A e B devono essere espressi nella stessa unità (fondamentale o derivata): non si possono sommare i secondi ai metri, per esempio. Seconda regola: *si possono addizionare o sottrarre soltanto le grandezze che hanno le stesse dimensioni*. Quale che possa essere, C deve avere le stesse dimensioni di $A + B$. Più in generale, la terza regola è la seguente: *le dimensioni di ciascuno dei due membri di un'uguaglianza devono essere le stesse*. Tutte le equazioni fisiche devono ubbidire a queste regole.

Se si trova un'espressione che ubbidisce a queste regole, essa può essere corretta; se non ubbidisce a queste regole, è certamente scorretta. Per esempio, nel capitolo 3 abbiamo trovato che lo spazio (il cammino) s percorso da un corpo che si muove inizialmente alla velocità v_0 dopo che ha accelerato a un'accelerazione costante a per un intervallo di tempo t è dato da $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Sapendo che le dimensioni della velocità sono $[L][T^{-1}]$ e le dimensioni dell'accelerazione sono $[L][T^{-2}]$, applichiamo l'analisi dimensionale. L'equazione dimensionale corrispondente all'equazione $s = v_0 t + a t^2$ è

$$[L] = [L][T^{-1}][T] + [L][T^{-2}][T^2]$$

Quando si elimina il tempo nel secondo membro, si vede che l'equazione ubbidisce alla seconda regola poiché ogni termine ha le dimensioni di una lunghezza, $[L]$. E ubbidisce anche alla prima regola. Conclusione: l'equazione può essere corretta.

Appendice F Analisi matematica

F.1. La derivata

[790] La fisica è lo studio della variazione nell'Universo fisico, e l'*analisi matematica* è la matematica della variazione. Ogni evento, ogni processo fisico, che è descritto mediante uno o più parametri, varierà in un modo particolare quando variano uno o più di quei parametri. Tale descrizione matematica è detta funzione, e l'analisi matematica studia come variano le funzioni.

Una **funzione**, denotata con il simbolo f , è un procedimento logico, incorporato in un'espressione matematica, che fornisce un particolare valore «d'uscita» associato a ciascun valore «d'entrata» di una qualche quantità da cui f dipende. La funzione f dipende da una quantità variabile x , che è

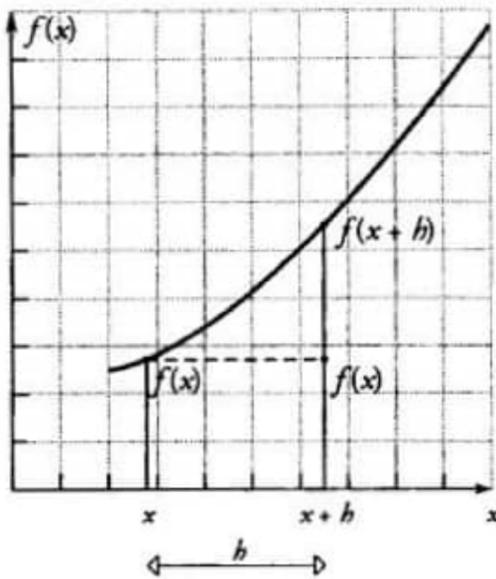


Figura F1

«l'entrata» (*input*) ossia la variabile indipendente; per ciascun valore di x esiste un e soltanto un valore di f , «l'uscita» (*output*). La funzione, $f(x)$, potrebbe essere un'espressione che dà la massa di un pollo in funzione della dimensione dei suoi piedi (x), oppure il cammino che un'automobile è capace di percorrere in funzione del volume del suo serbatoio del carburante.

La figura F1 mostra una porzione di un diagramma (o grafico) di una funzione rappresentativa, $f(x)$, della variabile x . La funzione ha il valore $f(x)$ in corrispondenza di x , e quando la variabile varia diventando $(x+h)$, la funzione diventa $f(x+h)$. Tra i valori x e $(x+h)$ la curva sale di una quantità $f(x+h) - f(x)$, che rappresenta l'*incremento della funzione*. Esso avviene in corrispondenza dell'*incremento della variabile indipendente*: $(x+h) - x = h$. Il rapporto fra l'incremento della funzione e l'incremento della variabile indipendente,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è detto *rapporto incrementale* e corrisponde al coefficiente angolare (alla pendenza) della retta passante per i due punti $[x, f(x)]$ e $[(x+h), f(x+h)]$. Al decrescere di h , l'intervallo decresce e la retta si avvicina sempre più alla tangente alla curva nel punto $[x, f(x)]$. Quel particolare valore a cui il rapporto incrementale tende (si avvicina) quando $h \rightarrow 0$ è il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto $[x, f(x)]$. È detto *derivata* di $f(x)$ ed è denotato simbolicamente con df/dx , dove

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{F.1})$$

La derivata è la rapidità di variazione istantanea di $f(x)$ rispetto a x . (La notazione df/dx si legge «di effe su di x».) La derivata dice come varia una funzione quando varia la variabile da cui dipende. In fisica una funzione descrive di solito una grandezza fisica, per esempio la velocità di un razzo o la massa di acqua in un recipiente, e la variabile potrebbe essere la spinta del motore o il diametro di un foro nella parete del recipiente. Una variazione della spinta fa variare la velocità in modo ben definito che si può determinare con l'analisi matematica. La variabile, che abbiamo chiamato semplicemente x , potrebbe essere *qualsiasi* parametro fisico da cui dipende il processo: lunghezza, tempo, massa, velocità, massa volumica, differenza di potenziale, e così via.

Le derivate si calcolano direttamente mediante l'equazione (F.1), ma, di solito, si mandano a memoria e si applicano semplicemente uno o più dei seguenti procedimenti.

Derivata di una costante

[791] Se f è una funzione costante, $f(x) = C$, allora $df/dx = 0$; *la derivata di una costante è zero*. La rapidità di variazione di una costante è nulla.

Derivata di una potenza

[792] Se $f(x) = x^n$, dove n è un numero reale *arbitrario*,

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1} \quad (\text{F.2})$$

Per esempio, la derivata di $f(x) = x^3$ rispetto a x è $df/dx = 3x^2$.

Derivata del prodotto di due funzioni

793 La derivata del prodotto di due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$ è data da

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx} \quad (\text{F.3})$$

Quando una delle funzioni nell'equazione (F.3) è una costante C , poiché $dC/dx = 0$,

$$\frac{d}{dx} [Cf(x)] = C \frac{df}{dx} \quad (\text{F.4})$$

Per esempio, data la funzione $h(x) = 3x^3$, si determini dh/dx . Per applicare la regola di derivazione di un prodotto, assumiamo $f = 3$ e $g = x^3$ e, quindi, $dh/dx = (x^3)(0) + 3(3x^2) = 9x^2$. Come esempio un po' più complicato, si determini dh/dx quando $h(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 2x)$. Siano $f(x) = (x^2 - 1)$ e $g(x) = (3x^3 + 2x)$, da cui consegue che $dh/dx = (3x^3 + 2x)(2x) + (x^2 - 1)(9x^2 + 2)$. È importante notare che *la derivata del prodotto di solito non è uguale al prodotto delle derivate*.

Derivata di una somma di funzioni

794 Date due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$, la derivata della loro somma è data dalla somma delle loro derivate, cioè,

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad (\text{F.5})$$

Regola di derivazione di una funzione di funzione

795 Se f è una funzione derivabile di u e u è una funzione derivabile di x , allora

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} \quad (\text{F.6})$$

Questa relazione è particolarmente importante quando si ha a che fare con grandezze interdipendenti come la velocità ($v = dx/dt$) e l'accelerazione ($a = dv/dt$), nel qual caso

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \quad (\text{F.7})$$

Derivata di una potenza di una funzione

796 Se n è un numero reale arbitrario e $u = f(x)$ è derivabile, allora

$$\frac{d}{dx} (u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad (\text{F.8})$$

Per esempio, se vogliamo la derivata di

$$y = (x^3 - 1)^2,$$

assumiamo

$$u = (x^3 - 1),$$

nel qual caso

$$n = 2 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^3 - 1)^2 = 2(x^3 - 1)3x^2 = 6x^2(x^3 - 1).$$

Alcune derivate comuni

$$\boxed{797} \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (\text{F.9})$$

Più in generale, quando l'argomento della funzione seno è esso stesso una certa funzione derivabile $f(x)$,

$$\frac{d}{dx} [\sin f(x)] = [\cos f(x)] \frac{df}{dx} \quad (\text{F.10})$$

o, ciò che è equivalente, usando $u = f(x)$,

$$\frac{d}{dx} [\sin u] = [\cos u] \frac{du}{dx}$$

Per esempio, quando $\omega = [\text{costante}]$, la derivata di $\sin \omega t$ rispetto a t è

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = (\cos \omega t) \frac{d}{dt} \omega t = \omega \cos \omega t.$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (\text{F.11})$$

Più in generale, quando l'argomento della funzione coseno è esso stesso una funzione derivabile $f(x)$;

$$\frac{d}{dx} [\cos f(x)] = [-\sin f(x)] \frac{df}{dx} \quad (\text{F.12})$$

o, ciò che è equivalente, usando $u = f(x)$,

$$\frac{d}{dx} [\cos u] = [-\sin u] \frac{du}{dx}$$

Poiché $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{F.13})$$

La caratteristica distintiva della funzione e^x è il fatto che il coefficiente angolare della curva rappresentativa di e^x è uguale a e^x , cioè,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (\text{F.14})$$

Più in generale, quando $u = g(x)$ è una funzione derivabile,

$$\frac{d}{dx} e^{[g(x)]} = e^{[g(x)]} \frac{d}{dx} g(x) \quad (\text{F.15})$$

ossia

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{d}{dx} u$$

Per esempio,

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx} x^2 = 2xe^{x^2}$$

La derivata di un logaritmo naturale è

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (\text{F.16})$$

Più in generale, quando $u = g(x)$ è una funzione derivabile,

$$\frac{d}{dx} \ln [g(x)] = \frac{1}{g(x)} \frac{d}{dx} g(x) \quad (\text{F.17})$$

ossia

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{d}{dx} u \quad (\text{F.18})$$

Per esempio,

$$\frac{d}{dx} \ln x^2 = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$$

Differenziali

[798] Data la funzione $y = f(x)$, si può considerare che dy/dx sia una singola entità, la derivata di y rispetto a x , derivata che è essa stessa una funzione di x . Perciò, sia $dy/dx = F(x)$. Nello spirito del rapporto incrementale considerato precedentemente, la derivata può anche essere interpretata come un rapporto di due piccole quantità dette **differenziali**, dove

$$dy = F(x) dx$$

e dx è una variabile indipendente, mentre dy è una variabile dipendente. Di conseguenza, dy è la variazione di y che si produce quando x subisce una corrispondente variazione dx . Per esempio, se $y = f(x) = x^3$, allora $dy/dx = F(x) = 3x^2$ e $dy = 3x^2 dx$.

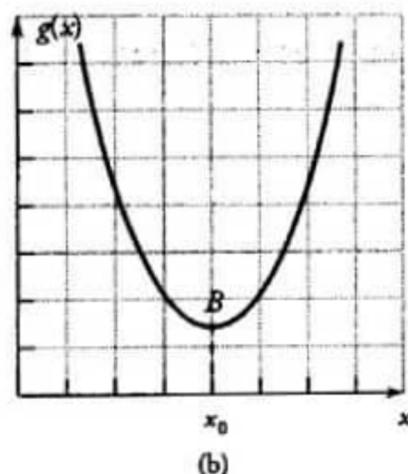
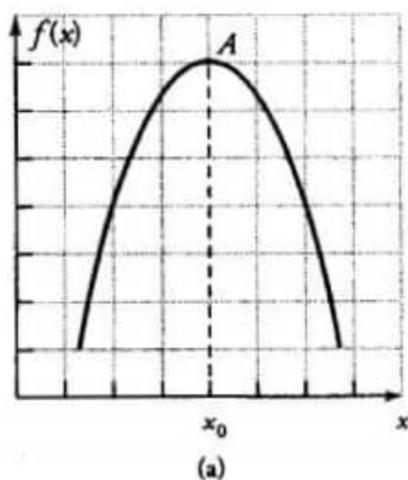


Figura F2

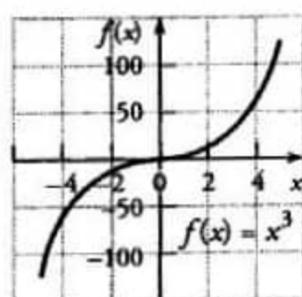


Figura F3

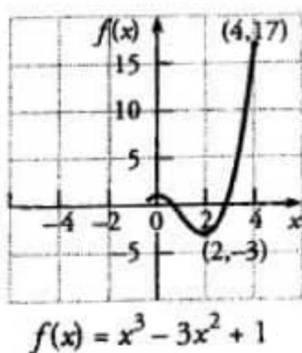


Figura F4

Derivata seconda

[799] Il procedimento di derivazione può essere proseguito oltre la derivata prima, fino alla derivata seconda, terza, quarta, e così via, semplicemente formando le derivate successive. Ogni derivazione produce una nuova funzione di cui si può calcolare la derivata. Perciò, la derivata seconda è

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (\text{F.19})$$

Per esempio, data la funzione $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1$, la derivata prima è $df/dx = 3x^2 - 14x$ e la derivata seconda è $d^2f/dx^2 = 6x - 14$. Avremo pochi motivi per andare oltre la derivata seconda, anche se la derivata terza del cammino percorso in funzione del tempo ha realmente significato fisico.

Massimi e minimi

[800] Nel punto A nella figura F2a la curva rappresentativa di $f(x)$ è più alta che in qualsiasi punto nell'intorno di A; si dice che quella funzione ha un *valore massimo* (un *massimo*) in $x = x_0$, detto *punto di massimo*. Analogamente, nel punto B nella figura F2b la curva rappresentativa di $g(x)$ ha un *valore minimo* (un *minimo*) in $x = x_0$, detto *punto di minimo*. Entrambi i punti, detti *estremi della funzione*, hanno in comune la caratteristica che la tangente alla curva in corrispondenza di x_0 (detto *valore estremante* della variabile indipendente x) è orizzontale. Ne consegue che, se $f(x)$ ha un estremo in x_0 e se la derivata di $f(x)$ valutata in $x = x_0$, cioè $[df/dx]_{x=x_0}$, esiste, allora $[df/dx]_{x=x_0} = 0$. Il coefficiente angolare della curva è zero negli estremi. La condizione che esista la derivata è dovuta al fatto che una funzione può avere un estremo in un punto ed essere priva di derivata in questo punto, come nel caso di $f(x) = |x|$, che ha un minimo in $x = 0$, ma ivi è priva di derivata.

Una funzione può anche avere una tangente orizzontale, $[df/dx]_{x=x_0} = 0$, in un punto, e tuttavia non avere un massimo o un minimo in quel punto (figura F3). La funzione $f(x) = x^3$ ha coefficiente angolare zero in $x = 0$, ma in questo punto (detto *punto di stazionarietà* o *punto stazionario*) ha un *punto di flesso* (o *punto di inflessione* o semplicemente *flesso*), in cui il coefficiente angolare da crescente diventa decrescente (o viceversa) al crescere di x .

La funzione

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

è rappresentata nella figura F4. Per determinare i suoi estremi (a) si forma la derivata, (b) la si uguaglia a zero, (c) si risolve l'equazione così ottenuta per trovare i valori di x che rendono nulla la derivata e (d) si verificano i valori di $f(x)$ nei punti estremi dell'intervallo di definizione (*dominio di definizione* della funzione) per vedere se in questi punti la funzione abbia un massimo o un minimo. Perciò, per la funzione in questione, (a) $df/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, (b) $3x(x - 2) = 0$ e quindi (c) la funzione ha estremi in $x = 0$ e in $x = 2$. Il punto $x = 0$, in cui $f(x) = 1$, corrisponde a un *massimo relativo* (o *locale*). Il *massimo assoluto*, che è il massimo valore di $f(x)$ nell'intervallo di definizione, si ha nel punto estremo $x = 4$, in cui, sostituendo in $f(x)$, si ottiene che $f(4) = 17$. Il *minimo assoluto* si ha in $x = 2$.

Da un diagramma di $f(x)$ risulta evidente dove sono i massimi e i minimi, ma non sempre può essere disponibile un diagramma. Per ottenere lo stesso risultato analiticamente, si deve esaminare come varia il coefficiente angolare. Se il coefficiente angolare della curva, df/dx , decresce, passando da valori positivi a valori negativi quando x cresce passando per x_0 , allora $f(x_0)$ è un massimo. Analogamente, se il coefficiente angolare cresce, passando da valori negativi a valori positivi quando x cresce passando per x_0 , allora $f(x_0)$ è un minimo. Ciò equivale a dire che, se $d^2f/dx^2 < 0$ in $x = x_0$, allora $f(x_0)$ è un massimo e, se $d^2f/dx^2 > 0$ in $x = x_0$, allora $f(x_0)$ è un minimo. (Questo procedimento cessa di essere valido quando la derivata seconda è uguale a zero.) Nell'esempio precedente, $df/dx = 3x^2 - 6x$ e $d^2f/dx^2 = 6x - 6$. Nel punto estremante $x = 0$, $d^2f/dx^2 = -6$ e, quindi, la funzione ha un massimo in $x = 0$. Nell'altro punto estremante, $x = 2$, $d^2f/dx^2 = +6$ e la funzione ha un minimo in $x = 2$.

Derivate parziali

[801] Se f è una funzione di due variabili x e y , cioè $f(x, y)$, la **derivata parziale** del primo ordine di $f(x, y)$ rispetto a x si indica con la notazione $\partial f/\partial x$. Essa rappresenta la rapidità di variazione di f al variare di x e si trova mantenendo costante y e formando la derivata di $f(x, y)$ rispetto a x . Analogamente, $\partial f/\partial y$ si trova mantenendo costante x e formando la derivata di $f(x, y)$ rispetto a y . Per esempio, data la funzione $f(x, y) = 3x^2 - xy$, $\partial f/\partial x = 6x - y$, mentre $\partial f/\partial y = -x$.

F.2. L'integrale

[802] In analisi matematica, il concetto di integrazione ha due significati diversi, ma in reciproca relazione. Uno ha a che fare con la determinazione della somma o del totale di qualcosa, come l'area della regione sottesa da una curva o il volume di una figura tridimensionale o la lunghezza di un cammino. L'altro ha a che fare con il procedimento di trovare una funzione partendo dalla sua derivata. I due concetti di integrazione vengono distinti come *integrazione definita* e *integrazione indefinita*, rispettivamente. Ci occuperemo prima di quest'ultima e, dopo averle considerate entrambe, mostreremo la loro intima relazione.

Funzioni primitive

[803] Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ e la sua derivata $F(x) = df/dx$. La funzione $f(x)$ è detta **funzione primitiva** (o semplicemente **primitiva** o «antiderivata») di $F(x)$ e si può determinare percorrendo a ritroso i procedimenti che hanno condotto alla derivata. Per calcolare una primitiva, si può usare ciascuna delle regole precedenti per formare la derivata, dove è appropriata; ovviamente, se $F(x)$ è una funzione seno o coseno si usa l'equazione (F.12) o (F.10), e così via. Per esempio, quando $f(x) = x^n$, sappiamo che

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} = F(x) \quad (\text{F.2})$$

e, quindi, se abbiamo $F(x)$ nella forma x^N , ne consegue che $N = n - 1$. Dividendo $F(x)$ per $n = (N + 1)$, otteniamo x^{n-1} e, aumentando di 1 l'espo-

nente, riotteniamo $f(x) = x^n$, la primitiva. Per esempio, data $F(x) = 3x^2 = df/dx$, otteniamo $N = 2 = n - 1$; perciò, $n = 3$ e la primitiva è $f(x) = x^3$.

È importante notare che, essendo zero la derivata di una costante, $f(x) = x^2 + 5$ e $f(x) = x^2 - 12$ hanno entrambe la stessa derivata, cioè $F(x) = 2x$. Ciò significa che la primitiva non è unica e, nel migliore dei casi, si riesce a determinarla a meno di una costante additiva C . In questo caso particolare, la primitiva è, quindi, $f(x) = 2x + C$. La costante C , che deve essere inclusa nella primitiva, si può determinare quando si conoscono le condizioni iniziali appropriate del problema.

Integrale indefinito

[804] La primitiva $f(x)$ è detta **integrale indefinito** di $F(x)$. *L'integrale indefinito è generalmente una funzione della variabile indipendente e si può scrivere come*

$$f(x) = \int F(x) dx \quad (\text{F.20})$$

L'equazione (F.20) significa semplicemente che $df/dx = F(x)$ e, quindi,

$$\frac{d}{dx} \left[\int F(x) dx \right] = F(x) \quad (\text{F.21})$$

la derivazione è l'operazione inversa dell'integrazione, e viceversa.

È utile considerare $df/dx = F(x)$ sotto forma di differenziale, cioè,

$$df(x) = F(x) dx$$

Integrando entrambi i membri, otteniamo

$$\int df(x) = \int F(x) dx$$

Qui dobbiamo stare attenti poiché *la primitiva (l'integrale indefinito) non è unica e*

$$\int df(x) = f(x) + C$$

In generale,

$$\int du = u + C$$

L'integrazione del differenziale di una funzione dà la funzione più una costante arbitraria. Per esempio, data $dy/dx = 3x^2$, $dy = 3x^2 dx$, ma $dy = d(x^3) = 3x^2 dx$. Quindi,

$$y = \int dy = \int d(x^3) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Dall'equazione (F.4) consegue che, se K è una costante arbitraria,

$$\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx \quad (\text{F.22})$$

Soltanto le costanti si possono portare fuori del segno di integrazione.

Analogamente, dall'equazione (E.5) consegue che

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (\text{E.23})$$

Alcuni integrali indefiniti

805

$$\begin{aligned} \int K dx &= Kx + C & \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\ \int x^{-1} dx &= \ln |x| + C & \int \sin Kx dx &= -\frac{\cos Kx}{K} + C \\ \int \cos Kx dx &= \frac{\sin Kx}{K} + C & \int e^{Kx} dx &= \frac{1}{K} e^{Kx} + C \\ \int e^{-Kx} dx &= -\frac{1}{K} e^{-Kx} + C & \int xe^{-Kx} dx &= -\frac{1}{K^2} (Kx + 1)e^{-Kx} + C \\ \int \frac{1}{x^2 + K^2} dx &= \frac{1}{K} \arctan \left(\frac{x}{K} \right) + C & \int \frac{1}{\sqrt{K^2 - x^2}} dx &= \arcsin \left(\frac{x}{K} \right) + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{K^2 + x^2}} dx &= \ln(x + \sqrt{K^2 + x^2}) + C & \int \frac{1}{\sqrt{K^2 + x^2}} dx &= \sqrt{K^2 + x^2} + C \\ \int \frac{x}{(K^2 + x^2)^{3/2}} dx &= -\frac{1}{\sqrt{K^2 + x^2}} + C & \int \frac{K^2}{(K^2 + x^2)^{3/2}} dx &= \frac{x}{\sqrt{K^2 + x^2}} + C \end{aligned}$$

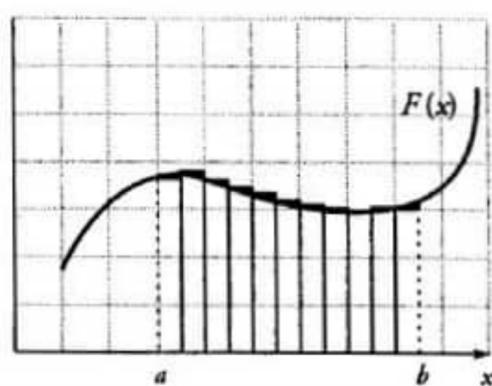
Condizioni iniziali

806 La costante arbitraria C (*costante di integrazione*) presente dopo l'integrazione indefinita si può determinare univocamente usando qualsiasi vincolo che possa esistere sulla funzione, purché tali informazioni siano disponibili. Questi vincoli sono detti **condizioni iniziali** e questa terminologia è particolarmente appropriata nelle situazioni fisiche in cui si potrebbe conoscere, per esempio, la posizione o la velocità iniziale di un corpo o la carica iniziale di un condensatore.

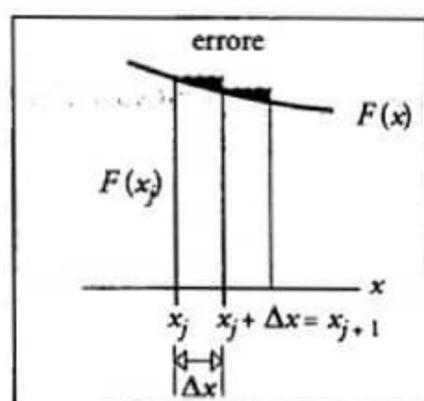
Come esempio, determiniamo la funzione la cui curva rappresentativa ha coefficiente angolare $3x^2$ nel punto (x, y) , con la condizione che la curva passi per il punto $(2, 0)$. Esiste un'intera famiglia di curve che hanno quel coefficiente angolare, ma soltanto una di esse passa per il punto $(2, 0)$ e questa è la condizione iniziale che distingue la particolare funzione e stabilisce il valore di C . Data $dy/dx = 3x^2$, $dy = 3x^2 dx$; integrando entrambi i membri, otteniamo

$$\int dy = \int 3x^2 dx$$

e $y = x^3 + C$, dove in C sono state riunite le due costanti arbitrarie, provenienti una da ciascuna integrazione. Ma è dato che $y = 0$ quando $x = 2$, la qual cosa significa che $C = -8$ e, quindi, la funzione desiderata è $y(x) = x^3 - 8$.



(a)



(b)

Figura F5

Integrale definito

807 Storicamente, il calcolo differenziale nacque con il problema di determinare la tangente a una curva e, usando il concetto di limite, giunse alla derivata. Il calcolo integrale, invece, nacque con il problema di trovare l'area della regione sottesa da una curva e, usando il concetto di limite, giunse all'integrale definito (vedi paragrafo 58).

Consideriamo l'area della regione sottesa dalla curva rappresentativa della funzione $F(x)$, limitata dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$, come è illustrato nella figura F5. Dividiamo la regione in n elementi rettangolari stretti, ciascuno di larghezza Δx e di altezza determinata dal valore di $F(x)$ nel punto di ascissa x_j . Quindi, l'area dell' j -esimo rettangolo è $A_j = F(x_j) \Delta x$ e l'area totale è la somma di tutti questi contributi, cioè $\sum_{j=1}^n F(x_j) \Delta x$. Maggiore è il numero di elementi rettangolari, meglio la somma approssima l'area. Se ora $n \rightarrow \infty$ per $\Delta x \rightarrow 0$, il valore limite della somma è esattamente uguale all'area della regione, e questo valore limite è detto **integrale definito**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n F(x_j) \Delta x = \int_a^b F(x) dx$$

Questa definizione, insieme alla definizione di primitiva (integrale indefinito) fornisce un metodo facile per valutare gli integrali definiti senza usare i limiti di somme.

Dato che $F(x)$ è continua nell'intervallo da $x = a$ a $x = b$ e che $f(x)$ è la sua primitiva, ne consegue che

$$\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) \quad (\text{F.24})$$

Sostituendo i valori estremi $x = b$ e $x = a$ in $f(x)$, otteniamo $f(b)$ e $f(a)$. Questo è il **teorema fondamentale del calcolo infinitesimale**, così chiamato poiché unisce il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Per calcolare l'integrale definito di $F(x)$ è sufficiente formare la differenza fra il valore della primitiva (dell'integrale indefinito) di $F(x)$ valutato nell'estremo (o limite) superiore e il valore valutato nell'estremo (o limite) inferiore. Per esempio,

$$\int_1^4 2x dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_1^4 = 4^2 - 1^2 = 15$$

dove le costanti C che compaiono nella primitiva (integrale indefinito) si eliminano sempre e, quindi, non ci si deve dare la pena di scriverle. Generalmente, **l'integrale definito dà un valore numerico e non una funzione.**

Estremi di integrazione e integrale indefinito

808 In fisica, in cui spesso si conoscono le condizioni iniziali di un problema, è molto comune specificare, almeno in parte, gli estremi (o limiti) dell'integrazione indefinita in un modo che tenga conto automaticamente di C . Per esempio, determiniamo ancora una volta la funzione la cui curva rappresentativa ha coefficiente angolare $3x^2$ nel punto $(x, y) = (2, 0)$. Questa volta stabiliamo gli estremi inferiori di integrazione nelle condizioni iniziali note. Quando x ha il valore iniziale $x_0 = 2$, il corrispondente valore iniziale di y è $y_0 = 0$. Analogamente, se l'estremo (o limite) superiore di x non ha un valore particolare, corrispondentemente y non è specificata e,

quindi, possiamo scrivere gli integrali indefiniti come

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x 3x^2 dx$$

o, più in particolare,

$$\int_0^y dy = \int_2^x 3x^2 dx$$

Otteniamo così

$$y - y_0 = x^3 \Big|_{x_0}^x \quad (\text{F.25})$$

e

$$y - 0 = x^3 \Big|_2^x = x^3 - 8 \quad (\text{F.26})$$

che è identica alla funzione determinata precedentemente.

Confrontiamo questo procedimento, in cui sono stati usati gli estremi di integrazione, con quello descritto precedentemente, che ha dato una costante di integrazione C . Ciascuna integrazione indefinita produce una costante siffatta. L'integrale nel primo membro è $\int dy = y + C_1$. Confrontando il secondo membro di questa equazione con il primo membro delle equazioni (F.25) e (F.26), otteniamo che $C_1 = -y_0 = 0$. L'integrale nel secondo membro è $\int 3x^2 dx = x^3 + C_2$, e $C_2 = -(x_0)^3 = -(2)^3 = -8$. Riunendo le due costanti di integrazione in un'unica costante, otteniamo $y = x^3 + C$, dove $C = y_0 - (x_0)^3 = -8$, e $y = x^3 - 8$. I due metodi sono equivalenti.

Valore medio di una funzione

809 Il valore medio di una funzione continua arbitraria $f(x)$ nell'intervallo da $x = a$ a $x = b$ è dato da

$$f_{\text{medio}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (\text{F.27})$$

Spesso il valore medio di una funzione viene valutato rispetto al tempo e la variabile indipendente (x) diventa t , ma esistono anche situazioni in cui il valore medio di una funzione deve essere valutato rispetto a una lunghezza, a un'area o a un volume di spazio.