Raccolta di esercizi svolti di Fisica per i CdS in CTF, Farmacia e SPES

Versione provvisoria - Ultimo aggiornamento: 18 maggio 2018

Prefazione[1]

Il presente documento è stato pensato come un tramite tra una raccolta di esercizi, come quelli su cui tipicamente ci si esercita in preparazione all'esame, e la teoria necessaria a risolverli, come la si può trovare in un libro di Fisica generale, di modo da risultare il più possibile *conciso* ed *autosufficiente* per la propria preparazione. Gli esercizi sono stati scelti per lo più in modo da risultare *facili*, adeguatamente per un corso di studi non specialistico nella materia, *educativi*, per essere utili anche fuori e nel proseguo degli studi, ed *interessanti*. A tal scopo le situazioni affrontate riguardano spesso "problemi domestici", come nell'Esercizio 8 sulla pioggia, l'Esercizio 40 sulla temperatura che c'è d'estate in soffitta o l'Esercizio 48 su una tipica situazione in un appartamento di studenti. In altri casi vengono spiegate con gli strumenti forniti dalla Fisica alcune curiosità, come di nuovo nell'Esercizio 8, nell'Esercizio 13 riguardo ad un canto dell'Odissea, l'Esercizio 39 sulla cottura della pasta, o nell'Esercizio 32 sul volo degli aerei e sulla forma delle auto da corsa. Ciò non ha consentito di evitare (purtroppo!) di proporre anche alcuni esercizi "propedeutici e basta", senza alcun riferimento a situazioni di particolare interesse, e con la sola funzione di "esercizio" per affinare le proprie capacità e consolidare le tecniche apprese. Sempre per mantenere un livello accessibile anche a coloro non i possesso di una preparazione di Matematica avanzata, è stato limitato al minimo l'utilizzo di *integrali* e *derivate*, ad eccezione che negli Esercizio 20 e Esercizio 36, dove però ho cercato di rendere la cosa meno traumatica possibile, descrivendo diverse analogie algebriche e geometriche per facilitare la comprensione del significato dell'operazione di integrazione. Ciò non toglie che lo strumento matematico corretto col quale descrivere situazioni fisiche è quello dato dal calcolo differenziale, con integrali, derivate ed equazioni differenziali.

A parte una selezione "classica" di esercizi di Cinematica e Dinamica, è stato dato largo spazio a problemi riguardanti i *fluidi*, poiché più frequenti nella vita di tutti i gironi e nella pratica del laboratorio, e perché decisamente più interessanti delle "palline che cadono". Anche alla parte di calorimetria è stato dato grande risalto poiché estremamente comune in ambito domestico. Al momento la parte di elettromagnetismo è alquanto carente; cercherò di aggiornarla il prima possibile.

Parte dei testi degli esercizi sono stati presi da compiti e compitini proposti dal Professor Cervelli per il CdS in Farmacia negli anni accademici 2016/2017 e 2017/2018. Gli altri sono stati ispirati da vicende di vita vissuta, da esercizi a ma proposti sia dagli insegnanti e colleghi che ho avuto sia dai miei studenti, o provengono da ruberie varie da altre fonti delle quali però non ricordo. I disegni ed i grafici qui inclusi sono stati tutti realizzati da me, ad eccezione di: l'illustrazione di Sir John Tenniel per il libro *Alice in Wonderland*, resa disponibile libera da copyright da The Public Domain Review, dalla quale è stata tratta l'immagine di copertina, l'immagine della galassia di Andromeda di Adam Evans, rilasciata sotto licenza CC BY-NC-ND-4.0, sempre usata in copertina, l'immagine del "fachiro" usata nell'Esercizio 26 e delle cascate del Niagara nell'Esercizio 41, trovati da qualche parte su internet e salvati sul mio computer tempo addietro (e che sostituirò non appena avrò modo di fare una vacanza in India e in Canada).

Le soluzioni proposte contengono anche "Curiosità" e numerosi "Richiami di teoria" e commenti sulla procedura utilizzata; non vadano questi intesi come parte costituente la soluzione e pertanto ripetuti nello scritto dell'esame!

E' **garantita la presenza di errori** di qualsiasi natura nel testo; chiunque li trovasse o avesse dubbi su qualcosa è caldamente invitato a contattarmi all'indirizzo: francesco.direnzo@df.unipi.it. Qualsiasi suggerimento è anche ben accetto!

Pisa, 18 maggio 2018

[1]Cioè quella parte che nessuno legge mai.

Notazione e nomenclatura

Simbolo	Esempio	Descrizione
ℓ, m, *etc.*	$30\,\mathrm{km}$, 2 kg, *etc.*	Grandezza fisica (scalare), ossia *una proprietà della Natura distinguibile qualitativamente* e *descrivibile quantitativamente*: valore numerico + unità di misura (attenzione a non dimenticare nessuno dei due!!)
$\vec{s}$, $\vec{v}$, *etc.*	$\vec{s}_1 = (s_{1x}, s_{1y}) = (0, 30\,\mathrm{km})$	Grandezza fisica vettoriale. Una volta fissato un *sistema di riferimento*, è possibile descriverla come una "lista" di *componenti* racchiuse fra parentesi tonde. A differenza delle grandezze scalari, il valore di queste componenti cambia a seconda dell'osservatore e al sistema di riferimento
v_x	$v_x = 50\,\mathrm{km/h}$	Componente (lungo l'asse) x del vettore $\vec{v}$
$\perp$ e $\parallel$	$v_\parallel$, $v_\perp$	Componenti parallela e perpendicolare di un vettore (*p.es.* $\vec{v}$) rispetto a qualcosa, una superficie di riferimento per esempio
X_{pedice}	t_0, $\vec{s}_{\mathrm{farm}}$	Oltre che a denotare le componenti di una grandezza vettoriale, i *pedici* sono utilizzati anche per distinguere più grandezze fisiche dello stesso tipo, come nell'Esercizio 14 i pedici "farm" e "pol" per distinguere le posizioni rispettivamente di farmacista e polizia: $\vec{s}_{\mathrm{farm}}$ e $\vec{s}_{\mathrm{pol}}$
$\vec{r}_0$	$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$	Il pedice "0", e anche quelli "f" ed "i", vengono utilizzati per indicare valori di riferimento delle grandezze fisiche in questione
$\lvert\vec{v}\rvert = v$	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	Modulo del vettore $\vec{v}$. Quando è chiaro che la grandezza in questione, la velocità per esempio, ha nature vettoriale, sarà preferita la notazione semplificata v a $\lvert\vec{v}\rvert$
$[X]$	$[v] = [L]/[T]$	Dimensioni della grandezza fisica X, eventualmente espressa sotto forma di equazione. Si veda l'Esercizio 3
$\cdot\,, \times$	$C\cdot\Delta T,\ 6\times10^{23}$, $\vec{v}\cdot t = (v_x t, v_y t, v_z t)$	Moltiplicazione per una grandezza scalare: moltiplico ogni componente per quel numero. Vedi Esercizio 1
$\cdot$	$\vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = F_x\Delta s_x + F_y\Delta s_y$	Prodotto scalare tra vettori, uguale alla somma del prodotto della varie componenti dei due vettori
$\times$	$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{q} = (r_y q_z - r_z q_y, r_z q_x - r_x q_z, r_x q_y - r_y q_x)$	Prodotto vettoriale tra due grandezze vettoriali, uguale ad un terzo vettore perpendicolare ai primi due di modulo uguale al parallelepipedo costruito coi primi due
$\rightarrow$ o $\Rightarrow$	$x = v\cdot t,\ \rightarrow\ t = x/v$	Simbolo di implicazione loica: "allora". Se vale la formula a sinistra *allora* vale anche quella a destra

Simbolo	Esempio	Descrizione
$f(x)$	$s(t)$, $y(x)$	Funzione di x, ossia grandezza (scalare) con una dipendenza funzionale da un'altra. Incontreremo anche *funzioni a valori vettoriali di variabili vettoriali*, come $\vec{F}(\vec{r})$
a_i	$a_i = i^2$	Successione numerica: ad ogni numero intero i $(= 0, 1, 2, \dots)$ corrisponde un numero (reale in generale) a_i
$=$	$\Delta t = 10\,\mathrm{min}$	Uguale esattamente, sia nelle equazioni che nei dati
$\equiv$	$1\,\mathrm{N} \equiv 1\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg/s^2}$	Equivalente per definizione
$\approx$	$\sin x \approx x$	Approssimazione matematica, valida sotto condizioni
$\simeq$	$c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$	Approssimazione numerica ad un certo numero di cifre significative
$\sum_{i=1}^{N}$	$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$	Sommatoria di N termini a_1, $a_2, \ldots, a_N$
$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t \end{cases}$	Sistema di equazioni, ossia un sistema di due (o più) equazioni matematiche che ammettono le stesse soluzioni. Spesso si usano per scomporre un'equazione vettoriale in due (o più) equazioni scalari
SI	Sistema Internazionale	Sistema Internazionale di pesi e misure: è il più diffuso *sistema di unità di misura* e fornisce alcuni "standard" per la misura di *grandezze fisiche*, sia fondamentali che derivate. Vedi Esercizio 3 per ulteriori dettagli

Alcune costanti fisiche e fattori di conversione

Simbolo	Valore	Approssimazioni usate nel tessto	Unità di misura	Nome
c	299 792 458	3×10^8	$\mathrm{m/s}$	Velocità della luce nel vuoto
G	6.672×10^{-11}	6.7×10^{-11}	$\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	Cost. di gravitazione universale
g	9.80665	$9.81,\ 10$	$\mathrm{m/s^2}$	Accelerazione di gravità sulla superficie terrestre (valore convenzione CGPM 1901)
h	6.626×10^{-34}	6.6×10^{-34}	$\mathrm{J \cdot s}$	Costante di Plank
$\mathcal{N}_a$	6.0221×10^{23}	6×10^{23}	particelle/mole	Numero di Avogadro
m_e	9.1094×10^{-31}	$m_p/2000$	kg	Massa dell'elettrone (modulo)
m_p	1.6726×10^{-27}	$1\,(\mathrm{g})/\mathcal{N}_a$	kg	Massa del protone ($\sim 2000\, m_e$)
$e,\ q_e$	1.6022×10^{-19}	1.6×10^{-19}	C	Carica dell'elettrone
k_B	1.3806×10^{-23}	1.4×10^{-23}	$\mathrm{J/^\circ K}$	Costante di Boltzmann
$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	8.8986×10^{9}	9×10^9	$\mathrm{N \cdot m^2/C^{-2}}$	Costante elettrica nel vuoto
ε_0	8.8542×10^{-12}		$\mathrm{C^2/m^2N}$	Costante dielettrica del vuoto

Indice

Esercizio 1

Somma e modulo di un vettore - Primo compitino, 17 aprile 2017

Una battello naviga verso Nord per 30 km e poi per 50 km in una direzione a 60° gradi Est rispetto al Nord. Trovare il vettore spostamento risultante (modulo e direzione).

Richiami di teoria: grandezze vettoriali

Lo scopo di questo esercizio è quello di prendere familiarità con l'utilizzo di *grandezze vettoriali*, come sono appunto gli spostamenti compiuti dal battello. Come noto infatti per caratterizzare la posizione $\vec{s}$ di un oggetto nello spazio attorno a noi non è sufficiente fornire una singola *grandezza fisica*, quella corrispondente per esempio al (*modulo* de) la distanza di questo da chi sta "misurando", poiché in tal modo verrebbe identificato non un solo punto nello spazio ma l'intero luogo geometrico (una sfera in tre dimensioni, un cerchio in due) di tutto ciò che dista dall'*osservatore* quel determinato valore.[2] Quindi, in generale, grandezze vettoriali definite nello spazio tridimensionale in cui viviamo per essere completamente definite avranno bisogno di:

punto di applicazione o origine che identifica l'*osservatore* che sta descrivendo il problema fisico, nel senso del punto da *dove* vengono effettuate le misure. Per esempio, consideriamo la grandezza vettoriale $\vec{s}_{\text{farm}}$, che rappresenta la posizione del Dipartimento di Farmacia, e supponiamo di chiedere a due persone (osservatori) diverse, in due luoghi diversi della città, dove si trova questo; le risposte saranno diverse, pur riferendosi allo stesso luogo;

modulo o intensità indica, a partire dall'origine e in opportune *unità di misura* (per esempio quelle del SI), quanto è "grande" la grandezza che state valutando; in generale è un numero positivo (se concorde al *verso*, vedi dopo). Per esempio, nel caso della posizione di un luogo o di un oggetto, il modulo indica la distanza spaziale tra l'osservatore e quel punto, nel caso della velocità di un'auto sarà il numero che si legge sul tachimetro. Può essere indicato nei seguenti modi: con due sbarrette verticali, $|\vec{s}|$, oppure togliendo semplicemente la freccia "$\rightarrow$" dalla relativa grandezza vettoriale, s, quando non c'è il rischio di equivoco;

direzione è "l'asse" lungo il quale "viene posto il righello", ed effettuate le misure. In termini più generici, la direzione descrive il modo in cui le misure vengono effettuate. Alcuni esempi: la direzione del moto dell'ascensore è (lineare) *verticale*, il goniometro permette di fare misure in direzione *angolare*, la crescita delle ninfee avviene in direzione *radiale*;

verso rappresenta *l'ordinamento* delle misure lungo l'asse definito dalla direzione. Per esempio, in un *sistema di riferimento cartesiano* il verso è dato dalle frecce all'estremità degli assi coordinati che definiscono le direzioni in cui le variabili x e y crescono. Riprendendo gli esempi del punto precedente, il verso *di salita* o *discesa* dell'ascensore dipenderà dal tasto premuto, il verso di misura degli angoli può essere *orario* o *antiorario* (attenzione al problema!!), mentre il verso di crescita della ninfea è verso l'esterno.

[2] Chi ricorda il gioco da bambini "acqua-fuochino-fuoco", in cui il concorrente doveva trovare un oggetto unicamente grazie all'informazione della distanza, nella forma "acqua" = lontano e "fuoco" = vicino, sa cosa significa il non sapere la direzione in cui svolgere la ricerca, e l'incompletezza di una sola "grandezza fisica" per caratterizzare una posizione.

Esempi di grandezze vettoriali sono le già citate posizione $\vec{s}$, velocità $\vec{v}$, accelerazione $\vec{a}$, e anche la forza $\vec{F}$, la (densità di) corrente $\vec{\jmath}$ ed i campi elettrico e magnetico, $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Dato un certo osservatore, il modo migliore per rappresentare delle grandezze vettoriali *omogenee* (cioè tutte dello steso tipo: posizioni, o velocità, o forze etc.) è tramite un *sistema di riferimento cartesiano.* Questo è costituito da due o tre assi, in base a se vogliamo descrivere un problema nel piano o nello spazio, *orientati* e *perpendicolari* tra loro; gli assi definiscono le direzioni in cui eseguire le misure, l'orientamento dà l'ordinamento di queste misure e quindi il verso, mentre il fatto che siano perpendicolari permette di sfruttare tutta una serie di teoremi di geometria, come quello i *Pitagora*, che risulteranno molto utili nella pratica. La scelta del sistema di riferimento è un aspetto peculiare della descrizione di un problema fisico e va effettuata con attenzione, come vedremo negli esercizi che seguiranno, in particolare nell'Esercizio 22.

Data quindi la "regola di misura" fornita dal sistema di riferimento cartesiano, possiamo far corrispondere ad ogni grandezza vettoriale, come $\vec{s}$ o $\vec{v}$, le sue *componenti* lungo i vari assi che lo costituiscono:

$$\vec{s} = \big(s_x, s_y, s_z\big), \qquad \text{oppure} \qquad \vec{v} = \big(v_x, v_y, v_z\big), \quad \text{etc.}$$

dove s_x, s_y ed s_z sono rispettivamente le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani x, y e z. Nella maggior parte delle applicazioni pratiche ci limiteremo a considerare due sole dimensioni spaziali.

In base a questa corrispondenza "vettore" $\leftrightarrow$ "(coppia - o terna - di coordinate)", il modulo di un vettore sarà dato, tramite il *teorema di Pitagora*, da:

$$s \equiv |\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

mentre la sua *direzione* sarà data dall'angolo misurato generalmente a partire dall'asse orizzontale x e da questo in verso *antiorario* (ma non sempre, come in questo problema):

$$\tan\theta = \frac{s_y}{s_x}, \qquad \rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right).$$

Si veda la figura a pagina seguente per avere una rappresentazione di questo angolo.

Per le grandezze vettoriali valgono tutte le operazioni che valgono in matematica negli *spazi vettoriali*, ed in particolare:

somma di vettori: date due grandezze fisiche vettoriali *omogenee*, ossia o due posizioni o due velocità etc. (non ha senso sommare una posizione ad una forza, come anche un peso ad un tempo), è possibile definire la loro *somma* (*vettoriale*) come quella grandezza vettoriale le cui componenti sono la somma delle componenti delle precedenti:

$$\vec{s}_1 = (s_{1x}, s_{2y}, s_{3z}),\ \vec{s}_2 = (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}): \qquad \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \big(s_{1x} + s_{2x}, s_{1y} + s_{2y}, s_{1z} + s_{2z}\big).$$

prodotto per scalari: è possibile definire il prodotto di una grandezza vettoriale per *una scalare* come la grandezza vettoriale le cui componenti sono date dal prodotto delle componenti della prima per il valore della seconda. Per esempio, la velocità media è definita dal rapporto tra lo spostamento (vettoriale) e l'intervallo di tempo (scalare):

$$\vec{v}_m \equiv \Delta\vec{s}/\Delta t = (\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z)/\Delta t = (\Delta s_x/\Delta t, \Delta s_y/\Delta t, \Delta s_z/\Delta t) \equiv (v_{mx}, v_{my}, v_{mz}).$$

prodotto scalare: a partire da due grandezze vettoriali è possibile definirne una scalare data dalla somma del prodotto delle componenti delle due grandezze di partenza. Il *lavoro* è un esempio di questa; vedi l'Esercizio 21. In pratica il prodotto scalare è un numero compreso tra meno e più il prodotto dei moduli delle due grandezze:

$$-|\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{s}| \leqslant \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \leqslant |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{s}|.$$

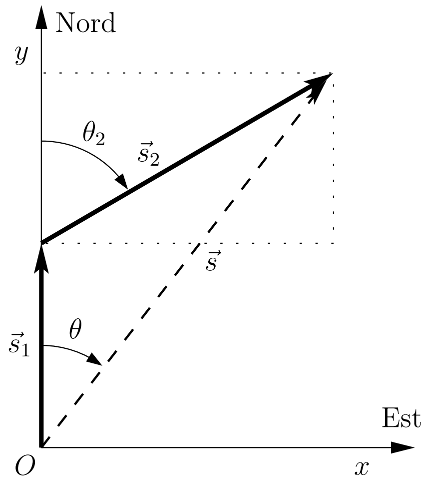
Sarà uguale a meno il prodotto dei moduli se i due vettori sono antiparalleli, ossia con la stessa direzione ma verso opposto, e più il prodotto se i vettori hanno lo stesso verso. E' zero invece se i due vettori hanno direzioni perpendicolari.

Soluzione

Indicando il primo spostamento con la grandezza vettoriale $\vec{s}_1$ ed il secondo con $\vec{s}_2$, possiamo scrivere formalmente che lo spostamento totale è dato dalla grandezza vettoriale

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

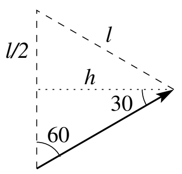
rappresentato dalla freccia tratteggiata nella figura accanto.



Scegliendo il *sistema di riferimento* con un asse diretto da Sud verso Nord ed uno da Ovest verso Est, come in figura, possiamo descrivere le precedenti quantità per mezzo delle loro componenti:

$$\vec{s}_1 = (0, 30 \text{ km})$$
$$\vec{s}_2 = (50\cos\theta_2 \text{ km}, 50\sin\theta_2 \text{ km})$$

Si faccia attenzione al fatto che la precedente convenzione nella misura dell'angolo θ_2, da Nord verso Est, è opposta a quella che si usa solitamente, "da x verso y". Notare anche che l'angolo di 60° suggerisce il fatto che il vettore $\vec{s}_2$ descriva il lato di un *triangolo equilatero*, di cui le sue componenti s_{2x} ed s_{2y} sono rispettivamente altezza e metà base, quindi:



$$s_{2x} = |\vec{s}_2|\,\sqrt{3}/2 = 25\sqrt{3} \text{ km}$$
$$s_{2y} = |\vec{s}_2|/2 = 25 \text{ km}$$

$$\vec{s} = \left(25\sqrt{3} \text{ km}, 55 \text{ km}\right)$$

Il *modulo* dello spostamento totale si ottiene applicando il *teorema di Pitagora* alle sue componenti:

$$\begin{aligned}|\vec{s}| &= \sqrt{\left(25\sqrt{3}\right)^2 + 55^2} \text{ km} = \sqrt{\left(5^2\sqrt{3}\right)^2 + (5\cdot 11)^2} \text{ km} = \sqrt{5^{2\cdot 2}\cdot 3 + 5^2\cdot 11^2} \text{ km} \\ &= 5\sqrt{5^2\cdot 3 + 11^2} \text{ km} = 5\sqrt{196} \text{ km} = 5\cdot 14 \text{ km} \\ &= 70 \text{ km}.\end{aligned}$$

Possiamo quindi descrivere la *direzione* del vettore spostamento totale per mezzo dell'angolo che esso forma rispetto al Nord (si vedano le considerazioni fatte precedentemente riguardo a questa convenzione nella misura degli angoli), quindi:

$$\tan\theta = \frac{s_x}{s_y}, \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{s_x}{s_y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{11}\right) \simeq 0.67 \text{ rad} \simeq 38.21°.$$

Esercizio 2

Conversione di unità di misura

Un farmacista, che è distante dal bancone 5 m, ogni 3 minuti si sposta avanti e indietro dallo scaffale per prendere medicine. Lavora per 7 h e 15 minuti. Quanta strada ha fatto durante una giornata lavorativa? Per quanto tempo ha camminato se si muove a 3 km/h?

Soluzione

Schematizziamo i dati e le informazioni fornite dal problema. Chiamando $D = 5$ m la distanza dal bancone dei farmaci, sappiamo che ogni tempo $t = 3$ min il farmacista percorre una distanza $2D$ (andata D più ritorno D). Fa questo lavoro per un tempo $T = 7\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min}$, e quindi un numero totale di volte:

$$N = \frac{T}{t} = \frac{7\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min}}{3\ \mathrm{min}} = \frac{7 \cdot 60\ \mathrm{min} + 15\ \mathrm{min}}{3\ \mathrm{min}} = \frac{435\ \ \mathrm{min}}{3\ \ \mathrm{min}} = 145.$$

La distanza totale percorsa in una giornata lavorativa sarà quindi:

$$D_{\mathrm{tot}} = 2D \cdot N = 2 \cdot 5\,\mathrm{m}\ \cdot\ 145 = 1450\ \mathrm{m} = 1.45\ \mathrm{km}.$$

Se questo tragitto viene percorso ad una velocità costante $v = 3$ km/h, il tempo effettivo t_{eff} impiegato a percorrerlo sarà:

$$t_{\mathrm{eff}} = \frac{D_{\mathrm{tot}}}{v} = \frac{1.45\ \mathrm{km}}{3\ \mathrm{km/h}} = \frac{1.45}{3}\mathrm{h} = \frac{1.45}{3} \cdot 60\ \ \mathrm{min} = 29\ \ \mathrm{min}\,.$$

Nota che uno avrebbe potuto esprimere il risultato anche come 0.4833... h ma in questo modo è più “elegante”.

Esercizio 3

Dimensioni delle grandezze fisiche - Compito, 15 gennaio 2018

Nelle equazioni seguenti x è una lunghezza, t un tempo e v una velocità.
Quali sono le dimensioni delle costanti C_1 e C_2?

(a) $x = \dfrac{1}{2} C_1 t^2$

(b) $v = C_1 e^{-C_2\, t}$

(c) $\dfrac{v^2}{C_1} = C_2\, v + C_1 \left(\dfrac{x}{t}\right)^2$

Richiami di teoria: dimensioni delle grandezze fisiche e analisi dimensionale

E' possibile associare alle *grandezze fisiche fondamentali*[3], come *massa*, *lunghezza* e *tempo*, i simboli M, L, e T. Di conseguenza le unità di misura di tutte le *grandezze derivate* si ricavano come

[3]Tradizionalmente furono definite come “fondamentali” delle grandezze fisiche facilmente descrivibili in modo operativo, nel senso di facilmente misurabili e confrontabili con dei campioni di riferimento, che non potevano essere a loro volta espresse come funzioni di altre grandezze, e per tanto venivano considerate come indipendenti. Alcuni esempi sono i già citati massa, lunghezza e tempo; non è possibile definire l'uno in termini degli altri. I campioni di riferimento per queste grandezze sono conservati al Bureau International des poids et mesures presso Sèvres, Parigi. Ci potremmo chiedere allora perché non sostituire uno tra *T*empo o *L*unghezza con una *V*elocità di riferimento (infatti $V = L/T$). Ciò è affettivamente avvenuto nel 1983 quando alla XVII

prodotto delle potenze (con indice razionale) delle unità di misura delle grandezze fondamentali che compaiono nella loro definizione. Si definiscono quindi le *dimensioni* di una grandezza fisica gli indici di queste potenze. E' importante nello scrivere equazioni contenenti grandezze fisiche di diverso tipo che le quantità eguagliate siano *omogenee*, ossia che abbiano le stesse dimensioni fisiche (gli indici delle potenze delle grandezze fondamentali); non ha senso eguagliare un tempo ad una massa, o anche una lunghezza ad una lunghezza al quadrato (cioè un'area). Tale verifica prende il nome di *analisi dimensionale*, e le relative equazioni, rappresentate per mezzo di parentesi quadre, sono dette *equazioni dimensionali.*

In questo esercizio abbiamo che $[x] = [L]$, che si legge "x ha le dimensioni di una lunghezza (elevata alla potenza 1)", $[t] = [T]$ e $[v] = [L] \cdot [T]^{-1}$, ossia "v ha le dimensioni di una lunghezza moltiplicata per *l'inverso di* un tempo", ed infatti le sue unità di misura nel Sistema Internazionale (SI) sono il *metro al secondo*, m/sec. Tutte le quantità numeriche, tipo 1/2, sono dette *numeri pur*i; hanno "dimensione zero", $[1/2] = [M]^0 = [L]^0 = [T]^0 = 1$, nel senso che non hanno bisogno di alcuna unità di misura per essere definite. Anche gli *angoli*, definiti come *rapporto tra la misura dell'arco e della circonferenza che li identifica*, cioè $[L]/[L]$, sono numeri puri. Per quanto detto, le unità di misura di una generica grandezza derivata z possono quindi essere rappresentate per mezzo dei tre indici[4] α, β e γ dell'equazione dimensionale $[z] = [M]^\alpha \cdot [L]^\beta \cdot [T]^\gamma$ a partire dalla sua definizione in termini di grandezze fondamentali.

Soluzione

L'analisi dimensionale dell'equazione (a) dà:

$$[x] = \left[\frac{1}{2} C_1 t^2\right] \qquad \rightarrow \qquad [L] = [C_1][T]^2$$

per cui

$$[C_1] = [L] \cdot [T]^{-2}$$

ossia C_1 ha le dimensioni di una *lunghezza moltiplicata per l'inverso del quadrato di un tempo*, cioè un'*accelerazione.* Si noti infatti la somiglianza della (a) con la legge oraria del moto uniformemente accelerato, dove C_1 svolge esattamente il ruolo dell'accelerazione.

Il caso (b) merita un commento a parte. Per quanto detto precedentemente, in ogni equazione in cui compaiono *funzioni trascendenti*, che non possono essere espresse cioè per mezzo di (un numero finito di) operazioni algebriche elementari $(+, -, \times, \div)$, come *exp*, *log* e le *funzioni trigonometriche*, è importante che il loro argomento sia un numero puro. Infatti, benché abbiano perfettamente senso potenze del metro come il metro^2 (per le superfici), metro^3 (aree) e metro^{-1} (per il *numero d'onda k*, una grandezza molto usata in spettroscopia e chimica) e le combinazioni di queste, non è possibile trovare alcuna interpretazione per qualcosa tipo $2^{1\,\text{metro}}$.[5] Quindi è

Conferenza generale di pesi e misure è stato deciso di ridefinire il metro come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792 458 di secondo, usando quindi come grandezza fondamentale di riferimento la velocità della luce nel vuoto (costante).

[4] In realtà le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale sono sette in totale; a quelle sopra citate vanno aggiunte la corrente elettrica (simbolo I), la temperatura termodinamica (Θ), la quantità di sostanza (N) e l'intensità luminosa (J). Per lo stesso motivo dovrebbero essere sette gli indici da utilizzare nel caso più generico possibile (estremamente raro in verità) di una grandezza fisica contenente tutte quante quelle fondamentali.

[5] In realtà c'è anche una ragione funzionale per cui gli argomenti di queste funzioni trascendenti devono essere adimensionali. Infatti, come noto, la derivata dell'esponenziale $de^x/dx = e^x$; eseguendo l'analisi dimensionale alla precedente equazione abbiamo che $[de^x] \cdot [dx]^{-1} = [e^x]$ ma le dimensioni di e^x e di de^x sono le stesse poiché il secondo è semplicemente l'incremento infinitesimo del primo, e lo stesso vale per x e dx. Quindi eseguendo la semplificazione otteniamo che $[x] = 1$, ossia è un numero puro. Lo stesso ragionamento si può applicare alla funzione logaritmo, ricordando per esempio che $d \log x/dx = 1/x$, o alle funzioni seno e coseno, $d \sin x/dx = \cos x$ e $d \cos x/dx = -\sin x$.

importante verificare che, ogni volta che queste funzioni compaiono, il loro argomento sia un numero puro.

Tornando all'equazione (b) abbiamo quindi:

$$[v] = \left[C_1 e^{-C_2\, t}\right] \qquad \rightarrow \qquad [v] = [C_1] \quad \text{e} \quad [C_2] \cdot [T] = 1$$

e quindi C_1 ha le dimensioni di una *velocità*, cioè $[L] \cdot [T]^{-1}$, mentre C_2 ha dimensioni dell'*inverso di un tempo*, $[T]^{-1}$. Si poteva arrivare allo stesso risultato notando la somiglianza tra la (b) e la legge del decadimento esponenziale, per esempio degli isotopi radioattivi.

Il caso (c) si risolve immediatamente:

$$\begin{aligned} \left[\frac{v^2}{C_1}\right] &= \left[C_2\, v + C_1 \left(\frac{x}{t}\right)^2\right] \\ [L]^2 \cdot [T]^{-2} \cdot [C_1]^{-1} &= [C_2] \cdot [L] \cdot [T]^{-1} + [C_1] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2} \\ [C_1]^{-1} &= [C_2] \cdot [L]^{-1} \cdot [T] + [C_1] \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio è stato diviso per $[L]^2 \cdot [T]^{-2}$, delle unità con le dimensioni di una lunghezza al quadrato per l'inverso di un tempo al quadrato. Nell'ultimo passaggio notiamo che C_1 deve avere le dimensioni dell'inverso di sé stesso, ma l'unico modo in cui ciò è possibile è che *sia un numero puro*. Ciò che rimane è:

$$[C_2] \cdot [L]^{-1} \cdot [T] = 1$$

ossia

$$[C_2] = \cdot [L] \cdot [T]^{-1}$$

cioè una *velocità*.

Esercizio 4

Cinematica, moto rettilineo e uniforme

Uno dei maggiori pericoli quando si fa trekking in montagna è dato dal possibile sopraggiungere, in tempi relativamente brevi anche in giornate di sole, di temporali accompagnati da fulmini, estremamente pericolosi per chi si trova in zone esposte o in prossimità di alberi. Per questo motivo è importante correre ai ripari il prima possibile, ed è utile stimare il tempo che abbiamo a disposizione prima che la perturbazione sia sopra di noi.

Supponete di trovarvi in montagna e di vedere davanti a voi, in direzione Nord, un lampo. Dopo aver contato circa 10.5 sec avvertite anche il tuono. Sapendo che il vento soffia da Nord ad una velocità di circa 30 km/h, stimare quanti minuti avete a disposizione per mettervi a riparo prima che la perturbazione sia lì. Velocità del suono circa 340 m/s.

Richiami di teoria: Cinematica e moto rettilineo e uniforme

Questo semplice esercizio di Cinematica richiede di studiare il moto (a velocità costante) dell'onda sonora (il tuono) prodotta dal fulmine, ricavando la distanza alla quale quest'ultimo è avvenuto, ed il tempo che impiegherà la perturbazione, muovendosi sempre a velocità approssimativamente costante, a giungere a noi. Cominciamo quindi con qualche breve richiamo su ciò che c'è da sapere sul moto rettilineo ed uniforme.

La *Cinematica* (dal greco *kinema*, movimento) è quel settore della Fisica, ed in particolare della Meccanica, che si occupa della *descrizione quantitativa del moto dei corpi*, indipendentemente dalle cause che lo hanno prodotto (scopo invece della *Dinamica*). Questo moto avviene (classicamente) in uno spazio che considereremo *vuoto*, nel senso di "privo di ostacoli" o deformazioni, e nel quale andremo di volta a volta inserire gli oggetti o le forme (oggetti astratti, nel "senso matematico": rette, punti, triangoli, etc.) che ci interessano ai fini del problema.[6]

Per cominciare, e fino alla sezione sui fluidi, ci occuperemo esclusivamente di *corpi puntiformi*, ossia di oggetti materiali le cui dimensioni sono trascurabili ai fini della descrizione del loro moto; in particolare trascureremo loro possibili rotazioni o deformazioni. Quindi, per caratterizzare la posizione di un *punto materiale* sarà sufficiente fornire la grandezza vettoriale (si veda il richiamo in Esercizio 1) che ne descrive la posizione. Questa può essere indicata in molti modi, tra cui:

$$\vec{r},\ \vec{s},\ \vec{x},\ \vec{P},\ \overrightarrow{OP},\ \ldots$$

Sceglieremo $\vec{r}$ per questo esercizi ma è assolutamente indifferente. Come detto nell'Esercizio 1, per caratterizzare $\vec{r}$ ci serve un *Sistema di Riferimento*, ossia un insieme di "regole" che ci permettano di misurare quantitativamente la posizione $\vec{r}$. Per esempio, nel caso di un *immobile* (un oggetto fermo, come un'abitazione), una scelta di sistema di riferimento potrebbe essere quella di dare la posizione dell'oggetto fornendo via e numero civico dove si trova; la via dà la *direzione*, ed il suo inizio l'*origine* ed il *verso*, mentre il numero civico è l'*intensità*. Ancora, a *Battaglia Navale* (anche noto come *Affonda la Flotta*) la posizione dei colpi sparati contro gli avversari è data dalla coppia di (lettera, numero), dove la prima rappresenta la "coordinata

[6] Questa idea di spazio differisce da quella attualmente accettata in Fisica Moderna, in cui la gravità deforma la geometria degli oggetti e dei loro moti, e dove la Meccanica Quantistica fa comparire e scomparire particelle in continuazione. Non essendo questo il luogo per approfondire queste idee, rimando al saggio divulgativo del Professor Carlo Rovelli, fisico teorico, intitolato Sette brevi lezioni di Fisica, edito da Adelphi.

orizzontale" e la seconda quella "verticale" nel sistema di riferimento dato dalla griglia del gioco. In generale, in mancanza di riferimenti, saremo noi a dover definire, in modo opportuno, un sistema di riferimento; sceglieremo un *asse orientato* $\longrightarrow$ nel caso il moto avvenga lungo una linea, oppure una *coppia di assi cartesiani* se il moto avviene su di un piano, oppure un *terna di assi cartesiani* se avviene nello spazio. Definiremo quindi un'origine O, scelta generalmente in corrispondenza dell'intersezione degli assi nel secondo e terzo caso, ed un'unità di misura (delle "tacchette") rispetto alle quali misurare le posizioni.

Tutto abbastanza semplice per oggetti fermi. Consideriamo quindi un corpo *in movimento*, come una macchina o il treno che dobbiamo prendere; ciò significa che questo *varierà la propria posizione $\vec{r}$ nel tempo*. Non sarà quindi particolarmente importante quale sia la sua posizione "adesso", o ad un certo tempo, quanto piuttosto l'*insieme dei punti dove si troverà ad ogni dato tempo*. Questo concetto è ciò che matematicamente si chiama un *funzione* (vettoriale, del tempo), mentre in Fisica prende il nome di **legge oraria** e si scrive:

$$\vec{r}(t): \quad \text{posizione del corpo ad un generico tempo } t.$$

Lo scopo della Cinematica è quello di ricavare questa $\vec{r}(t)$, per ogni tempo t, possibilmente dato solo il minor numero di informazioni. Per esempio in una partita di calcio o di rugby è importante sapere dove atterrerà la palla, dopo un certo tempo, noto il punto dalla quale è stata lanciata. Per farlo è necessario introdurre un'altra grandezza cinematica. Prima di procedere ad introdurla si presti attenzione anche al possibile "problema inverso"; per esempio, nel recarsi in un luogo, all'Università per esempio, può essere interessante valutare il tempo impiegato, o in generale dove ci troveremo ad un certo tempo in funzione del percorso fatto: $t(\vec{r})$. Questa è quella che matematicamente si chiama la *funzione inversa* (rispetto a quella scritta sopra) e spesso, come nel caso del presente esercizio, avremo a che fare con problemi che richiedono di trovare proprio questo.

Riprendiamo la precedente discussione. Per descrivere le posizioni degli oggetti abbiamo già introdotto il *vettore posizione $\vec{r}$*. Per descrivere le *variazioni* di posizioni sarà utile considerare la grandezza vettoriale *variazione di posizione* o *spostamento*:[7]

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i.$$

Si noti che mentre $\vec{r}$ ha bisogno di un'origine, O, per essere misurato, $\Delta\vec{r}$ ne è indipendente: posso spostarmi di $\Delta\vec{r}$ uguale a "due chilometri verso Nord ed uno verso Est" indipendentemente da quale fosse la mia posizione iniziale $\vec{r}_i$ e da quale sarà quella finale $\vec{r}_f$. In generale in Fisica si è più interessati allo studio di queste *variazioni*, $\Delta\vec{r}$, $\Delta t, \ldots$, piuttosto che alla posizione "assoluta" di dive/quando ciò sia avvenuto.

In molte circostanze può fare differenza se ho percorso questo spostamento in pochi minuti oppure in qualche giorno. Per questo motivo viene introdotta una grandezza cinematica che *quantifica lo spostamento nel tempo impiegato a percorrerlo* e che è chiamata **velocità media**:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}}$$

dove è stato introdotto, in modo analogo a $\Delta\vec{r}$ (si veda il commento in nota 7), l'*intervallo* o *variazione di tempo* $\Delta t \equiv t_f - t_i$. Anche in questo caso non ha importanza l'origine da quando abbiamo iniziato a contare i tempi (la mezzanotte dello 0 d.C.) ma semplicemente quanto è

[7] In fisica la lettera greca "Δ" (Delta) davanti ad una grandezza fisica viene utilizzata per indicare la variazione di questa, ossia la differenza tra il suo valore ad un'istante di tempo "finale", rispetto alla sua misurazione, ed indicato col pedice "f", ed il valore della stessa ad un tempo precedente, detto "iniziale", pedice "i".

trascorso tra due determinati avvenimenti, etichettati con i pedici “f” ed “i”. Nella maggior parte dei casi il moto prosegue anche dopo la nostra misurazione, ed usare i termini “finale” ed “iniziale” può risultare fuorviante; per questo motivo ci riferiremo più spesso ad una misura di posizione fatta ad un generico tempo t, $\vec{r}(t)$, successivo ad un *tempo di riferimento* t_0 al quale era stata fatta la prima misurazione $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. Per questo motivo scriveremo invece:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}_0}{t - t_0}.$$

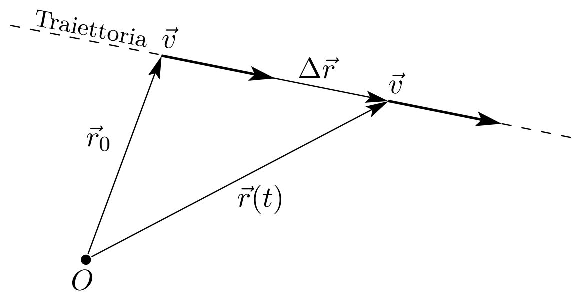
Ovviamente anche la velocità come la posizione è una funzione, a *valori vettoriali*, del tempo. Il modulo della precedente grandezza fisica vettoriale è quello che ci viene mostrato per esempio dal *tachimetro* delle automobili; la sua direzione e verso sono dati dalla strada che stiamo percorrendo, mentre il punto di applicazione, dal quale la velocità è misurata, è l'automobile stessa.

Come noto, se la posizione $\vec{r}$ dal punto di vista delle dimensioni (si veda la discussione in Esercizio 3) è una *lunghezza* L, e si misura nel *Sistema Internazionale* (SI) in *metri* (m), una velocità sarà dimensionalmente una *lunghezza fratto un tempo*, L/T, e nel SI si misurerà in *metri al secondo* (m/s).

Molto spesso vorremmo che la precedente misura fosse fatta nel *minor tempo possibile*, per avere ogni istante una stima “rapida” della *velocità alla quale stiamo andando in quel preciso istante*. Questo significa prendere intervalli di misurazione Δt sempre più piccoli, o matematicamente fare *il limite* per Δt tendente a 0 sec (cioè: “quanto più rapidamente possibile”). Definiamo quindi la **velocità istantanea** come il *limite della velocità media ad un dato istante per intervalli di misurazione tendenti a zero*:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Il moto più semplice che possiamo immaginare è quello che avviene a velocità $\vec{v}(t) = cost.$, cioè che non dipende dal tempo (mantiene per tutto il moto lo stesso valore, vettoriale). Per questo motivo la velocità media sarà uguale a quella istantanea e ometteremo il pedice “m” dalla velocità. Questo moto avverrà quindi lungo la retta identificata dal vettore velocità, come mostrato in figura, e per questo motivo prende il nome di **moto rettilineo uniforme**. La sua legge oraria si ricava dalla definizione di velocità media:



$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}_0}{t - t_0}, \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0}$$

In figura a fianco sono riportate, rispetto all'osservatore “O”, due posizioni $\vec{r}_0$ e $\vec{r}(t)$ di un certo corpo che si muove a velocità costante $\vec{v}$. Questo moto avviene lungo la traiettoria rettilinea tratteggiata; il vettore lungo questa che unisce la “punta” di $\vec{r}_0$ alla punta di $\vec{r}(t)$ è lo spostamento $\Delta\vec{r}$, proporzionale tramite il fattore $1/\Delta t$ alla velocità media del corpo: $\vec{v} = \Delta\vec{r}/\Delta t$.

Quanto qui discusso ci è sufficiente per risolvere il presente esercizio.

Soluzione

Supponiamo quindi di vedere il lampo di un fulmine caduto davanti a noi a distanza d, da determinare. Anche il tempo di propagazione della luce non è istantaneo, quindi quando vediamo il lampo in realtà la perturbazione si è già spostata verso di noi. Tuttavia, essendo la velocità della luce enorme, $c \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s} = 300\,000\,000\,\mathrm{m/s}$, lo spazio percorso sarà assolutamente trascurabile (verificarlo!) e possiamo approssimare di vedere il lampo esattamente nell'istante in cui il fulmine è caduto.

Dopo un tempo Δt da quando vediamo il lampo udiamo il tuono, che è giunto a noi da distanza d con la *velocità del suono* in aria $v_s \simeq 340$ m/s. Il moto dell'onda sonora avviene a velocità costante, quindi si tratta di un moto rettilineo e uniforme, per cui valgono le formule citate nella sezione precedente. In particolare, conoscendo la velocità del suono e il tempo che impiega a giungere a noi, dall'espressione della velocità media possiamo ricavare la distanza $d = \Delta r$ alla quale cade il fulmine:

$$v_s = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad \rightarrow \quad d = \Delta r = v_s \cdot \Delta t.$$

Inserendo i dati dell'esercizio otteniamo:

$$d = 340\,\mathrm{m/s} \cdot 10.5\,\mathrm{s} = 3570\,\mathrm{m} = 3.57\,\mathrm{km}.$$

In generale potrebbe essere buona cosa per chi fa trekking in montagna imparare questa regolina che *la distanza in chilometri da dove è caduto il fulmine è legata al tempo in secondi intercorso tra il lampo ed il tuono dal fattore 0.34* (che per fini pratici può essere approssimato in 1/3).

Si noti che nelle precedenti equazioni sono riportati solamente i *moduli* delle grandezze fisiche (vettoriali) coinvolte. Questo perché la situazione descritta è sufficiente a caratterizzare automaticamente anche il punto di applicazione (il luogo in cui cade il fulmine), la direzione (la retta immaginaria che congiunge noi ed il punto di caduta del fulmine) ed il verso (verso di noi) di queste grandezze vettoriali.

Prima di procedere col calcolo del tempo a disposizione, un commento sulla procedura utilizzata. Abbiamo iniziato l'esercizio assumendo che il lampo, la luce, del fulmine arrivasse a noi "istantaneamente" nel momento in cui questo cade. Ciò non è vero esattamente poiché anche la velocità di propagazione della luce, c, è finita, benché molto molto grande. Calcoliamo quindi quanto tempo impiegherebbe il lampo ad arrivare a noi percorrendo la distanza d:

$$\begin{aligned} t_{\text{lampo}} &= \frac{d}{c} \simeq \frac{3570\ \mathrm{m}}{3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}} = \frac{3.57}{3} \times \frac{10^3}{10^8}\mathrm{sec} = 1.19 \times 10^{3-8}\ \mathrm{sec} = 1.19 \times 10^{-5}\ \mathrm{sec} \\ &= 1.19 \times 10^{-5}\ \mathrm{sec} = 0.0000119\ \mathrm{sec} = 11.9\ \mu\mathrm{s}. \end{aligned}$$

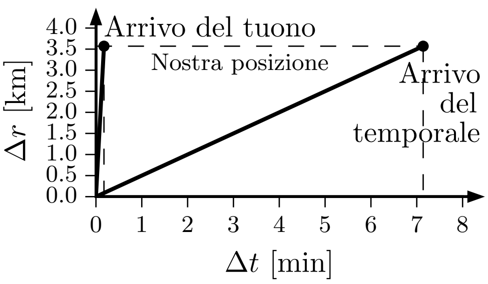
Quindi l'errore compiuto nel trascurare la velocità di propagazione della luce è di appena 11.9 µs (*microsecondi*, cioè milionesimi di secondo), impossibili da misurare senza strumenti di precisione.

Riprendiamo lo svolgimento dell'esercizio. Conoscendo quindi la distanza d della perturbazione e del fulmine nel momento in cui quest'ultimo è caduto, e conoscendo la velocità del vento, v_{vento}, calcoliamo con le stesse formule scritte sopra il tempo T che abbiamo a disposizione prima dell'arrivo della perturbazione:

$$\begin{aligned} v_{\text{vento}} = \frac{d}{T}, \quad \rightarrow \quad T &= \frac{d}{v_{\text{vento}}} = \frac{3.57\ \mathrm{km}}{30\ \mathrm{km/h}} = 0.119\ h = 7.14\ \mathrm{min} \\ &\simeq 7\,\mathrm{min\ e\ 8\ sec.} \end{aligned}$$

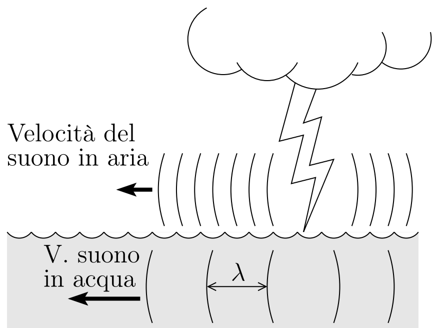
Notare che questo è il tempo a disposizione da quando è caduto il fulmine. Rispetto a quando sentiamo il suono, dobbiamo sottrarre al precedente i 10.5 secondi intercorsi tra il lampo ed il tuono. Come si può notare, questo tempo è piuttosto breve, specialmente per gli spostamenti in montagna. Per questo motivo è buona abitudine correre ai ripari ogni qual volta si intravede un fulmine in montagna in lontananza.

Richiami di teoria: grafici delle funzioni cinematiche (parte I)



In Cinematica, per avere una miglior visione del problema e arrivare più rapidamente alla soluzione, è molto utile realizzare dei *grafici cartesiani* delle funzioni cinematiche coinvolte. In questo esempio abbiamo a che fare con gli spostamenti, Δr, in funzione del tempo t (o Δt, per l'intervallo). Queste funzioni, $\Delta r(t)$, sono *rette*, cioè *luoghi geometrici* nel piano (x, y) descrivibili per mezzo della seguente equazione: $y = f(x) = a\,x + b$.Il parametro b, detto *intercetta*, è zero in questo esempio e avremo quindi delle rette nel piano $(t, \Delta r)$ passanti per l'*origine* degli assi (il punto $(0, 0)$). Queste rete avranno pendenza, il parametro a, uguali alle velocità del suono e del vento. I loro grafici sono quelli mostrati nella figura a fianco, dove sull'asse orizzontale è rappresentato il tempo t misurato in minuti (min) mentre sull'asse verticale lo spostamento Δr misurato in chilometri (km). Le linee tratteggiate verticali rappresentano i tempi di arrivo del tuono e del temporale, mentre quella tratteggiata orizzontale la posizione alla quale ci troviamo rispetto al luogo di caduta del fulmine.

Curiosità: temporali al mare e "doppio tuono"



La velocità del suono è tipica del mezzo nel quale l'onda sonora si propaga, attraverso *compressioni* e *dilatazioni* periodiche dello stesso. Come abbiamo visto, in aria la velocità del suono è circa 340 m/s; in altri mezzi questo numero è diverso, e vale per esempio 1480 m/s in acqua e 6300 m/s in alluminio. Questa caratteristica è alla base di un curioso effetto, sebbene alquanto raro, che può verificarsi al mare poco prima di un temporale.

Si supponga di essere sott'acqua, dove per effetto dalla maggiore velocità del suono, i suoni arrivano prima, e di sentire il boato di un tuono provenire da qualche parte. Togliendo immediatamente la testa (le orecchie) dall'acqua è possibile riascoltare il suono dello stesso tuono, a distanza di pochi secondi dal precedente. Questo effetto è dovuto al fatto che l'onda sonora in aria viaggia più lentamente che nell'acqua, come rappresentato nella figura a fianco.[8]

Esercizio 5

Cinematica, moto uniformemente accelerato

Si supponga, nelle condizioni del precedente esercizio, di non conoscere la velocità del vento e di volerla stimare con un "antico metodo", utilizzato ancora qualche volta, oltre che dagli escursionisti, dai golfisti e dai tiratori. Questo metodo consiste nel far cadere dall'altezza della spalla

[8] Le linee curve verticali in figura vorrebbero rappresentare i *fronti d'onda* del suono che si sta propagando dal luogo in cui è caduto il fulmine, ossia le periodiche compressioni e dilatazioni del mezzo in cui l'onda viaggia (aria o acqua). La distanza tra due di questi fronti prende il nome di *lunghezza d'onda*, e viene indicata con la lettera greca λ (lambda). Questa quantità è legata alla velocità di propagazione dell'onda dalla relazione: $\lambda = v/f$, dove f è la *frequenza* (l'altezza del suono) della stessa. I tuoni hanno in generale frequenze molto basse, dell'ordine dei 100 Hz ("Hertz", cioè secondi^{-1}). Grazie alle diverse velocità di propagazione in aria ed in acqua possiamo calcolare quindi la distanza dei vari fronti d'onda nel disegno: $\lambda_{\mathrm{H_2O}} = v_{\mathrm{s.\ in\ H_2O}}/f_{\mathrm{tuono}} \simeq 14.8$ m e $\lambda_{\mathrm{aria}} = v_{\mathrm{s.\ in\ aria}}/f_{\mathrm{tuono}} \simeq 3.4$ m. Questo corrisponde nel disegno ad una minore e maggiore densità dei fronti d'onda sonori per le onde in acqua ed in aria rispettivamente.

dei fili d'erba; la direzione di caduta di questi dà informazione sulla direzione del vento mentre la distanza orizzontale tra il punto di caduta e quello in cui sono stati lanciati dà informazioni sulla sua intensità. Assumendo che i fili d'erba cadendo acquisiscano immediatamente la stessa velocità orizzontale del vento, stimare questa velocità sapendo che la nostra spalla è alta 1.5 m e che il punto di caduta dell'erba si trova a circa 2.5 m da noi. Si trascurino tutti gli altri effetti di resistenza dell'aria.

Richiami di teoria: moto uniformemente accelerato

Quanto visto negli esercizi precedenti non ci è sufficiente a studiare la caduta degli oggetti che, come noto, è un moto in cui la velocità varia nel tempo. Per affrontare questo problema ripercorriamo le tappe descritte nel richiamo teorico contenuto nel precedente Esercizio 4, cominciando col considerare proprio la *variazione di velocità*

$$\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)$$

o, più in generale, tra un tempo di riferimento t_0 ed uno generico successivo t:

$$\Delta\vec{v}(t) \equiv \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$

dove $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t_0)$. Ancora, come fatto quando abbiamo introdotto la velocità media, definiamo l'**accelerazione media** come la *variazione di velocità nell'intervallo di tempo considerato* Δt:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}}$$

oppure, senza riferimento a tempi finali e iniziali specifici,

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t - t_0}.$$

L'accelerazione è la grandezza che *misura quanto rapidamente cambia la velocità di un corpo*, e vedremo che rivestirà un ruolo fondamentale in Dinamica, nella descrizione delle *interazioni* tra corpi. Dimensionalmente sarà una velocità divisa per un tempo, ossia $^{L}/_{T}/T = L/T^2$, e la sua unità di misura nel SI è infatti il *metro al secondo quadro* (m/s^2).

Sempre seguendo la falsa riga di quanto introdotto con la velocità, possiamo considerare la precedente misura di variazione di velocità fatta in un tempo rapidissimo ed introdurre l'**accelerazione istantanea** come *il limite* per Δt tendente a 0 sec della precedente accelerazione media:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t - t_0}.$$

In molte circostanze avremo a che fare con corpi che si muovono con *accelerazione costante* nel tempo; questo è in prima approssimazione il caso della *caduta dei gravi* (i corpi dotati di *massa*) per i quali, come già Galileo Galilei aveva notato agli inizi del XVII secolo, l'accelerazione è sempre diretta verso il basso con la stessa intensità, circa 9.8 m/s^2. Questa grandezza (vettoriale) viene detta *accelerazione di gravità*, e indicata col simbolo $\vec{g}$.

Il moto dei corpi caratterizzati (per qualche ragione che ci dirà la Dinamica) dall'avere accelerazione costante, $\vec{a}(t) = \vec{a}_m = cost.$ (ometteremo quindi il pedice "m") viene detto **moto uniformemente accelerato**, ed ha una velocità caratterizzata dalla seguente legge oraria:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}_0}{t - t_0}, \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0}$$

Questa formula ricorda "matematicamente" quella per il moto rettilineo uniforme, dove la velocità gioca il ruolo della posizione $\vec{r}(t)$, mentre l'accelerazione quello della velocità. A differenza del precedente però non è detto che questo sia *rettilineo*, avvenga cioè lungo una retta; ciò succede infatti solo nei casi in cui i vettori $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$ sono paralleli, come vedremo per esempio nell'Esercizio 14.

Arrivati a questo punto, ci interesserebbe trovare anche una legge oraria per la posizione dei corpi soggetti a questo tipo di moto. Nel caso del moto rettilineo uniforme avevamo una velocità (media) $\vec{v}_{(m)}$ costante ed una legge oraria $\vec{r}(t) = \vec{v}_{(m)} \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$. Vorremo una formula analoga alla precedente, però non è chiaro a prima vista chi mettere come velocità, poiché quest'ultima varia nel tempo. Per il fatto però che questa varia in modo "uniforme" (proporzionalmente al tempo) la scelta giusta è quella di utilizzare la *velocità media* ricavata calcolando la *media aritmetica*[9] tra la velocità al tempo di riferimento iniziale t_0 ed il tempo "finale" t:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\vec{v}(t) + \vec{v}_0}{2}.$$

Sostituendo questa velocità media nell'equazione $\vec{r}(t) = \vec{v}_{(m)} \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$ otteniamo:

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{v}(t) + \vec{v}_0}{2}(t - t_0) + \vec{r}_0.$$

Quanto vale $\vec{v}(t)$ ad un determinato istante di tempo possiamo ricavarlo in base all'accelerazione (costante) ed al tempo trascorso grazie alla legge oraria per la velocità scritta sopra:

$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0, \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{r}(t) &= \frac{\vec{v}(t) + \vec{v}_0}{2}(t - t_0) + \vec{r}_0 \\ &= \frac{\vec{a} \cdot (t - t_0) + 2\vec{v}_0}{2}(t - t_0) + \vec{r}_0 \end{aligned}$$

e quindi:

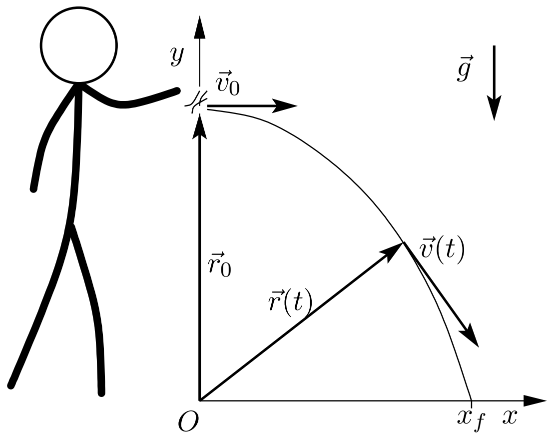
$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0}$$

Questa è la **legge oraria per il moto uniformemente accelerato**. Insieme alla precedente legge oraria per la velocità è sufficiente a caratterizzare completamente questo tipo di moto, una volta note posizione e velocità iniziali, $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ rispettivamente.

Come anticipato per l'Esercizio 4 sul moto rettilineo uniforme, e ancora più in questo caso, negli esercizi di Cinematica in cui si ha a che fare con moti uniformemente accelerati è estremamente importante ricorrere a grafici delle funzioni cinematiche coinvolte. Fin quando il moto avveniva su una retta ed era solo la posizione a cambiare, l'unico grafico degno di nota era quello della componente di $\vec{r}(t)$ lungo questa direzione. Adesso il moto avviene in più di una dimensione e quindi avremo a disposizione di un maggior numero di grafici, ed in particolare di uno per ogni componente (rispetto ad un certo sistema di riferimento) di $\vec{r}(t)$ e di $\vec{v}(t)$. Inoltre, chiamando $x(t)$ ed $y(t)$ le componenti di $\vec{r}(t)$ lungo gli assi x e y, sarà interessante graficare anche $y(x)$ (la componente y dello spostamento in funzione di quella x) etc.. Senza elencare qui tutto ciò che sia possibile fare, rimandiamo alla soluzione dei seguenti esercizi.

[9] Questa media è esattamente quella che uno studente fa per calcolare il punteggio complessivo "medio" sapendo i voti che ha preso ai due compitini: *voto del primo compitino + voto del secondo, diviso due*. Esempio: la media tra 26 e 18 è $(26+18)/2 = 22$.

Soluzione



Consideriamo quindi il moto dei fili d'erba lasciati cadere. E' chiaro che questo non avverrà lungo una retta, infatti la direzione del vento (orizzontale) è perpendicolare a quella dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ (verticale). Nella figura a fianco è rappresentato schematicamente cosa ci aspettiamo che succeda, spazialmente. Sono indicate anche la posizione iniziale $\vec{r}_0$, la velocità iniziale $\vec{v}_0$, e le stese ad un generico tempo t, $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$. E' anche indicato il vettore accelerazione di gravità, $\vec{g}$, posto in quella posizione più per "tradizione" (rispetto a molti libri di Fisica) e per "pulizia" di notazione che per accuratezza nel dove realmente questo vettore andrebbe disegnato; questa accelerazione ha direzione e verso correttamente indicate nel disegno ma punto di applicazione che sono i corpi (i fili d'erba) in caduta. Poiché anche la punta di $\vec{r}$ ed il punto di applicazione di $\vec{v}$ sono in questo punto, per questo è stato scelto di "spostare" questo vettore a lato. Nel grafico è indicato anche un riferimento cartesiano, (x, y), rispetto al quale misurare le posizioni orizzontali e verticali dei fili d'erba in caduta. In pratica, la traiettoria curvilinea disegnata è la funzione cinematica $y(x)$. Utilizziamo le equazioni viste nel precedente richiamo teorico per ricavarla e risolvere l'esercizio.

Scriviamo prima di tutto, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura, i vettori posizione iniziale, velocità iniziale e accelerazione (costante):

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = \big(0, h\big), \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \big(v_{\text{vento}}, 0\big), \quad \vec{a} = \big(0, -g\big)$$

dove h è l'altezza della spalla, fornita nel testo dell'esercizio, e dove il segno meno davanti a g deriva dal fatto che il vettore $\vec{g}$ ha verso *opposto* rispetto a quello dell'asse verticale disegnato in figura. I due numeri tra parentesi tondo sono rispettivamente la componente x, orizzontale, e la componente y, verticale, rispetto al sistema di riferimento disegnato in figura delle quantità vettoriali corrispondenti. Dalle precedenti si ricava anche che il moto lungo x avviene a velocità costante, v_{vento}, e mentre quello lungo y è un moto uniformemente accelerato. Almeno fino a quando il corpo, i fili d'erba, non tocca terra. Questi due moti condividono lo stesso tempo t, quindi si usa rappresentare questa stessa dipendenza matematicamente con un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = v_{\text{vento}} \cdot (t - t_0) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2 + h \end{cases}$$

Può essere conveniente "far partire il cronometro da zero", ossia scegliere il tempo di riferimento $t_0 = 0$. In questo modo la precdente si semplifica in:

$$\begin{cases} x(t) = v_{\text{vento}} \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h \end{cases}$$

Quello che è stato fatto nel passare dall'equazione vettoriale scritta sopra a questo sistema di due equazioni scalari è stato scomporre il moto nelle due direzioni x e y. Ciò è stato possibile grazie al fatto che l'accelerazione di gravità agisce in un'unica direzione.

Il punto di caduta, quello a $t_{\text{finle}} = t_f$, sarà caratterizzato dall'avere $y(t_f) = 0$, cioè sarà al suolo (rispetto al sistema di riferimento disegnato in figura), e $x(t_f) = x_f = 2.5$ m, come indicato nel testo dell'esercizio. Risolviamo quindi il precedente sistema per trovare questa distanza in funzione della velocità. Ricaviamo per esempio l'espressione di t_f dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} \dots \\ y(t_f) = 0 = -\frac{1}{2}g \cdot t_f^2 + h \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dots \\ t_f = +\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{cases}$$

e inseriamolo nella prima per trovare v_{vento}:

$$\begin{cases} x(t_f) = x_f = v_{\text{vento}} \cdot t_f = v_{\text{vento}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \dots \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_{\text{vento}} = x_f \sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

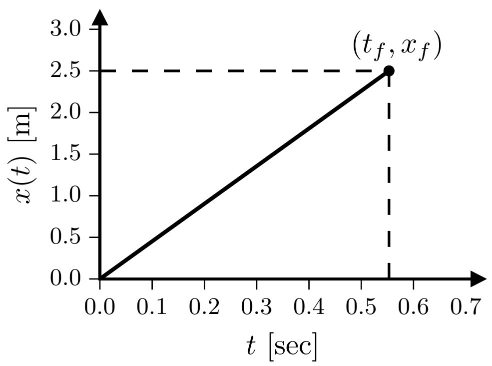
Inserendo i dati del problema otteniamo:

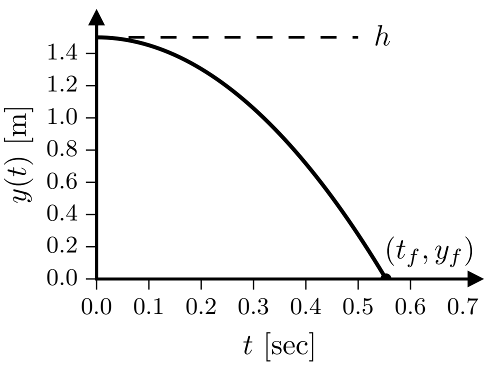
$$v_{\text{vento}} = 2.5\ \text{m}\sqrt{\frac{9.8\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 1.5\ \text{m}}} \simeq 4.52\ \text{m/s} \simeq 16.3\ \text{km/h}.$$

Questo valore è inferiore di circa il 50% rispetto a quello indicato per il vento nel precedente esercizio. Ciò non deve sorprendere; i motivi principali di tale disaccordo sono in primo luogo l'approssimazione un po' grossolana che viene fatta che i fili d'erba acquisiscano immediatamente la velocità del vento cadendo, ed in secondo luogo il fatto che quest'ultima al suolo non è la stessa che in quota, a causa di ostacoli o della sola presenza del terreno che rallenta il flusso dell'aria. Se si applica questo metodo, si ricordi quindi di correggere per un fattore circa uguale a 2 per avere una stima più ragionevole della velocità del vento in quota.

Richiami di teoria: grafici delle funzioni cinematiche (parte II)

In riferimento al presente esercizio, può essere interessante graficare le funzioni cinematiche coinvolte. Consideriamo prima di tutto quanto scritto nel sistema in alto: $x(t)$ e $y(t)$. Il primo corrisponde ad una *retta*, ossia una funzione del tipo $x(t) = a\,t + b$, mentre la seconda ad una *parabola*, una funzione del tipo $y(t) = a\,t^2 + b\,t + c$. I loro grafici sono quindi i seguenti:





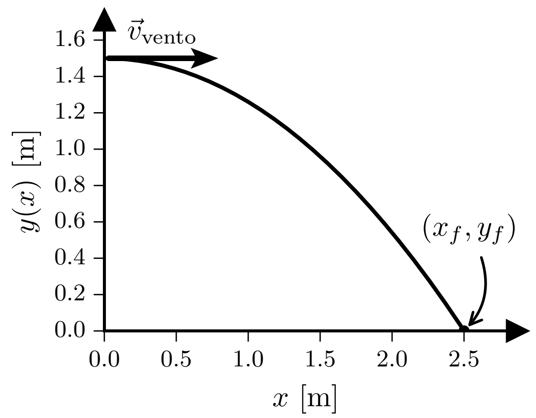
Un altro grafico interessante da realizzare può essere quello di $y(x)$, ossia della posizione verticale y in funzione di quella orizzontale x , come rappresentato "qualitativamente" nel primo disegno di questo esercizio. Per ricavare questa funzione possiamo nel sistema di equazioni scritto sopra far sparire la dipendenza dal tempo esprimendolo, dalla prima equazione, in funzione di x e v_{vento}:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_{\text{vento}}} \\ \dots \end{cases}$$

che sostituita al posto di t nella seconda equazione dà:

$$\begin{cases} \dots \\ y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{\text{vento}}^2} + h \end{cases}$$

Anche quest'ultima è una parabola, $y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, il cui grafico è:



In figura sono anche rappresentati il vettore velocità iniziale, $\vec{v}_{\text{vento}}$, ed il punto finale della caduta dei fili d'erba, (x_f, y_f).

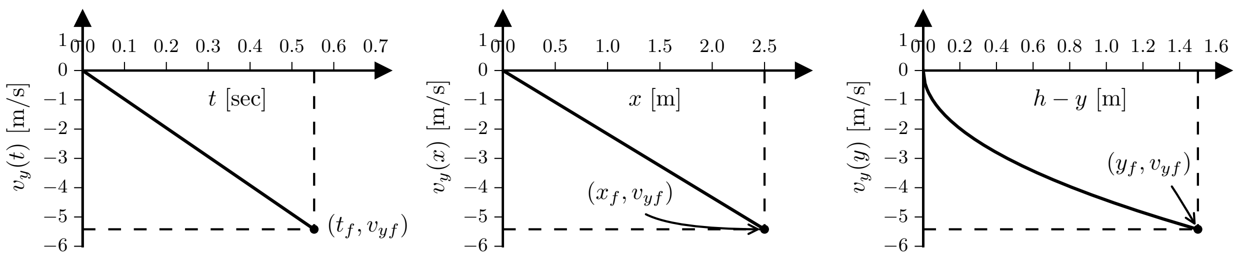
Altri grafici ai quali potremmo essere interessati sono quello della legge oraria della velocità orizzontale (lungo x), che però è *costante* e quindi non molto interessante da rappresentare, e quello della velocità verticale (lungo y), che aumenta secondo la legge oraria della velocità nel moto uniformemente accelerato richiamata ad inizio esercizio:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= a_y \cdot t + v_{0y} \\ &= -g \cdot t \end{aligned}$$

e che quindi corrisponde ad una *retta con pendenza negativa.* Oltre a questa può essere interessante descrivere anche la velocità in funzione dello spazio orizzontale (o verticale) percorso; sostituendo l'espressione per $t = x/v_{\text{vento}}$ e per $x(y) = \sqrt{2(h-y)/g} \cdot v_{\text{vento}}$ nella precedente otteniamo rispettivamente:

$$v_y(x) = -g \cdot \frac{x}{v_{\text{vento}}}, \qquad \text{e} \qquad v_y(y) = -\sqrt{2g(h-y)}$$

che corrispondono ad un'altra retta con pendenza negativa e ad una radice (negativa):



Ovviamente non è sempre richiesto disegnare tutti questi grafici ma molto spesso alcuni di loro sono utili a comprendere meglio il problema.

Esercizio 6

Cinematica, unione di due moti

Ad un tratto del romanzo di Jules Verne "Viaggio al centro della Terra" i protagonisti si accingono a discendere il cratere del vulcano Snæffels, in Islanda. Giunti difronte ad un dirupo, la guida Hans Bjelke decide (incurante della possibile presenza al di sotto di persone o dinosauri) di stimare la sua profondità lanciando un sasso e contando il tempo trascorso tra il lancio ed il rumore dell'urto col fondo. Supponendo che il tempo misurato sia $T = 6$ sec, valutare la profondità del dirupo. Non si scordi di considerare la velocità finita del suono, che dopo l'urto risale il cratere a velocità $v_s = 340$ m/s, e si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione

In questo problema si ha a che fare con la cinematica di due tipi diversi di moto; quello di caduta del sasso verso il fondo del dirupo, che come noto (si veda per esempio l'Esercizio 5) avviene, trascurando la resistenza dell'aria, ad accelerazione costante $\vec{g}$, e per tanto sarà un *moto uniformemente accelerato*, e quello del suono che risale dal fondo del dirupo dopo l'urto a velocità costante, quella del suono $v_s = 340$ m/s, e quindi sarà *moto rettilineo uniforme.*[10] Cominciamo col considerare il primo, e valutiamo il tempo t_1 impiegato dal sasso a cadere sul fondo, ad una profondità h da determinare. La legge oraria oraria per questo tipo di moto sarà data lungo la direzione verticale da:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

In questa equazione h gioca il ruolo di posizione verticale iniziale, y_0, assumendo di porre come origine del sistema di riferimento il fondo del dirupo; vedi grafico sottostante. Supponiamo che il sasso sia "lasciato semplicemente cadere" e che quindi non ci siano componenti verticali della velocità iniziale, che comparirebbero nella precedente equazione con un termine a destra del tipo $v_{y0} \cdot t$, e che influirebbero sul tempo impiegato dal sasso a raggiungere il fondo. Invece è possibile che il sasso abbia una componente orizzontale della velocità, che non influisce comunque sul suo tempo di caduta verso il fondo.

Dalla precedente è possibile valutare t_1 imponendo $y(t_1) = 0$, che corrisponde all'altezza del fondo del dirupo:

$$y(t_1) = 0 = -\frac{1}{2}g\,t_1^2 + h, \qquad \rightarrow \qquad t_1 = +\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Commento matematico sulle possibili soluzioni

Si noti che matematicamente le soluzioni dell'equazione $x^2 = a$ sono $x = \pm\sqrt{a}$, poiché entrambe la soluzione col segno "+" e quella col segno "−" una volta fatto il quadrato danno lo stesso valore a. Quindi dalla precedente avremmo dovuto ottenere anche la soluzione opposta $t_1' = -\sqrt{2h/g}$; questa tuttavia non ci interessa fisicamente poiché rappresenterebbe il tempo al quale qualcuno dal fondo del dirupo avrebbe dovuto lanciare il sasso per farlo arrivare al tempo $t = 0$ sopra da Hans, il quale lo avrebbe poi fatto ricadere nello stesso tempo. In generale la Matematica ci offre più soluzioni di quelle che ci interessano realmente per la situazione fisica determinata dal problema, ma che possono servire invece in altre circostanze simili a quella in considerazione, come potrebbe essere nel presente problema quella di valutare quanti secondi prima è partito da sotto il sasso che ci ha colpito ad un'altezza h più in su, al tempo $t = 0$.

[10] In realtà anche la velocità di propagazione delle onde sonore subisce variazioni dovute alla pressione ed alla temperatura dell'aria, e quindi all'altezza. Tuttavia queste variazioni sono apprezzabili su variazioni di altezza di chilometri e non è il caso del presente esercizio.

Valutiamo adesso il tempo t_2 che impiega l'onda sonora, muovendosi di velocità costante v_s, a risalire dal fondo del dirupo profondo h:

$$v_s = \frac{h}{t_2}, \qquad \rightarrow \qquad t_2 = \frac{h}{v_s}.$$

Quindi il tempo totale che trascorre da quando Hans lascia cadere il sasso a quando ne sente il suono sul fondo del dirupo è:

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}.$$

Notare che se avessimo scelto di trascurare la velocità di propagazione dell'onda sonora, supponendola *infinita*, il termine $t_2 = h/v_s$ (una frazione col denominatore molto grande) sarebbe stato infinitamente piccolo rispetto a t_1, ed avremmo quindi potuto approssimare:

$$\text{se } v_s \to \infty: \qquad T \approx t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Scegliamo comunque di considerare finita la velocità del suono, come è in realtà. La precedente equazione andrà risolta per trovare la profondità h del dirupo. Ci sono diversi modi in cui ciò può essere fatto matematicamente. Un modo è notare che questa non è altro che un'equazione di secondo grado; chiamando $\sqrt{h} = z (> 0)$ abbiamo:

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} z + \frac{1}{v_s} z^2$$

che scritta in forma canonica ($ax^2 + bx + c = 0$) viene:

$$\underbrace{\frac{1}{v_s}}_{a} z^2 + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{g}}}_{b} z \underbrace{-T}_{c} = 0$$

e che può essere risolta col noto metodo ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$):

$$\begin{aligned} \sqrt{h} = z &= \frac{-\sqrt{\frac{2}{g}} \pm \sqrt{\frac{2}{g} - 4\frac{1}{vs}(-T)}}{2/v_s} \\ &= v_s \left(-\sqrt{\frac{1}{2g}} \pm \sqrt{\frac{1}{2g} + \frac{T}{v_s}} \right). \end{aligned}$$

Essendo $z = \sqrt{h}$, e poiché le radici quadrate di *numeri reali* sono <u>sempre positive</u>, delle due precedenti soluzioni dovremo scegliere solo quella col segno "+" che dà infatti come risultato un numero positivo:[11]

$$\sqrt{h} = v_s\left(-\sqrt{\frac{1}{2g}}+\sqrt{\frac{1}{2g}+\frac{T}{v_s}}\right), \qquad \to \qquad h = v_s^2\left(-\sqrt{\frac{1}{2g}}+\sqrt{\frac{1}{2g}+\frac{T}{v_s}}\right)^2$$
$$= v_s\left(T+\frac{v_s}{g}-\frac{1}{g}\sqrt{v_s(v_s+2Tg)}\right)$$

Altro modo, un po' "macchinoso", per risolvere l'equazione $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{h}{v_s}$ è quello di isolare la radice da un lato ed elevare tutto al quadrato:

$$T=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{h}{v_s}$$
$$T-\frac{h}{v_s}=\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \to \qquad \left(T-\frac{h}{v_s}\right)^2=\frac{2h}{g}.$$

Attenzione che questa operazione, fatta con ingenuità, è sicura fonte di errore. Infatti, perché la precedente abbia soluzione, il termine a sinistra, $T-h/v_s$, deve essere positivo poiché uguale ad una radice, $\sqrt{2h/g}$. Elevando al quadrato questa caratteristica viene persa (il quadrato di numero è uguale a quello del suo *opposto*) e si finisce per includere anche una soluzione non fisica. Si faccia quindi attenzione nel seguito che nel risultato ottenuto deve valere la condizione $h<T\,v_s$.[12] Procediamo quindi con l'elevare al quadrato:

$$T^2v_s^2-2Tv_sh+h^2=\frac{2h}{g}v_s^2$$
$$h^2-2\left(Tv_s+\frac{v_s^2}{g}\right)h+T^2v_s^2=0$$

dove al solito è riconoscibile la struttura a equazione di secondo grado in h, che come prima può essere risolta per ottenere:

$$h=\left(Tv_s+\frac{v_s^2}{g}\right)\pm\sqrt{\left(Tv_s+\frac{v_s^2}{g}\right)^2-T^2v_s^2}$$
$$=v_s\left(T+\frac{v_s}{g}\pm\frac{1}{g}\sqrt{v_s(v_s+2Tg)}\right)$$

Come anticipato, l'unica valida delle due precedenti soluzioni (quella col segno "+" e quella col segno "−") è quella con $h<T\,v_s$; questa è chiaramente quella col segno "−", come si può notare dalla parte dentro parentesi tonde. Quindi:

$$h==v_s\left(T+\frac{v_s}{g}-\frac{1}{g}\sqrt{v_s(vs+2Tg)}\right)$$

esattamente come prima, anche se con qualche calcolo in più.

Inserendo i dati dell'esercizio otteniamo: $h\simeq 151$ m. Insomma, un bel dirupo!

[11] Si noti infatti che nell'espressione per z la seconda radice, $\sqrt{\frac{1}{2g}+\frac{T}{v_s}}$, è maggiore della prima, $\sqrt{\frac{1}{2g}}$, e quindi, avendo quest'ultima il segno "−" davanti, per avere un risultato positivo dovrò sommarle.

[12] Queste considerazioni sono analoghe a quelle che ci hanno portato col metodo precedente a scartare per z la soluzione negativa.

Esercizio 7

Cinematica, ancora traiettorie paraboliche nel moto di caduta dei gravi

Nel capitolo VI del libro "Il Principe", Nicolò Macchiavelli ci presenta la così detta "metafora dell'arciere prudente", in riferimento alle virtù che un bravo regnante dovrebbe avere. Se l'arciere per raggiungere un obiettivo lontano mira direttamente in alto (il regnante che imita ciecamente i grandi del passato) non raggiungerà comunque il cielo (i successi dei grandi) e finirà per farsi ricadere la freccia sulla testa. Se invece punta dritto davanti a sé (senza guardare affatto agli insegnamenti dei grandi) non andrà ugualmente lontano poiché la freccia finirà comunque per ricadere verso il basso.

Per risolvere il precedente dilemma, si indichi con quale angolo l'arciere deve scoccare la freccia perché questa arrivi il più lontano possibile. Si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione

Work in progress!

Metodo 1 (veloce con le derivate)

Metodo 2 (un po' più lungo ma con solo un po' di geometria)

Esercizio 8

Cinematica, cambiamento di sistema di riferimento

Si discuta se durante un acquazzone in cui cadono 5 mm di pioggia all'ora, per andare da un punto A (l'Aula di Fisica) ad un punto B (la Biblioteca) conviene camminare lentamente oppure correre per bagnarsi di meno. Si assuma di non avere ombrello o ripari durante il tragitto, e che non ci siano grondaie o alberi che possano modificare la precedente quantità di pioggia.

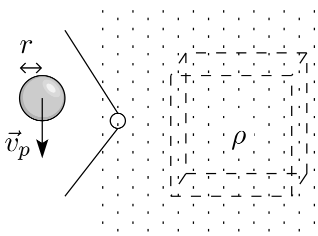
Curiosità: l'unità di misura della quantità di pioggia caduta

Il presente quesito sarà certamente venuto alla mente in qualche giornata di pioggia almeno una volta nella vita. Sorprendentemente la risposta può esser data con poche semplici nozioni di Fisica e basandoci sull'unico dato della quantità di pioggia che cade in un'ora fornito dal Meteo.

Soffermiamoci per prima cosa a riflettere sulla quantità di pioggia caduta: $q = 5$ mm/h. Può sembrare a prima vista un po' strano che una quantità di acqua venga data in millimetri; in realtà nella precedente sono nascosti un volume ed una superficie di riferimento. E' immediato verificare infatti che la precedente può essere riscritta nel modo seguente (si veda l'Esercizio 2 sui cambiamenti di unità di misura):

$$q = 5\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{h}} = 5\ \frac{\mathrm{mm}^3}{\mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{h}} = 5\ \frac{\left(\frac{1}{100}\mathrm{dm}\right)^3}{\left(\frac{1}{1000}\mathrm{m}\right)^2 \cdot \mathrm{h}} = 5\ \frac{10^6}{10^6}\frac{\ell}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{h}}$$
$$= 5\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{h}}.$$

[Si ricordino le proprietà delle potenze: $\left(10^2\right)^3 = \left(10^3\right)^2 = 10^6$] Quindi, la quantità di pioggia caduta in un'ora, 5 mm/h, corrisponde ad un volume di acqua di 5 *litri caduti su una superficie di un metro quadro in un'ora.* In questa forma è molto più comprensibile quanta acqua (in volume, ℓ) è caduta.

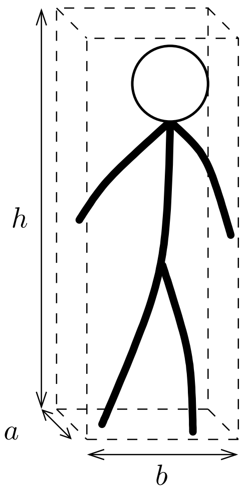


Prima di procedere, cerchiamo di legare il precedente dato alle proprietà "microscopiche" della pioggia che cade. Infatti, benché il risultato sia quello di avere per terra 5 litri di acqua su una superficie di 1 m^2 ogni ora, prima che la pioggia abbia toccato il suolo, dovrò avere la stessa quantità di acqua, sotto forma di goccioline di pioggia distribuite in un certo volume di aria, in caduta verso il suolo. Supponiamo quindi che ogni gocciolina stia cadendo con una velocità costante v_p e abbia un volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, con r il suo raggio. Inoltre dobbiamo sapere quante gocce di pioggia ci sono in un determinato volume di riferimento; chiamiamo questa quantità ρ [gocce/m^3]. Tutte queste quantità sono rappresentate nella figura a fianco. E' facile convincersi quindi che la quantità di pioggia caduta in un'ora, q, è uguale al numero di gocce di pioggia che cade nello stesso tempo su una superficie di un metro quadro, $\rho \cdot v_p$, moltiplicato per il volume di ciascuna gocciolina:

$$q = \rho \cdot v_p \cdot V.$$

Per il momento non preoccupiamoci del valore delle precedenti quantità e basiamoci solo sull'informazione di q fornita dal Meteo.

Soluzione



Per capire come modellizzare ed impostare la soluzione, supponiamo per prima cosa di descrivere le persone come parallelepipedi di base $a \times b$ e altezza h, come in figura a fianco. E' un'approssimazione grossolana, ovviamente, ma ci porta alla soluzione in modo facile e veloce. Supponiamo quindi per prima cosa di calcolare la quantità di acqua, Q, in litri che ci becchiamo *stando fermi*. Ovviamente se uno sta fermo sotto la pioggia senza andare da nessuna parte si becca una quantità enorme di acqua, fino a che il mal tempo non è finito. Scegliamo quindi di considerare solo la quantità di pioggia $Q_{\text{alto}}(t)$ che ci cadrà addosso dall'alto in un tempo t. E' facile convincersi che questa è:

$$Q_{\text{alto}}(t) = q \cdot (a\, b) \cdot t$$

dove ab è l'area della superficie superiore del parallelepipedo disegnato a fianco.

Ovviamente stare fermi sotto la pioggia, non andando da nessuna parte, non è la soluzione al precedente quesito. Dobbiamo quindi considerare di muoverci dal punto A al punto B con una velocità $v = \overline{AB}/t$, dove $\overline{AB}$ è la distanza in metri tra i due punti.

A questo punto uno guardando la formula scritta sopra potrebbe già ipotizzare che $Q(t)$ è minore tanto più è piccolo t. In effetti è così, però c'è da considerare una piccola complicazione che sicuramente sarà già nota ai più. Correre sotto la pioggia vuol dire al contempo *correre contro* questa: non riceveremo solo le gocce provenienti dall'alto ma ci beccheremo in faccia anche tutte quelle contro cui stiamo correndo. Quindi al precedente volume di acqua proveniente dall'alto dobbiamo aggiungere quella proveniente dal lato. Per analogia con quanto scritto sopra abbiamo:

$$Q_{\text{lato}}(t) = q_{\text{lato}} \cdot (a\, h) \cdot t,$$

dove $a \times h$ è l'area laterale del parallelepipedo mostrato in figura (assumendo che questo si stia muovendo orizzontalmente lungo il piano del foglio). Chi è q_{lato}? Ripetendo il ragionamento esposto alla fine della sezione precedente, possiamo scrivere q_{lato} come il prodotto della densità di gocce di pioggia, ρ, per il volume di ciascuna di loro, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, per la velocità orizzontale con la quale noi gli stiamo andando contro, a quest'ultima è semplicemente v, e quindi:

$$\begin{aligned} q_{\text{lato}} &= \rho \cdot v \cdot V = \frac{v}{v_p} \rho \cdot v_p \cdot V \\ &= \frac{v}{v_p} q \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo legato la quantità di pioggia che ci viene contro dall'alto a quella dal lato per mezzo del rapporto tra la velocità con cui cadono le gocce di pioggia e quella con cui noi corriamo da A e B.

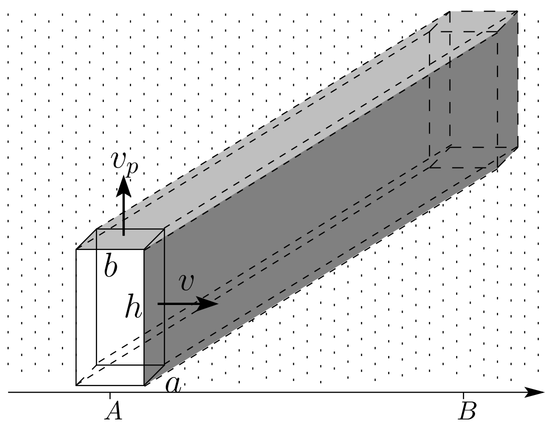
Mettendo tutto insieme, e sostituendo $t = \overline{AB}/v$, otteniamo che la quantità di pioggia che ci cade contro in questo tragitto è:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{\text{alto}} + Q_{\text{lato}} \\ &= q \cdot (a\,b) \frac{\overline{AB}}{v} + q_{\text{lato}} \cdot (a\,h) \frac{\overline{AB}}{v} = q \cdot (a\,b) \frac{\overline{AB}}{v} + \frac{v}{v_p} q \cdot (a\,h) \frac{\overline{AB}}{v} \\ &= q\,a\,\overline{AB} \left(\frac{b}{v} + \frac{h}{v_p} \right). \end{aligned}$$

Come si vede, il secondo termine tra parentesi, h/v_p, è costante e dipende solo dalla nostra statura e dalla velocità di caduta della pioggia. Quindi, indipendentemente da quanto veloce corriamo, in faccia ci becchiamo comunque la stessa quantità di pioggia. Il primo termine tra parentesi, b/v, è invece tanto più piccolo tanto più è grande la velocità con cui ci muoviamo, v, come avevamo già notato.

Per rispondere all'esercizio, in una giornata di pioggia per bagnarsi di meno converrà quindi spostarsi dal punto A al punto B quanto più velocemente possibile.

Richiami di teoria: cambiamento di sistema di riferimento



La soluzione presentata nella sezione precedente può essere facilmente interpretata e presentata visivamente operando quello che si chiama un *cambiamento di sistema di riferimento*. In generale può essere complicato il confronto tra due oggetti che si muovono indipendentemente, come in questo caso la pioggia che cade e la persona che corre; conviene spesso guardare le cose dal punto di vista di uno solo dei due oggetti, di modo che sia solo l'altro a muoversi.[13] Facciamo quindi la scelta, a prima vista un po' contro intuitiva, di metterci nel sistema di riferimento della pioggia che cade, dove le gocce sono tutte ferme l'una rispetto all'altra (fino a che non toccano il suolo), e dove è la persona a venirci contro con una velocità verticale verso l'alto v_p (con verso opposto a quella che aveva la pioggia che cadeva) ed una orizzontale v uguale a prima.

Nella figura a fianco sono mostrati dei puntini, che rappresentano le goccioline di pioggia ferme, ed il parallelepipedo (linea continua) che rappresenta il volume occupato da una persona (come

[13] Come noto dal Primo Principio della Dinamica, la Fisica, nel senso di *equazioni del moto*, è la stessa in tutti i *sistemi di riferimento inerziali*, che si muovono di moto rettilineo ed uniforme gli uni rispetto agli altri. Questo è proprio il caso del presente esercizio, per cui possiamo procedere col cambiamento di sistema di riferimento senza problemi. In generale, guardare le cose da sistemi di riferimento *non*-inerziali, tipo una giostra o una macchina in curva, causa la comparsa di quelle che si chiamano *forze apparenti*.

nella figura precedente) che si muove attraverso questi puntini, con una velocità di componenti (v_p, v). Muovendosi descrive altri due parallelepipedi, uno dato dalla base superiore per lo spazio percorso verticalmente (area ombreggiata chiara) ed uno dato dalla superficie laterale per l spazio percorso orizzontalmente (area ombreggiata scura).

E' quindi immediato capire (anche visivamente) che la quantità di pioggia ricevuta è proporzionale a questi due volumi, ed in particolare la costante di proporzionalità sarà data dalla densità di goccioline di pioggia, ρ, moltiplicata per il volume di ciascuna di loro, V:

$$\begin{aligned}
Q &= \Big[\big(a \cdot h \cdot v\Delta t\big) + \big(a \cdot b \cdot v_p \Delta t\big)\Big]\rho V \\
&= \left[\big(a \cdot h \cdot \overline{AB}\big) + \left(a \cdot b \cdot \frac{v_p}{v}\overline{AB}\right)\right]\rho V \\
&= \left[\left(a \cdot h \cdot \frac{v_p}{v_p}\overline{AB}\right) + \left(a \cdot b \cdot \frac{v_p}{v}\overline{AB}\right)\right]\rho V \\
&= a\,\overline{AB}\, v_p \rho V \left(\frac{h}{v_p} + \frac{b}{v}\right) \\
&= a\,\overline{AB}\, q \left(\frac{h}{v_p} + \frac{b}{v}\right)
\end{aligned}$$

che è esattamente il risultato trovato prima, ottenuto per mezzo di un semplice cambio di riferimento, di un disegno e di un'unica equazione. Ciò dovrebbe convincere dell'utilità dell'effettuare gli opportuni cambiamenti di sistema di riferimento per facilitare la soluzione di alcuni esercizi.

Esercizio 9

Cinematica, ancora cambiamenti di sistema riferimento

Si supponga di osservare un aereo volare perpendicolarmente alla nostra linea di vista e che, come noto, il relativo suono ci arrivi da una direzione arretrata di 30° rispetto a quella dell'aereo. Conoscendo la velocità del suono, $v_s = 340$ m/s, si stimi la velocità con cui sta viaggiando l'aereo.

Soluzione

Il *suono* è una perturbazione nella pressione di un mezzo materiale (per esempio aria, acqua o metalli) che si propaga ad una *velocità* che dipende dalle caratteristiche fisiche di quest'ultimo, come l'elasticità nel caso dei solidi, o della comprimibilità nel caso dei fluidi. Tale velocità è quindi riferita al *sistema di riferimento* in cui la parte di mezzo considerata è in quiete.

Esercizio 10

Cinematica, moto circolare uniforme - Compito, 15 gennaio 2018

Con una centrifuga che compie 600 giri/min, si vuole imprimere ad un preparato un'accelerazione centripeta di 1000 m/sec^2. Quanto deve essere lungo il braccio della centrifuga? Se si dimezza la frequenza di rotazione, quanto deve essere lungo il braccio per avere la stessa accelerazione centripeta?

Soluzione

Come evidente dal testo, si tratta di un esercizio di cinematica sul *moto circolare uniforme* nel quale è richiesto di confrontare l'accelerazione centripeta con la frequenza di rotazione ed il raggio della circonferenza, cioè il braccio della centrifuga. La relazione tra queste tre grandezze è data da:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r = (2\pi\, f)^2\, r = 4\pi^2\, f^2 r,$$

dove $\omega = 2\pi\, f$ [rad/sec] è la *velocità angolare*. Risolvendo la precedente per trovare r ed inserendo i dati del problema è immediato ottenere:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{4\pi^2\, f^2} \\ &= \frac{1000 \text{ m/sec}^2}{4\pi^2 \left(600\,\text{min}^{-1}\right)^2} = \frac{1000 \text{ m/sec}^2}{4\pi^2 \left(10\,\text{sec}^{-1}\right)^2} \\ &\simeq 25.3 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Come richiesto nella seconda domanda, ripetiamo il calcolo considerando una frequenza di rotazione dimezzata:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1000 \text{ m/sec}^2}{4\pi^2 \left(5\,\text{sec}^{-1}\right)^2} \\ &\simeq 101.3 \text{ cm} \end{aligned}$$

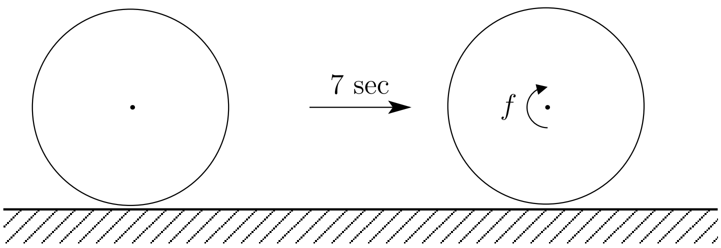
cioè quattro volte la misura del braccio del caso precedente, conseguenza della relazione quadratica tra frequenza di rotazione e accelerazione centripeta.

Esercizio 11

Cinematica, moto circolare uniformemente accelerato - Compito, 9 giugno 2017

Un auto, con ruote di diametro 60 cm, parte da ferma e accelera uniformemente per 7 secondi: al termine dell'accelerazione le ruote girano ad una frequenza di 6 Hz. Quanti giri fanno le ruote nei 7 secondi dell'accelerazione?

Soluzione



Si tratta di un problema di *cinematica* in cui viene descritto il *moto circolare uniformemente accelerato* di una ruota, che parte da ferma e dopo un tempo $t = 7$ sec raggiunge una frequenza angolare $f = 6$ Hz. Notare quindi la particolarità che non si tratta del classico esercizio sul moto *circolare uniforme*, cioè a frequenza angolare costante, o di quello sul *moto rettilineo* uniformemente accelerato; qui il corpo ruota e accelera.

Prima di procedere alla soluzione del problema, facciamo alcune osservazioni sui dati a disposizione, ed in particolare sulla *frequenza angolare finale*:

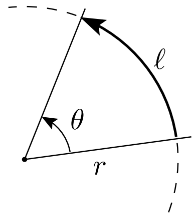
$$f = 6 \text{ Hz} = 6 \text{ "giri" al secondo.}$$

Notare che la quantità "giri" è una *grandezza adimensionale*, ossia non caratterizzata da alcuna unità di misura, in quanto *specifica* della ruota considerata nel problema. Possiamo legare questa con un'altra grandezza, sempre adimensionale ma per un altro motivo, che è l'*angolo* <u>*in radianti*</u>[14] a cui corrisponde un (angolo) giro:

$$f = 6\frac{\text{"giri"}}{\text{sec}} = 6\frac{2\pi \text{ "rad"}}{\text{sec}}\frac{\text{"giri"}}{2\pi \text{ "rad"}} \equiv \omega\frac{1}{2\pi}$$

dove nel secondo passaggio è stata fatta una *conversione di unità di misura* tra "giri" e "radianti", mentre nel terzo è stata introdotta la grandezza *velocità angolare* (omega) definita come *il numero di radianti al secondo che compie un oggetto in rotazione*,[15] e legata alla frequenza angolare dalla relazione:

$$\boxed{\omega = 2\pi\, f}$$



$$\theta \text{ "rad"} = \frac{\ell}{r}$$

Le sue unità di misura sono "radianti" al secondo. Anche i radianti sono una grandezza adimensionale in quanto definiti come *il rapporto tra la lunghezza dell'arco definito dall'angolo ed il raggio della corrispondente circonferenza*; in questo modo sparisce la dipendenza dal raggio della circonferenza e pertanto la grandezza risulta anche lei adimensionale. In Fisica è prassi non riportare il nome di grandezze adimensionali e per questo i loro nomi sono stati scritti tra virgolette e di qui in avanti omessi. Per esempio il fattore "giri"/2π"rad" $= 1/2\pi$.

La velocità angolare è una grandezza molto importante in Fisica in quanto svolge un ruolo del tutto analogo a quello della velocità "lineare", $\vec{v}$, come vedremo a breve.

Tornando al problema, prendiamo in considerazione due modi diversi per risolverlo:

Metodo 1 (rozzo)

Possiamo considerare il moto del centro della ruota che, "ruotando su sé stesso", descrivere in realtà una traiettoria rettilinea (osservare l'asse della ruota della bicicletta per credere), e trasformare il problema in uno di moto rettilineo uniformemente accelerato, tornando alla fine dei conti indietro a considerare il moto della ruota rispetto al centro.

Prima di tutto, nota la velocità angolare ω è possibile ottenere (il modulo de) la velocità ("lineare" istantanea) $v = d\ell/dt$ tramite (vedi figura, considerando variazioni infinitesime):

$$v = \frac{d\ell}{dt} = \frac{r\,d\theta}{dt} = r\omega = 2\pi r\, f$$

dove nella terza uguaglianza è stata espressa la velocità angolare come derivata della posizione angolare $\theta(t)$ rispetto al tempo, $\omega = d\theta(t)/dt$, in modo del tutto analogo a quella che è la definizione di velocità.

Quella scritta sopra è la velocità di un punto sulla ruota rispetto al centro (supposto fermo). Cambiando "prospettiva" (formalmente: cambiando *sistema di riferimento*) possiamo osservare che quella è anche la velocità del *centro* rispetto ad un punto della ruota supposto fermo, come lo è istantaneamente il punto di contatto tra la ruota ed il suolo (vedere figura all'inizio del problema). Ma quindi la precedente è anche la velocità del centro della ruota rispetto al suolo stesso, o ancora rispetto all'osservatore esterno che sta guardando il moto della bicicletta. Essendo questo

[14] Ricordare la regola di conversione: x "rad" $= x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$. Il vantaggio di utilizzare questa unità di misura per gli angoli consiste nel fatto di avere formule trigonometriche molto più semplici di quelle che si avrebbero coi gradi sessagesimali. Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ in radianti.

[15] Per essere precisi al 100%, anche la velocità angolare ω dovrebbe essere una grandezze vettoriale come la velocità lineare $\vec{v}$. Infatti per caratterizzare un moto rotatorio non è sufficiente dare solo il modulo della grandezza che descrive la rotazione, ma serve chiarire anche l'*asse attorno al quale il corpo ruota*, ed in che *verso*. Tuttavia queste informazioni vengono solitamente chiarite in modo univoco nel testo del problema e quindi la grandezza $\vec{\omega}$ è in generale ben caratterizzabile unicamente dal suo modulo $|\vec{\omega}| = \omega$.

un moto ad accelerazione costante, data da:

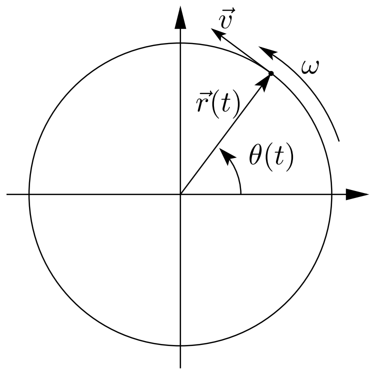
$$a = \frac{v}{t} = \frac{r\omega}{t} = \frac{2\pi r\, f}{t},$$

possiamo scrivere la legge oraria del centro come (*moto uniformemente accelerato*, con partenza da fermo e da posizione di riferimento $s_0 = 0$):

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}v \cdot t.$$

Per capire a quanti giri di ruota corrisponde bisogna dividere questa lunghezza per quella che corrisponde ad un solo giro, ossia la misura della circonferenza:

$$N^\circ \text{ giri} = \frac{s(t)}{2\pi r} = \frac{1}{2}\frac{v \cdot t}{2\pi r} = \frac{1}{2}\frac{r\omega}{2\pi r}t = \frac{1}{2}f \cdot t.$$



Numericamente, coi dati del problema:

$$\boxed{N^\circ \text{ giri} = \frac{1}{2}f \cdot t = 21}$$

Metodo 2 (ingegnoso)

Dal precedente metodo dovrebbe essere chiaro il parallelismo tra la descrizione del moto circolare (generico) con variabili angolari e con variabili lineari. Invece di fare due conversioni proviamo quindi a risolvere l'intero problema usando solo variabili angolari.

Breve riassunto di "cinematica del cerchio":

- Un corpo in quiete su una circonferenza (di raggio noto) sarà caratterizzato completamente dalla sua coordinata (posizione) angolare:

$$\theta(t) = \theta_0 = cost. \qquad (\omega = 0).$$

- Un corpo in moto circolare uniforme sarà caratterizzato da:

$$\omega = cost., \qquad \theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0.$$

- Un corpo in moto circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = cost. \qquad \omega(t) = \alpha \cdot t + \omega_0, \qquad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0,$$

  [Confrontare con la legge oraria per il moto uniformemente accelerato: $s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$]

  dove è stata introdotta l'*accelerazione angolare* (alfa), in modo completamente analogo all'accelerazione "lineare", come la derivata della velocità angolare rispetto al tempo:

$$\alpha = \frac{d\,\omega(t)}{dt}$$

  [Confrontare con $a = \frac{d\,v(t)}{dt}$ del moto lineare] che nel caso di moto uniformemente accelerato ($\alpha = cost.$) è uguale all'accelerazione angolare media:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t) - \omega_0}{t - t_0}.$$

Sostituendo i dati del problema ($\theta_0 = 0, \omega_0 = 0$) nella precedente legge oraria del moto circolare uniformemente accelerato otteniamo immediatamente:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{t}\right)t^2 = \frac{1}{2}\omega \cdot t = \frac{1}{2}2\pi\, f \cdot t.$$

Questo è l'angolo "percorso" in un tempo t nel problema. Per trovare il numero di giri (analogamente a quanto fatto prima) dividiamo il precedente per l'angolo corrispondente ad un giro, ossia 2π:

$$N^\circ \text{ giri} = \frac{\theta(t)}{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{2\pi}t = \frac{1}{2}f \cdot t = 21$$

come prima ma con molti meno passaggi.

Esercizio 12

Caduta dei gravi, moto parabolico in due dimensioni

Il bancone della farmacia è alto 80 cm. Il farmacista prende una scatola di Aspirine e accidentalmente la fa scivolare giù dal bancone. La velocità iniziale della scatola è di 30 cm/s. Dove cade la scatola?

Soluzione

Il problema descrive la caduta di una scatola di aspirine. Il motivo per cui ciò avvenga, la forza di gravità, è ben noto quindi ci concentreremo solo sull'aspetto *cinematico* della cosa, ossia la sola descrizione di questa caduta.

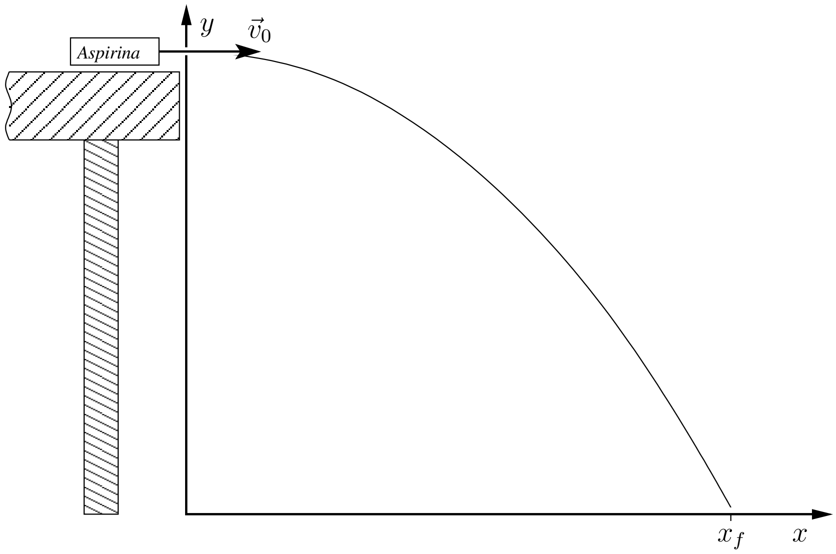
Il moto è uniformemente accelerato, per la presenza dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ in modulo direzione e verso costante, e si svolge in *due dimensioni*: una direzione verticale lungo la quale agisce $\vec{g}$, ed una orizzontale, come il bancone della farmacia, e che definisce la direzione della velocità iniziale $\vec{v}_0$:

$$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{s}_0.$$

Possiamo scegliere un sistema di riferimento come quello in figura col quale rappresentare le componenti (verticali e orizzontali, o "x e y") delle precedenti grandezze vettoriali, con un asse verticale come la direzione in cui agisce la gravità ed uno orizzontale come il bancone. In questo modo abbiamo: $\vec{s}_0 = \big(0, y_0\big)$, dove y_0 è l'altezza del tavolo, $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$ e $\vec{a} = (0, -g)$, dove il segno "$-$" deriva dal fatto che la gravità è diretta in verso opposto a quello dell'asse y. Ottengo quindi il sistema di equazioni del moto in $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + y_0 \end{cases}$$

Risolvendo t in funzione di x, è possibile riscrivere la legge oraria nella forma $y(x)$, eliminando quindi la dipendenza esplicita dal tempo (non è più una legge oraria!) ed esprimendo la coordinata y della traiettoria del moto in funzione della coordinata x. In questo modo otteniamo



l'*equazione della traiettoria*:

$$t = \frac{x}{v_0}, \quad \rightarrow \quad \boxed{y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + y_0}$$

che descrive nello spazio la parabola caratteristica del *moto parabolico* dei gravi, soggetti ad una accelerazione costante; vedi figura.

Per la scelta del sistema di coordinate, il punto del pavimento che toccherà la confezione di Aspirine è caratterizzato da avere coordinata $y = 0$, per cui la distanza x_f dal tavolo sarà data dalle soluzioni dell'equazione di secondo grado in x:

$$y = 0 = -\frac{g}{2v_0^2} x_f^2 + y_0, \quad \rightarrow \quad x_f^2 = \frac{2v_0^2 y_0}{g}$$

$$\boxed{x_f = \pm v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}}.$$

Notare che matematicamente otteniamo due soluzioni; una a destra del bordo del tavolo (quella col "+", rappresentata in figura) e una a sinistra (col "−"). La prima rappresenta la risposta corretta al problema e descrive un oggetto che è caduto al suolo, mentre la seconda rappresenta la soluzione al "problema speculare" del lancio da terra di una scatola di Aspirine, che deve arrivare sul tavolo all'istante $t = 0$ con esattamente velocità $\vec{v}_0$.

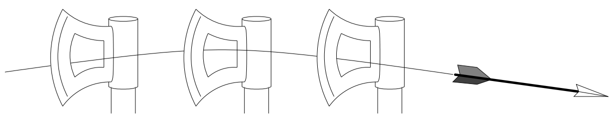
Inserendo i numeri: $x_f \simeq 12$ cm.

Esercizio 13

Cinematica, ancora caduta di gravi

Nel canto XXI dell'Odissea, Omero racconta di quando Odisseo (Ulisse, in latino), una volta tornato nella natia Itaca per riconquistare la mano della moglie Penelope ed il proprio regno, dovette affrontare una sfida, proposta da quest'ultima su suggerimento di Atena, apparentemente impossibile. La prova consisteva nello scoccare una freccia, con l'arco donato da Ifito, facendola passare attraverso l'anello di dodici scuri (asce). Tra i Proci, "subdoli pretendenti al trono di Itaca", Leode ed il "divino" Eurimaco falliscono miseramente. Posizionandosi a 10 metri dalla *prima scure e sapendo che queste sono distanti un metro l'una dall'altra e che hanno un apertura verticale di soli 5 cm, con che velocità e angolo di inclinazione deve Odisseo, "uomo dal multiforme ingegno", scoccare la freccia per superare la prova?*

Soluzione



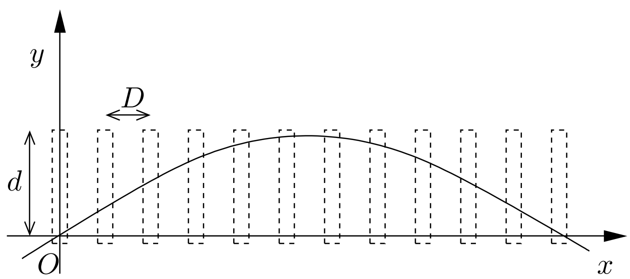
Una volta scoccata la freccia, quest'ultima sarà in prima approssimazione (trascuriamo l'attrito dell'aria) soggetta unicamente alla forza di gravità; quindi, come il precedente, anche questo sarà un problema di *caduta dei gravi.* Per semplicità trascuriamo tutti i dettagli sulla forma della freccia e le conseguenze di queste sul suo volo (tipo la punta o l'*impennaggio* posteriore per stabilizzarla). In pratica, come d'abitudine in questi esercizi di Fisica, approssimiamo la freccia come se fosse un *corpo puntiforme.*

La rappresentazione schematica della freccia e delle scuri è disegnata nella figura a fianco. Intuitivamente si capisce che il caso più facile per Odisseo, quello con velocità minore, è quello con la traiettoria maggiormente curvata, che si verifica quando la freccia sfiora il bordo inferiore dell'apertura della prima e dell'ultima scure, e il bordo superiore della scure al centro, come in figura. Nel caso del poema, avendo un numero pari (12) di scuri, la freccia dovrà sfiorare il bordo superiore delle due scuri al centro.

Dall'Esercizio 12 sappiamo che il moto di caduta di un grave descrive una parabola, ossia una funzione del tipo:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

con a, b e c dei coefficienti che determinano la forma della parabola. Mettendo l'origine degli assi in corrispondenza del bordo inferiore della prima scure, le precedenti considerazioni qualitative (vedi disegno sopra) possono essere tradotte in un grafico cartesiano come quello mostrato in basso a destra, dove la linea curva rappresenta la traiettoria parabolica della freccia mentre i profili tratteggiati rappresentano le aperture delle scuri.



Con questa scelta dell'origine O degli assi cartesiani, l'equazione che descrive il moto della freccia rispetto alle scuri si semplifica molto; prima di tutto, dovendo passare dall'origine, l'equazione a destra dell'uguaglianza dovrà essere un'*equazione di secondo grado spuria*, ossia col coefficiente $c = 0$, di modo che $(x, y) = (0, 0) = O$ sia una soluzione (provare per credere!), cioè il grafico della funzione passi dall'origine, corrispondente al bordo inferiore nella prima scure. L'altra soluzione deve invece corrispondere al punto $(11 \cdot D\,,\, 0)$ corrispondente al bordo inferiore ($y = 0$) dell'ultima scure ($x = 11 \cdot D$), dove $D = 1$ m è la distanza tra due scuri. Per quanto detto, il membro a destra della precedente equazione deve essere proporzionale a:

$$x\,(x - 11 \cdot D) = x^2 - 11D\,x.$$

Per determinare la costante di proporzionalità tramite cui eguagliarla alla y dobbiamo ricordare la condizione che nel punto più alto, al centro ($x = \frac{11}{2}D$), l'altezza deve essere uguale all'apertura del foro delle scuri, $y(\frac{11}{2}D) = d$, per cui chiamando questa costante di proporzionalità A, andiamo a risolvere l'equazione:

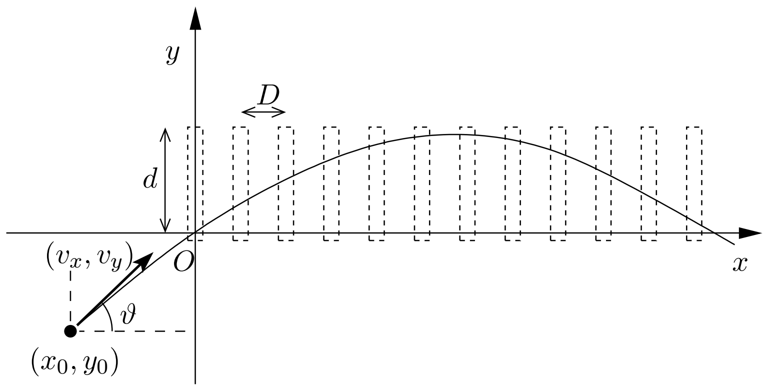
$$y(x) = A \cdot x\big(x - 11D\big)$$
$$y\big(\tfrac{11}{2}D\big) = d = A \cdot \tfrac{11}{2}D\Big(\tfrac{11}{2}D - 11D\Big)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo sostituito la condizione al centro della parabola disegnata sopra, $x = \frac{11}{2}D$ e $y\big(\frac{11}{2}D\big) = d$. E' immediato risolvere la precedente equazione per trovare A:

$$A = -d\left(\frac{2}{11D}\right)^2,$$

per cui l'equazione della freccia dovrà essere:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= -d\left(\tfrac{2}{11D}\right)^2 x\big(x - 11D\big) \\ &= -d\left(\tfrac{2}{11D}\right)^2 x^2 + d\tfrac{4}{11D}x \end{aligned}}$$



Questo risultato descrive il moto della freccia attraverso gli anelli delle scuri in funzione della loro apertura d e distanza D. Dobbiamo quindi legarlo con la legge oraria del *moto parabolico di caduta dei gravi* nota la loro posizione e velocità iniziali (entrambe grandezze vettoriali: (x_0, y_0) e (v_x, v_y)). Riprendendo le considerazioni fatte nell'Esercizio 12, abbiamo che il moto lungo x è rettilineo e uniforme, con velocità v_x, mentre quello lungo y è uniformemente accelerato, con accelerazione (verso il basso, segno negativo opposto alla freccia dell'asse delle ordinate) $-g$ e velocità iniziale v_y. Supponendo che la freccia venga scagliata da Odisseo dal punto (x_0, y_0) possiamo scrivere le due leggi orarie, lungo x e lungo y:

$$\begin{cases} x(t) = v_x \cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y \cdot t + y_0 \end{cases}$$

La precedente equazione è la versione più generale di quella dell'Esercizio 12. Come fatto in quest'ultimo caso, procediamo a risolverla trovando per prima cosa t dalla prima equazione

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_x}$$

e poi andandolo a sostituire nella seconda (che diventa funzione di x e non più di t):

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= -\tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{x - x_0}{v_x}\right)^2 + v_y\tfrac{x - x_0}{v_x} + y_0 \\ &= -\tfrac{g}{2v_x^2}x^2 + \tfrac{1}{v_x}\left(\tfrac{g\,x_0}{v_x} + v_y\right)x - \tfrac{g\,x_0^2}{2v_x^2} - \tfrac{v_y x_0}{v_x} + y_0 \end{aligned}}$$

La precedente è l'equazione della traiettoria del moto parabolico più generale, per arbitrari valori della posizione iniziale (x_0, y_0) e della velocità iniziale (v_x, v_y).

Per trovare la velocità con cui Odisseo deve scagliare la freccia dobbiamo confrontare le equazioni delle traiettorie contenute nei due precedenti riquadri, la prima ottenuta dalla condizione che la freccia passi attraverso gli anelli delle scuri e la seconda da quelle di moto parabolico. Espandiamole entrambe in potenze della x per facilitarne il confronto come equazioni di secondo grado (del tipo $ax^2 + bx + c$):

$$\underbrace{-d\left(\frac{2}{11D}\right)^2}_{a} x^2 + \underbrace{d\frac{4}{11D}}_{b} x + \underbrace{0}_{c} = \underbrace{-\frac{g}{2v_x^2}}_{a} x^2 + \underbrace{\frac{1}{v_x}\left(\frac{g\,x_0}{v_x} + v_y\right)}_{b} x \underbrace{-\frac{g\,x_0^2}{2v_x^2} - \frac{v_y x_0}{v_x} + y_0}_{c}.$$

Perché i due termini a destra e sinistra dell'uguaglianza siano uguali, i vari coefficienti della x e delle sue potenze, a, b e c, devono essere uguali a destra e sinistra. Questo ci fornisce tre (una per ogni coefficiente) equazioni da cui ricavare le quantità ignote v_x, v_y e y_0 (anche se quest'ultima non è esplicitamente richiesta dal problema):

$$\begin{aligned}
a: &\qquad -d\left(\frac{2}{11D}\right)^2 = -\frac{g}{2v_x^2} &&\Rightarrow\quad v_x = \frac{11D}{2}\sqrt{\frac{g}{2d}}\\
b: &\qquad d\frac{4}{11D} = \frac{1}{v_x}\left(\frac{g\,x_0}{v_x} + v_y\right) &&\Rightarrow\quad v_y = \frac{4d\,v_x}{11D} - \frac{g\,x_0}{v_x}\\
c: &\qquad 0 = -\frac{g\,x_0^2}{2v_x^2} - \frac{v_y x_0}{v_x} + y_0 &&\Rightarrow\quad y_0 = \frac{x_0(2v_x v_y + g\,x_0)}{2\,v_x^2}
\end{aligned}$$

Inserendo i numeri ($x_0 = -10$ m, poiché si trova a sinistra dell'origine degli assi), dalla prima equazione otteniamo $v_x \simeq 54.4$ m/s; inserendo questo nella seconda otteniamo $v_y \simeq 2.8$ m/s (e dalla terza $y_0 \simeq -35$ cm).[16] Ripetendo la procedura vista in Esercizio 1, è immediato calcolare il *modulo della velocità iniziale*:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \simeq 54.5 \text{ m/s} = 196.2 \text{ km/h}}$$

un po' veloce per una feccia in legno (probabilmente l'arco era magico o le frecce in alluminio o fibra di carbonio come quelle moderne, che vengono scoccate anche a 300 km/h). L'*angolo di inclinazione* invece si ottiene da:

$$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x} \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\vartheta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \simeq 0.05 \text{ rad} \simeq 2.9\hat{}\backslash circ}$$

Spoiler sul finale dell'Odissea

Odisseo riesce a superare la prova, facendosi così riconoscere dalla moglie Penelope. Al suo fianco torna a regnare su Itaca, ovviamente dopo essersi vendicato dei Proci e dei servi infedeli.

Esercizio 14

Cinematica, intersezione tra due leggi orarie

Un farmacista torna a casa col motorino. Passa da una strada in cui il limite di velocità è di 50 km/h *ma lui va a* 75 km/h*. Per questo motivo i vigili iniziano a rincorrerlo accelerando a* 2.5 m/s^2*. Quanta strada è stata fatta dal momento in cui la pattuglia è partita? Dopo quanto tempo la polizia ferma il farmacista?*

[16] Alla luce anche di questi risultati, si faccia attenzione che i grafici mostrati NON sono in scala ed hanno il solo scopo di una rappresentazione qualitativa del problema.

Soluzione

Si tratta di un esercizio di cinematica, in cui vengono messi in relazione due moti, quello del farmacista, $\vec{s}_{\text{farm}}(t)$, e quello dell'auto della polizia, $\vec{s}_{\text{pol}}(t)$. Il primo è un moto rettilineo ed uniforme, descritto dalla *legge oraria*:

$$\vec{s}_{\text{farm}}(t) = \vec{v}_{\text{farm}} \cdot (t - t_0) + \vec{s}_{0\,\text{farm}},$$

mentre il secondo è un moto uniformemente accelerato, con partenza da fermo $\vec{v}_{0\,\text{pol}} = 0$:

$$\vec{s}_{\text{pol}}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_{\text{pol}} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{s}_{0\,\text{pol}}.$$

Le precedenti sono equazioni vettoriali. Possiamo semplificarle facendo alcune scelte sulla descrizione delle grandezze vettoriali coinvolte. Per prima cosa, possiamo scegliere come origine del sistema di coordinate l'istante ed il luogo nel quale il farmacista sfreccia davanti alla volante della polizia; quindi $t_0 = 0$ è l'istante al quale parte l'inseguimento, e $\vec{s}_{0\,\text{farm}} = \vec{s}_{0\,\text{pol}} = 0$ è la posizione nella quale avviene il fatto e da cui parte l'inseguimento. Questo corrisponde a fissare il *punto di applicazione* a partire dal quale misuro le posizioni (vettoriali) di farmacista e polizia. Ancora, prendendo come riferimento la strada, che fissa la *direzione* del moto, le grandezze vettoriali scritte nelle precedenti equazioni sono completamente descritte dal loro valore numerico, che ne fissa il *modulo*, e dal segno di questo, che ne fissa il *verso*.

Mettendo insieme tutte queste considerazioni, le precedenti leggi orarie possono essere riscritte:

$$\begin{aligned} s_{\text{farm}}(t) &= v_{\text{farm}} \cdot t, \\ s_{\text{pol}}(t) &= \frac{1}{2}a_{\text{pol}} \cdot t^2. \end{aligned}$$

La condizione per cui la polizia alla fine dell'inseguimento raggiunga il farmacista è che deve esistere un tempo t_f ed una posizione $\overset{(\to)}{s}(t_f) = \overset{(\to)}{s}_f$ alla quale farmacista e polizia vengano a trovarsi contemporaneamente:

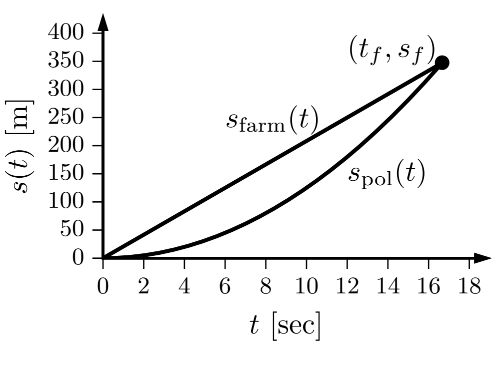
$$s_f = s_{\text{farm}}(t_f) = s_{\text{pol}}(t_f).$$

Per trovare questa soluzione, dobbiamo imporre che le due precedenti leggi del moto valgano contemporaneamente, ossia che costituiscano un *sistema di equazioni* da risolvere simultaneamente. Togliendo i pedici "farm" e "pol", poiché per quanto detto le posizioni devono essere le stesse, possiamo riscrivere

$$\begin{cases} s(t) = v \cdot t \\ s(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \end{cases}$$

che dobbiamo risolvere simultaneamente per trovare s_f e t_f in funzione di v e di a. Per esempio, eguagliando le espressioni per $s(t)$ nelle due equazioni, abbiamo:

$$v \cdot t_f = \frac{1}{2}a \cdot t_f^2 \quad \to \quad v \cdot \cancel{t_f} = \frac{1}{2}a \cdot t_f^{\cancel{2}} \quad \to \quad \boxed{t_f = \frac{2\,v}{a}}$$



e sostituendo nella prima delle leggi orarie dà:

$$s(t_f) = \boxed{s_f = \frac{2\,v^2}{a}}.$$

Le precedenti danno rispettivamente il tempo impiegato dalla polizia per fermare il farmacista, e la strada fatta dal momento in cui la polizia ha dato inizio all'inseguimento.

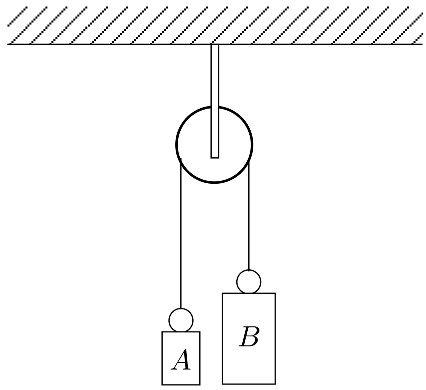
Inserendo i numeri, e fatte le opportune conversioni di unità di misura, otteniamo: $t_f \simeq 16.7$ sec e $x_f \simeq 347\,\mathrm{m}$.

Esercizio 15

Dinamica, caduta di corpi legati ad una carrucola - Compito, 17 luglio 2017

Due corpi (A e B) sono collegati tra di loro da un filo inestensibile di massa trascurabile. Il corpo A ha massa pari ad 1 kg. Le due masse vengono appese ad una puleggia (carrucola). Quando le due masse sono lasciate libere di muoversi, la massa B cade con un'accelerazione pari a 1.2 m/sec^2. Quanto vale la massa del corpo B?

Richiami di teoria: metodo delle Forze



Il problema descrive la *dinamica* di caduta di due corpi facendo riferimento alla loro massa e accelerazione; il legame tra queste due quantità è dato dal *secondo principio della Dinamica*:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

dove $\vec{F}$ è la *risultante* di tutte le forze applicate su ciascun corpo (supposto puntiforme ai fini del problema poiché non viene fatto riferimento nel testo ad alcuna sua dimensione o alla possibilità che possa ruotare).

Per risolverlo possiamo quindi utilizzare il così detto *metodo delle forze* che sfrutta le precedenti *equazioni del moto* (il secondo principio della Dinamica in cui l'incognita è $\vec{s}(t)$ e le sue derivate) per trovare l'accelerazione e quindi la legge oraria, oppure trovare quali sono le condizioni sulle grandezze che entrano nelle precedenti equazioni del moto, in questo caso la massa m_B, perché sia data la particolare legge oraria.[17]

Nello specifico il metodo delle forze consiste nei seguenti passaggi:

0. Rappresentare con schemi e disegni il testo del problema, anche più di uno e da differenti prospettive. Aggiungere le frecce corrispondenti alle *forze* al disegno;

- -

1. Disegnare i *diagrammi di corpo libero* per ognuno dei corpi che costituiscono il sistema;

2. Scrivere in un sistema le equazioni del moto di ciascun corpo, aggiungendo eventuali vincoli dinamici, come la condizione di esser legati insieme da un filo (e quindi avere stese accelerazioni e velocità in modulo);

- -

3. Scegliere un sistema di riferimento (eventualmente anche uno diverso per ogni corpo, facendo le dovute conversioni) rispetto al quale riscrivere le precedenti equazioni in una forma più semplice. Per esempio, una scelta saggia è sempre quella di isolare quantità incognite o non di interesse in un'unica equazione;

4. Risolvere le precedenti per trovare le leggi orarie per ogni corpo.

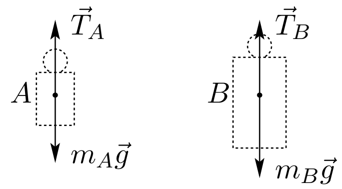
[17] Nell'Esercizio 21 verrà invece descritto quello che si chiama il *metodo dell'energia*, un'altra serie di linee guida per risolvere problemi di dinamica in condizioni leggermente diverse da quelle del presente problema ma comunque equivalente ai fini dei risultati; vedere l'Esercizio 22.

Il primo punto serve semplicemente per comodità ma spesso risulta fondamentale per una buona comprensione e visualizzazione del problema; a volte viene dato già un disegno a corredo del testo e quindi risulta superfluo (ma non sempre). I punti (1) e (2) sono quelli puramente di dinamica mentre il (3) ed il (4) riguardano più l'aspetto cinematico. In molte circostanze non è richiesto di risolvere fino in fondo il punto (4).

Soluzione

Applichiamo ora quanto discusso precedentemente al semplice problema della carrucola considerato.

1. I *diagrammi di corpo libero* sono costituiti da semplici figure in cui si considera un corpo alla volta, rappresentato in modo schematico (un puntino è sufficiente se non ha rilevanza la sua struttura e non si considerano le rotazioni), e su di esso si disegnano delle frecce che rappresentano le forze applicate. Questo tipo di diagramma può semplificare la comprensione delle forze e dei movimenti agenti su di un corpo, suggerire i concetti adeguati da applicare per risolvere le equazioni del moto e la scelta del sistema di riferimento migliore per farlo (vedi punto (3)). Nel caso della carrucola del problema, i diagrammi corrispondenti alle due masse sono i seguenti:

   dove oltre ai pesi degli oggetti, rispettivamente $m_A\vec{g}$ e $m_B\vec{g}$, sono state disegnate le *tensioni* della fune che li tiene sospesi, $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$.

   Uno potrebbe pensare di dover disegnare anche i diagrammi di corpo libero per la corda e per la puleggia ma grazie ad alcune semplici considerazioni fisiche ciò risulta superfluo. Cominciamo dalla *corda*; una "dicitura" (assunzione) standard nei problemi di Fisica è che questa sia *inestensibile* e *priva di massa*. Il fatto che sia inestensibile significa che la sua lunghezza resta invariata e che quindi le sue parti rimangono ferme le une rispetto alle altre. In pratica quindi le forze vengono trasferite inalterate da una all'altra di queste parti e nel complesso da un capo all'altro della corda (come noto per esempio dal gioco del *tiro alla fune*). Su ogni elementino di fune possiamo quindi immaginare applicate le due forze (tensioni) $\vec{T}_A$ e $\vec{T}_B$, trasferite anche alle masse. Tuttavia, essendo la fune priva di massa, risulta immediatamente dalla corrispondente equazione del moto che:

   $$\vec{T}_A + \vec{T}_B = m_{\text{fune}} \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a}, \qquad \rightarrow \qquad \vec{T}_A = -\vec{T}_B$$

   ossia le tensioni ai capi della fune sono uguali (in modulo) ed opposte (in verso). Lo stesso vale per le tensioni applicate sulle masse.

   Non ci interesseremo invece della puleggia che ha il solo scopo di cambiare il verso alla corda ed alle tensioni lungo di essa: $\vec{T}_B \rightarrow -\vec{T}_B$ tra un capo e l'altro (e analogo per $\vec{T}_A$); l'unico effetto che produrrà sarà quindi quello di dare accelerazioni con versi opposti ai corpi m_A e m_B, cioè rispettivamente in salita ed in caduta.

2. Le equazioni del moto per le due masse sono dunque:

   $$\begin{cases} m_A\vec{a}_A = \vec{T}_A + m_A\vec{g} \\ m_B\vec{a}_B = \vec{T}_B + m_B\vec{g} = +\vec{T}_A + m_B\vec{g} \end{cases}$$

a queste va aggiunta la "*condizione di fune*" che anche le masse m_A e m_B, essendo legate alla fune, non possono accelerare rispetto ad essa (come se fossero sue parti) e quindi un osservatore che guarda la carrucola vedrà:

$$\vec{a}_A = -\vec{a}_B.$$

3. Scegliamo un opportuno *sistema di riferimento* per analizzare il moto delle due masse. Sviluppandosi questo in verticale, l'unica scelta sensata è scegliere un sistema di riferimento con un asse verticale e verso positivo (per convenzione nostra, la scelta opposta va altrettanto bene) verso l'alto. Il precedente sistema di equazioni vettoriali si può riscrivere in componenti rispetto a questo sistema (tutte le componenti non verticali sono nulle):

$$\begin{cases} m_A a_A = T - m_A g \\ m_B a_B = T - m_B g \\ a_A = -a_B \end{cases}$$

che rappresenta un sistema di *tre equazioni in tre incognite* (T, a_A e a_B) e può essere quindi risolta immediatamente, eliminando prima di tutto la dipendenza da T (omesso il pendice tanto sono uguali):

$$\begin{cases} m_A(g - a_B) = T \\ m_B(a_B + g) = T \\ \dots \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad m_A(g - a_B) = m_B(a_B + g),$$

$$\boxed{m_B = \frac{g - a_B}{g + a_B} m_A}$$

che coi dati del problema (attenzione che $a_B = -1.2\ \mathrm{m/s^2}$ poiché scende, e quindi ha un valore negativo della sua componente verticale) dà: $m_B \simeq 1.28$ kg.

4. Come preannunciato, il problema non richiede di risolvere le equazioni del moto per trovare la legge oraria (che comunque è quella del moto uniformemente accelerato, essendo l'accelerazione costante).

Esercizio 16

Dinamica, caduta di corpi legati a più carrucole: come il precedente ma più difficile

Si consideri la configurazione rappresentata nella figura sottostante, in cui due corpi (A e B) sono collegati tra di loro da un filo inestensibile di massa trascurabile, e appese ad una puleggia (carrucola), anch'essa di massa trascurabile. Quest'ultima invece di essere appesa al muro (come nell'Esercizio 15) è legata tramite un filo inestensibile e privo di massa, passante attraverso una seconda carrucola, ad una massa C posta su di un piano privo di attrito. Sapendo che i valori delle tre masse sono rispettivamente 1, 2 e 3 kg, calcolare la tensione della fune che sorregge la carrucola e l'accelerazione della massa C.

Soluzione

Work in progress!

Esercizio 17

Dinamica, moto circolare uniforme e forza centrifuga

In molti film di fantascienza, tra cui "2001: Odissea nello Spazio" di Stanley Kubrick e "Interstellar" di Christopher Nolan, per ricreare artificialmente la gravità nello spazio, vengono mostrate astronavi o stazioni spaziali con una sezione circolare rotante, dove per effetto della forza centrifuga chi vi sta all'interno ha l'impressione di subire una forza radiale "analoga a quella di gravità". Per esempio nel film del 2015 "The Martian - Soprevvissuto", con Matt Damon, regia di Ridley Scott, l'astronave "Hermes" dei protagonisti ha una sezione centrale rotante a forma di circonferenza di raggio 20 m. Dal romanzo da cui è stato tratto il film sappiamo che questa, per effetto della rotazione, è in grado di generare una "gravità artificiale" con accelerazione pari al 40% di g. Stimare con che periodo deve ruotare questa sezione di astronave per generare tale forza.

Soluzione

Work in progress!

Esercizio 18

Dinamica, moto circolare

Nel film di Steven Spielberg "E.T. l'extraterrestre" si vede una scena in cui i due protagonisti, il bambino e l'alieno, andando in bicicletta su una collina, che possiamo approssimare come un avente un profilo circolare di raggio r, ad un certo punto si staccano da essa cominciando a volare. Tralasciando l'aspetto "magico", qual è la velocità minima alla quale è possibile che si stacchino, in salita, da metà dell'altezza della collina?

Soluzione

Work in progress!

Esercizio 19

Dinamica, forza d'attrito e direzione ottimale

Si supponga di trascinare una cassa di massa m lungo un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 1$ (molto alto) con una forza in modulo costante $\vec{F}$. Si indichi per quale angolo della forza rispetto al piano l'accelerazione orizzontale della cassa è massima.

Richiami di teoria: forza d'attrito e reazione vincolare

In questo problema, un grande classico tra quelli di dinamica, viene chiesto di studiare le conseguenze della **forza di attrito** agente su di un corpo. Si tratta questa di una *forza di reazione* che si *oppone* al moto relativo, lo *scivolamento*, di un corpo su una superficie. Questa forza può essere di due tipi; quando si manifesta tra superfici in quiete tra loro, opponendosi alle altre forze agenti sul corpo che altrimenti lo metterebbero in movimento, è detta di *attrito statico*, mentre tra superfici in moto relativo si parla invece di *attrito dinamico*. Essendo una forza di reazione ad altre forze, è utile negli esercizi calcolare per prima cosa la risultante delle forze alle quali l'attrito si oppone, e solo dopo calcolare l'attrito appunto come reazione a queste. Nel caso descritto dal problema, l'attrito dinamico $\vec{F_a}$ che viene avvertito dalla cassa ad opera della superficie del piano è una forza diretta parallelamente al piano e in *verso opposto* rispetto al suo moto (dato da $\hat{v}$, il *versore*[18] che descrive direzione e verso della velocità della cassa) con un'intensità proporzionale alla *risultante delle forze esercitate dal corpo perpendicolarmente al piano*, ossia alla *componente perpendicolare al piano* della sua forza peso: $\vec{P}_\perp$. In formule la *forza di attrito dinamico* si scrive:

$$\vec{F}_a = -\hat{v} \cdot \mu_d |\vec{F}_\perp|$$

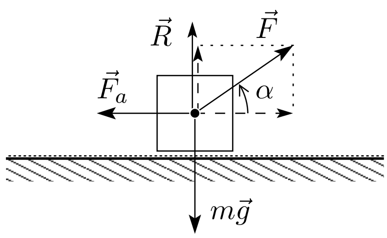
dove il primo termine, $-\hat{v}$, rappresenta il fatto di "opporsi" (segno "$-$") al movimento (indicato da $\hat{v}$) e dove μ_d è detto *coefficiente di attrito dinamico*. $|\vec{F}_\perp|$ è il modulo della risultante delle forze applicate perpendicolarmente al piano; in questo caso l'unica forza perpendicolare al piano è la forza peso: $|\vec{F}_\perp| = |\vec{P}| = mg$.

Anche la **reazione vincolare** $\vec{R}$ è una *forza di reazione*, che "si oppone in modo *assoluto*" al movimento del corpo nella direzione perpendicolare al piano; in pratica è quella forza che gli impedisce di *sprofondare* nel piano ed è sempre uguale (finché il piano non si rompe!) alla risultante di tutte le forze applicate dal corpo in direzione perpendicolare al piano.

Fatte queste considerazioni preliminari, procediamo a risolvere il problema utilizzando le linee guida del metodo delle forze.

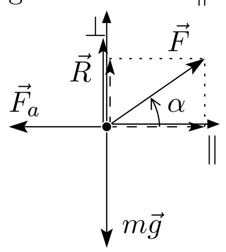
Soluzione

Seguiamo la procedura delineata nell'Esercizio 15, alla quale abbiamo dato il nome di metodo delle forze. Per prima cosa identifichiamo le forze agenti sulla cassa; queste sono la forza peso $m\vec{g}$, la reazione vincolare del piano $\vec{R}$, la forza esterna $\vec{F}$ e la forza di attrito dinamico tra superficie del piano e fondo della cassa $\vec{F}_a$. Nella figura a fianco è riportato il relativo disegno. Per convenienza, sono anche indicate con frecce tratteggiate le *componenti parallela* e *perpendicolare* al piano della forza $\vec{F}$:



$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel.$$

Nella figura sottostante è riportato il *diagramma di corpo libero* della cassa, sulla quale è stato scelto un sistema di riferimento con un asse orizzontale parallelo al piano, $\parallel$, ed uno verticale perpendicolare, $\perp$. Riscriviamo quindi rispetto a questo l'equazione del moto sotto forma di due equazioni scalari lungo le direzioni $\parallel$ e $\perp$:



$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{R} + m\vec{g}$$

$$\begin{cases} ma_\parallel = F\cos\alpha - F_a \\ ma_\perp = 0 = F\sin\alpha + R - mg \end{cases}$$

dove nella prima equazione è stata posta l'accelerazione verticale, $a_\perp$, uguale a zero, poiché la cassa si sta muovendo orizzontalmente.

Per quanto detto nel precedente richiamo di teoria, la forza di attrito sarà uguale in modulo al prodotto del coefficiente di attrito dinamico μ_d per forza perpendicolare al piano. Quest'ultima, per il "principio di azione e reazione", a sua volta sarà uguale ed opposta alla reazione vincolare del piano, per cui:

$$F_a = \mu_d R.$$

[18] Un *versore* è un vettore di modulo unitario, rappresentante quindi solo direzione e verso del *vettore* al quale è riferito. Per esempio: $\hat{v} \equiv \vec{v}/|\vec{v}|$ indica direzione e verso in cui un corpo si sta muovendo a velocità $\vec{v}$.

L'espressione per R può essere ricavata dalla seconda equazione scritta nel precedente sistema di equazioni del moto:

$$R = mg - F\sin\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad F_a = \mu_d\big(mg - F\sin\alpha\big).$$

Procediamo quindi a sostituire questo risultato nell'altra equazione per l'accelerazione orizzontale, che essendo l'unica accelerazione ometteremo il pedice "$\|$":

$$ma_{(\|)} = F\cos\alpha - \mu_d\big(mg - F\sin\alpha\big).$$

Quella ottenuta si chiama in matematica un'*equazione goniometrica* nella variabile angolo α.[19] Arrivati a questo punto la parte di Fisica in senso stretto è terminata, si tratta solo di risolvere analiticamente il problema, trovando per quale angolo α l'accelerazione $a_{(\|)}$ è massima. Con l'equazione scritta in questa forma non è chiaro come scegliere questo angolo; le cose andrebbero meglio se avessimo un'unica funzione goniometrica (seno o coseno) uguale ad una certa quantità, quella che si chiama un'equazione goniometrica elementare. Per convertirla in questa forma possiamo utilizzare il così detto "metodo dell'angolo aggiunto", sfruttando cioè le regole di addizione degli angoli per le funzioni goniometriche, per esempio:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Apllicando questa idea alla nostra equazione, possiamo riscriverla le due funzioni goniometriche come un unico seno della somma di due angoli

$$F\cos\alpha + \mu_d F\sin\alpha = r\sin\big(\alpha + \beta\big)$$

dove:

$$\begin{cases} F \equiv r\sin\beta \\ \mu_d F \equiv r\cos\beta \end{cases}$$

da cui è possibile ottenere le formule inverse per l'ampiezza r è l'angolo aggiunto β:

$$\begin{cases} r = F\sqrt{1 + \mu_d^2} \\ \beta = \tan^{-1}(1/\mu_d) \end{cases}$$

ottenute rispettivamente elevando al quadrato le due equazione del precedente sistema e sommandole, $F^2 + \mu_d^2 F^2 = r^2\sin^2\beta + r^2\cos^2\beta = r^2$, o dividendole, $F/(\mu_d F) = r\sin\beta/r\cos\beta = \tan\beta$. La funzione $\tan^{-1}$, o arctan, è l'*arcotangente* cioè la funzione inversa della tangente, che data una lunghezza restituisce l'angolo la cui tangente fa quel valore.

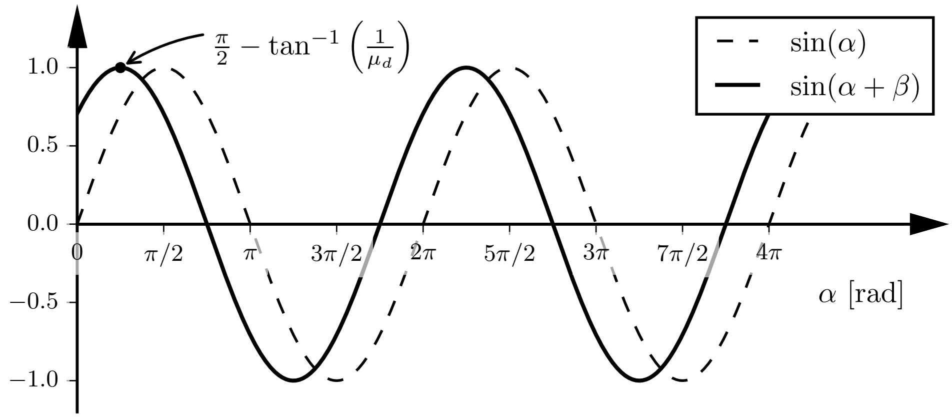
Siamo quindi in grado di riscrivere l'equazione del moto come:

$$ma = F\sqrt{1 + \mu_d^2}\,\sin\big(\alpha + \tan^{-1}(1/\mu_d)\big) - \mu_d mg.$$

Facciamo alcune osservazioni per trovare l'accelerazione massima, in funzione dell'angolo α. Si nota subito che l'unica dipendenza dall'angolo nell'equazione del moto scritta prima è dentro alla funzione seno; quindi *l'accelerazione sarà massima quando la funzione seno lo sarà*.[20] A sua volta, la funzione seno sarà massima quando il suo *argomento*, l'espressione scritta dentro parentesi, sarà uguale a $\pi/2$ (più periodicità: $\pi/2 + 2k\pi$), come visibile nel grafico della

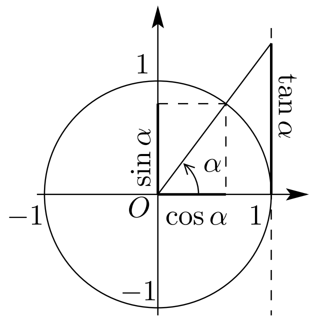
[19] Per la precisione si tratta di un'equazione goniometrica lineare in seno e coseno *non omogenea*, dove è presente un termine che non è una funzione goniometrica.

[20] Il fattore che moltiplica il seno, $F\sqrt{1 + \mu_d^2}$ è positivo, quindi non cambia "massimi con minimi", come farebbe se fosse negativo, mentre l'altro termine,$-\mu_d mg$, è costante e non altera la condizione di massimo.



funzione seno rappresentato in basso. Quindi imponendo tale condizione di massimo abbiamo:

$$\alpha + \tan^{-1}(1/\mu_d) = \frac{\pi}{2}$$

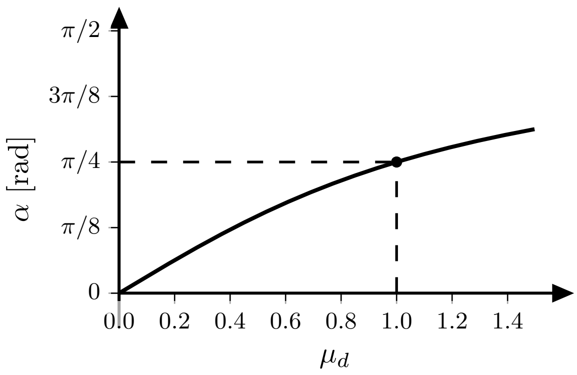


da cui possiamo trovare l'angolo cercato, che massimizza a:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_d}\right)}$$

Come visibile dalla precedente formula, alla fine l'unico dato che conta è il coefficiente d'attrito. Otteniamo che il massimo dell'accelerazione si ottiene in corrispondenza di $\tan^{-1}(1/\mu_d) = \tan^{-1} 1$, ma come è noto 1 è il valore della tangente di $\pi/4$, quando seno e coseno valgono lo stesso valore, e quindi il loro rapporto, la tangente appunto, fa 1. Si osservi la figura a fianco per un richiamo sulle principali funzioni goniometriche e la loro visualizzazione sul *cerchio goniometrico di raggio unitario*.

Prima di concludere l'esercizio, può essere interessante fare qualche commento sul problema incontrato, osservando la dipendenza dell'angolo ottimale α con cui tirare la cassa in funzione del coefficiente di attrito μ_d. La figura a fianco mostra l'andamento funzionale trovato prima: $\alpha(\mu_d) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu_d}\right)$, questa volta dove μ_d non è un parametro ma la variabile indipendente. Prima di tutto si nota che se il coefficiente d'attrito fosse stato prossimo allo zero, ossia *non* avessimo avuto attrito, l'angolo ottimale sarebbe stato l'angolo nullo, il che significa trascinare la cassa con una forza orizzontale. Al contrario, maggiore è l'attrito maggiore è l'angolo e la componente verticale, $F \sin\alpha$, della forza.



Esercizio 20

Dinamica, lavoro di una forza non costante - Compito, 15 gennaio 2018

Un corpo si muove lungo una retta mentre è soggetto ad una forza $F = 2x^2\ N/m^2$. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza se il corpo si sposta dal punto $x_1 = 0$ al punto $x_2 = 1\ m$.

Richiami di teoria: lavoro di una forza non costante

In questo esercizio è richiesto il calcolo del lavoro fatto da una forza non costante. Come noto, per una forza costante il lavoro è definito come il *prodotto scalare della forza per lo spostamento*: $L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$; essendo in questo caso un moto rettilineo in cui la forza è parallela allo spostamento, il prodotto scalare è uguale semplicemente al prodotto dei moduli di forza e spostamento: $L = F \cdot \Delta x$ (vedi Esercizio 1 per dettagli sulle grandezze vettoriali e le relative operazioni). Tutto questo per una forza costante. Quando la forza varia con la posizione, la precedente espressione per il lavoro non è più valida. Tuttavia è sempre possibile trovare spostamenti Δx *sufficientemente piccoli* tali per cui la variazione della forza sia trascurabile e poter considerare quest'ultima come costante; il lavoro totale della forza potrà quindi essere calcolato come la somma dei lavori fatti in ciascuno di questi spostamenti:

$$
\begin{aligned}
L &= \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \ldots = F(x_1)\Delta x_1 + F(x_2)\Delta x_2 + F(x_3)\Delta x_3 + \ldots \\
&= \sum_{i=1} F(x_i)\,\Delta x_i
\end{aligned}
$$

Per esprimere in modo matematicamente più rigoroso quanto appena asserito, dobbiamo far *tendere* l'ampiezza di questi intervalli *a zero*, considerandone quindi un numero infinito perché la loro somma dia un intervallo finito, e definire quindi il *lavoro di una forza non costante* come il limite:

$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{+\infty} F(x_i)\,\Delta x_i .$$

La precedente definizione è di fatto equivalente all'integrale in dx della forza $F(x)$ nell'intervallo considerato $[x_1, x_2]$, ossia:

$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx}$$

Soluzione

Inserendo l'espressione della forza data dal problema otteniamo:

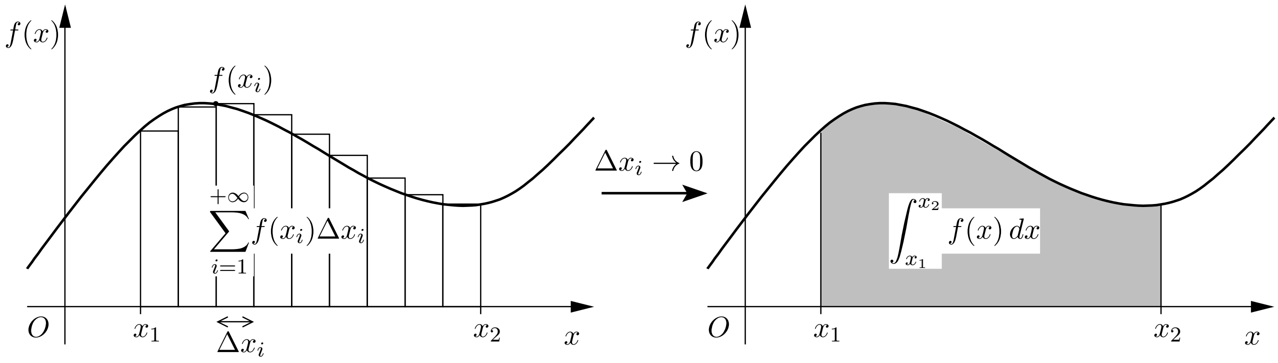
$$
\begin{aligned}
L &= \int_{x_1}^{x_2} 2x^2\,dx \ \mathrm{N/m^2} \\
&= \left[2\frac{1}{3}x^3\right]_{x_1}^{x_2} \mathrm{N/m^2} = \frac{2}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) \mathrm{N/m^2} \\
&= \frac{2}{3}\ \mathrm{N \cdot m} \simeq 0.66\ \mathrm{J}.
\end{aligned}
$$

Curiosità: interpretazione geometrica degli integrali

Come le derivate possono essere interpretate come la "rapidità" con cui una certa grandezza, funzione di variabile indipendente (molto spesso il tempo), cambia in funzione di quest'ultima, anche gli integrali ammettono una intuitiva interpretazione geometrica. Utilizzando una notazione prettamente matematica, consideriamo una *funzione* f che ad un numero (la *variabile indipendente*) x fa corrispondere un secondo numero (la *variabile dipendente*) y: $y = f(x)$. In accordo con la definizione di integrale data nella precedente sezione,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i)\Delta x_i$$

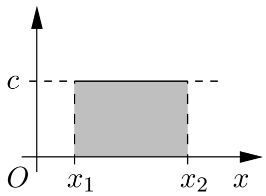
è possibile interpretare questo come (il limite de) la *somma delle aree dei rettangoli, di base* Δx_i *e altezze* $f(x_i)$*, sottesi dal grafico della funzione* $f(x)$, come in figura a sinistra.



In questo modo possiamo sfruttare alcune conoscenze sulle aree ed i volumi di semplici figure geometriche per ricavare alcuni integrali fondamentali.

Cominciamo con l'integrale/area più semplice che potrebbe venirci in mente, quello di una costante; supponiamo quindi di integrare la costante c (positiva, per semplicità) tra due valori della x, detti *estremi*, x_1 e x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} c\, dx = \sum_{i=1}^{+\infty} c\Delta\, x_i =$$



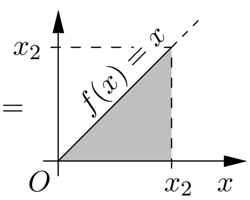
E' immediato valutare il precedente integrale/sommatoria grazie alla figura a fianco. Il valore di questo corrisponde infatti all'area di un rettangolo di base $\Delta x = x_2 - x_1$ e altezza c, per cui:

$$\int_{x_1}^{x_2} c\, dx = \sum_{i=1}^{+\infty} c\, \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{+\infty} \Delta x_i = c\, \Delta x = c\big(x_2 - x_1\big)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato la proprietà distributiva della somma (Σ) rispetto alla moltiplicazione ($c\cdot$) e nel terzo valutato che la somma di tutti l'intervallini infinitesimi Δx_i dà in totale $\Delta x = x_2 - x_1$.

Passiamo quindi alla funzione di x più semplice: $f(x) = x$. L'integrale di x tra un estremo che prenderemo uguale zero per semplicità, $x_1 = 0$, ed un altro valore x_2 positivo (sempre per semplicità) è:

$$\int_0^{x_2} x\, dx =$$

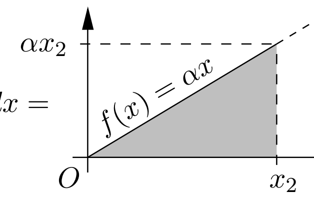


E' chiaro dal disegno che questa è esattamente *metà dell'area di un quadrato* di lato x_2, ossia:

$$\int_0^{x_2} x\, dx = \frac{1}{2} x_2^2.$$

Complichiamo giusto un poco; supponiamo ora di voler calcolare l'integrale di αx, con α una costante (che supporremo per il momento positiva):

$$\int_0^{x_2} \alpha x \, dx =$$



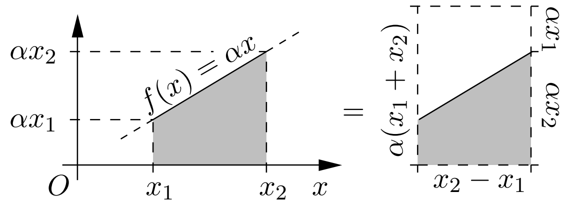
In questo caso, non avremo metà dell'area di un quadrato ma *metà di un rettangolo* di base x_2 e altezza αx_2:

$$\int_0^{x_2} \alpha x \, dx = \frac{1}{2}(\alpha x_2) \cdot x_2 = \alpha \frac{1}{2} x_2^2,$$

cioè α volte l'integrale scritto sopra. Questa è una proprietà generale: *l'integrale della funzione $\alpha\, f(x)$ è uguale ad α volte quello della funzione $f(x)$.*

Complichiamo con un altro ingrediente; supponiamo che il primo estremo di integrazione non sia zero ma un certo numero x_1 (> 0 per semplicità):

$$\int_0^{x_2} \alpha x \, dx =$$



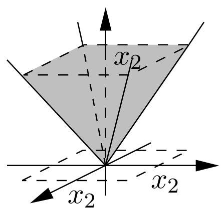
Si osserva quindi dalla figura a destra che l'integrale è uguale all'area del trapezio:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \alpha x \, dx &= \frac{1}{2}\alpha\big(x_1 + x_2\big)\big(x_2 - x_1\big) \\ &= \frac{1}{2}\alpha\big(x_2^2 - x_1^2\big).\end{aligned}$$

A questo punto, combinando i risultati precedenti, siamo in grado di calcolare l'integrale di qualsiasi *funzione polinomiale di primo grado* della x, $f(x) = \alpha x + c$, tra due estremi x_1 e x_2 arbitrari.

Facciamo un passo avanti; come gli integrali di funzioni polinomiali di primo grado possono essere interpretati come aree di figure piane, come triangoli e trapezi, quelli di funzioni di secondo grado posso essere interpretati come volumi di poliedri. Per esempio, l'integrale di x^2 tra 0 e x_2 risulta uguale al volume di una piramide (capovolta, poiché cresce nel verso dell'asse) con area di base x_2^2 ed altezza x_2, come nella figura sottostante:

$$\int_0^{x_2} x^2 \, dx =$$



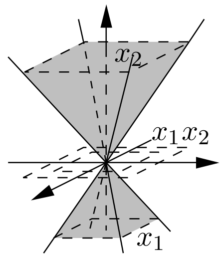
Dalla geometria Euclidea è noto che il *volume delle piramidi è uguale ad un terzo del prodotto di area di base per altezza*,[21] da cui il valore di questo integrale:

$$\int_0^{x_2} x^2 \, dx = \frac{1}{3} x_2^2 \cdot x_2 = \frac{1}{3} x_2^3.$$

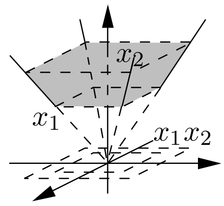
[21] Un modo intuitivo per visualizzare questo risultato è quello di immaginare di dividere un cubo in sei piramidi a basi quadrata, ciascuna corrispondente ad una faccia del cubo, e con vertici nel centro di questo, e quindi altezze pari alla metà del lato. E' chiaro quindi che il volume di ognuna di queste piramidi è $1/6$ di quello del cubo: $V_{\text{piramide}} = V_{\text{cubo}}/6 = \ell^3/6 = \frac{1}{3}\ell^2 \cdot \ell/2 = \frac{1}{3} \mathit{Sup.\,base} \times \mathit{altezza\,piramide}$. E' immediato convincersi che questo risultato vale per piramidi di qualsiasi forma, ricavate da qualsiasi parallelogrammo.

Consideriamo ora il caso in cui il primo estremo di integrazione non sia zero. Nelle figure sottostanti sono rappresentati i casi in cui x_1 è negativo e positivo rispettivamente:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2\, dx =$$



,



I volumi di queste *piramidi doppie* o *tronche* si ottengono sommando o sottraendo i volumi di altre piramidi. In entrambi i casi abbiamo, sia che x_1 sia negativo o positivo, l'integrale risultante vale:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2\, dx = \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1^3 = \frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right).$$

Questo è quanto ci è servito per risolvere il presente esercizio.

Integrali come "moltiplicazioni generalizzate"

Sempre dalla definizione di integrale come limite della sommatoria scritta all'inizio di questa sezione, è possibile dedurre l'interpretazione leggermente differente degli *integrali come "moltiplicazioni generalizzate"*. Facciamo un passo indietro. Alle scuole elementari ci è stata introdotta la *moltiplicazione come somma generalizzata*, nel senso che se dovevamo *sommare* una stessa quantità a un gran numero (supponiamolo per adesso intero) n di volte, invece di scrivere una somma ripetuta del tipo $a + a + \ldots + a$, con n addendi a uguali, potevamo semplicemente scrivere $a \times n$ e sottintendere quanto appena detto. La stessa cosa, col simbolo di sommatoria Σ, poteva anche essere scritta $\sum_{i=1}^{n} a = a + \ldots + a = a \times n$. Si noti già la somiglianza con quanto scritto sopra. Complichiamo leggermente la cosa; cosa dovremmo fare se volessimo sommare quantità diverse, per esempio sommare tutti i numeri (interi) da 1 a 100? Tutto abbastanza semplice finché sono quantità intere; il simbolo di sommatoria Σ ci è sufficiente a scrivere, per esempio, la somma di tutti gli interi da 1 a 100 come: $\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + \ldots + 100$, proprio come volevamo. Stessa cosa se volessimo sommare i quadrati, $\sum_{i=1}^{100} i^2$, le radici, $\sum_{i=1}^{100} \sqrt{i}$, o qualsiasi altra funzione, detta *successione*, di numeri interi $a_i = a(i)$. Tutto facile con gli interi, le cose si complicano quando entrano in gioco i numeri *razionali* (cosa significa per esempio 2.8×4.9?) o peggio ancora i *reali* (cosa significa $2 \times \pi$?). Il primo caso non è particolarmente difficile da comprendere, una volta imparato a maneggiare i razionali e le frazioni, mentre il secondo è leggermente più delicato e anche i matematici (vedi Cauchy, Dedekind e Peano) hanno dovuto lavorarci su un po'. Tutta questa digressione per introdurre il problema di cosa fare se uno volesse *sommare*, per esempio, *tutti quanti i numeri reali da 1 a 100*, con la peculiarità che ognuno di questi numeri reali, x, è spaziato una quantità infinitesima dx dal successivo, $x + dx$, di cui tengo conto per "pesare la somma". Per tale scopo vengono appunto introdotti gli integrali come *sommatoria di tutti quanti gli infiniti numeri $f(x)$ compresi tra due estremi (x_1 e x_2) del numero reale x*. Quindi, il caso citato prima della somma tra $x_1 = 1$ e $x_2 = 100$ di tutti gli $f(x) = x$ si può scrivere formalmente come $\int_1^{100} x\, dx$. Stessa cosa per una qualsiasi funzione $f(x)$, e in questo senso è possibile interpretare l'integrale come una sorta di moltiplicazione generalizzata tra infiniti numeri arbitrari.

Esercizio 21

Dinamica, energia in campo gravitazionale - Compito, 3 ottobre 2017

Una sfera ferma, di massa 300 grammi, viene lasciata cadere a terra da una certa altezza. Cadendo la sfera perde 90 J di energia potenziale gravitazionale. Da quale altezza cade la sfera?

Se inizialmente, cioè a questa stessa altezza, la sfera avesse avuto una velocità di 15 m/sec, con quale velocità avrebbe raggiunto il suolo?

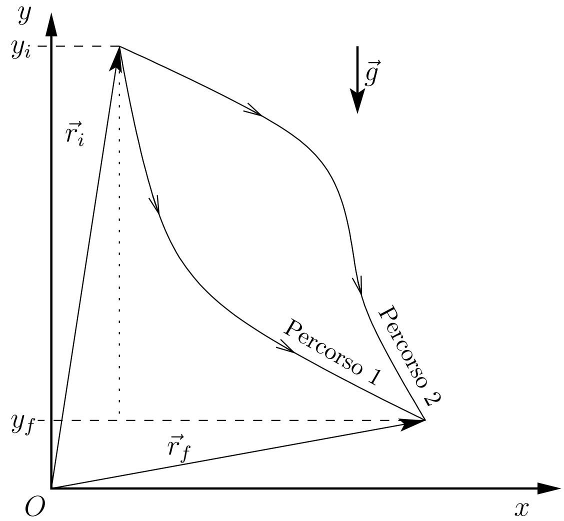
Richiami di teoria: metodo dell'Energia

Si tratta di un problema di *dinamica* di *caduta dei gravi*; non vengono menzionate leggi del moto o (direttamente) forze ma solo energie quindi la strategia giusta con cui affrontarlo è data dal così detto metodo dell'energia, attraverso l'equazione data dal *Teorema delle Forze vive*:

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = L_{\text{ext}} + L_{\text{NC}}}$$

che lega le *variazioni di energia cinetica* $\Delta K = K_f - K_i$ ed *energia potenziale* $\Delta U = U_f - U_i$, di tutte le *forze conservative* che agiscono nel problema, per tutti i corpi presenti, al *lavoro delle forze esterne*, L_{ext}, ed al *lavoro delle forze (interne) non-conservative*, L_{NC}.

Essendo una caduta libera, trascurando quindi l'attrito dell'aria, l'unica forza che agisce nel problema è quella di gravità, $\vec{P} = m\vec{g}$, che è *conservativa*, ossia il *lavoro* che essa compie su un oggetto che si muove dalla posizione $\vec{r}_i$ a quella $\vec{r}_2$ non dipende dal percorso seguito ma solo dalla posizione di partenza e quella di arrivo (vedi figura):



$$\begin{aligned} L &= \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{g} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_{y_i}^{y_f} mg\, dy = mg\big(y_i - y_f\big) \\ &= -\Delta U \end{aligned}$$

dove nella terza uguaglianza è stato valutato il *prodotto scalare* ("componente della forza *parallela allo spostamento* per lo spostamento") tenendo conto del fatto che i vettori in gioco avevano componenti: $\vec{g} = (0, -g)$ e $d\vec{r} = (dx, dy)$, per cui $\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0 \cdot dx + (-g)\, dy = -g\, dy$.

Soluzione

Coi dati del problema:

$$\begin{aligned} \Delta U &= -mg\big(y_i - y_f\big) \\ \big(y_i - y_f\big) &= -\frac{\Delta U}{mg} = -\frac{-90 \text{ J}}{0.4 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} \simeq 22.9 \text{ m}. \end{aligned}$$

Se il corpo avesse avuto una velocità iniziale $\vec{v}_i$ (diretta in qualsiasi verso) sarebbe partito con un'*energia cinetica*

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$$

che dipende dal modulo quadro della velocità (e non dalla sua direzione). Tramite il teorema delle forze vive scritto all'inizio, e ricordando che non ci sono né forze esterne (diverse dalla forza di gravità, già inclusa in ΔU) né forze non-conservative, $L_{\text{ext}} = L_{\text{NC}} = 0$, possiamo ricavare (il modulo de) la velocità finale da:

$$\Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \Delta U = 0$$
$$v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{2\,\Delta U}{m}} \simeq 16.9 \text{ m/s}.$$

[Ricordare che la variazione (perdita) di energia potenziale è negativa: $\Delta U = -90$ J]

Notare che matematicamente la precedente espressione per v_f dovrebbe ammettere sia soluzioni positive che negative, $v_f = \pm\sqrt{\ldots}$, poiché come noto le soluzioni dell'equazione $x^2 = a$ sono $x = \pm\sqrt{a}$. Considerando una *caduta*, uno potrebbe essere tentato di considerare implicito che il corpo si debba muovere "*verso* il basso" e quindi scegliere la soluzione col segno negativo. Tuttavia non va dimenticato che $\vec{v}$ è una *grandezza vettoriale* e che il verso ed il modulo da soli non sono sufficienti a caratterizzarla completamente. Infatti in realtà non abbiamo alcuna informazione sulla *direzione* di questo moto, e quindi sarebbe sbagliato dire che $v_f = -\sqrt{\ldots}$ sia il valore di una qualche componente (quella verticale) della velocità finale, poiché ciò escluderebbe totalmente la possibilità di averne altre (orizzontali), come è il caso in un generico moto parabolico di caduta. Quindi, l'unico significato che possiamo e dobbiamo dare alla precedente è che il *modulo* del vettore $\vec{v}_f$, $|\vec{v}_f| = v_f$, sia quello scritto, e quindi prendere il segno positivo (come è infatti appropriato per un modulo) senza affermare altro riguardo alla direzione del moto.

La procedure di soluzione appena illustrata, che si basa sull'utilizzo del *teorema delle forze vive* (l'equazione nel primo riquadro dell'esercizio), prende il nome di metodo dell'energia. Come visto, è la più indicata in tutti i problemi in cui non si fa riferimento alla traiettoria seguita dal corpo o dal tempo impiegato, in pratica da $\vec{s}(t)$, oppure si fa *direttamente* riferimento all'energia. In realtà, tramite la definizione di lavoro o di *potenza di una forza* è del tutto equivalente al metodo delle forze visto nell'Esercizio 15.

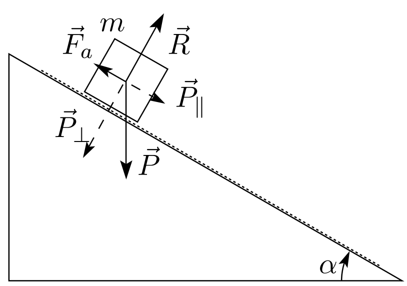
Esercizio 22

Dinamica, piano inclinato con attrito - Compito, 11 settembre 2017

Una cassa di 50 kg scivola lungo un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale. Se la sua accelerazione è 2 m/sec² , quanto vale la forza di attrito che agisce sulla cassa?

Soluzione

Il testo sembra indirizzare inequivocabilmente verso l'uso del *secondo principio della Dinamica*, e quindi del così detto metodo delle forze. Procediamo perciò a risolverlo secondo le linee guida descritte nell'Esercizio 15:



Metodo 1 (delle forze, facile)

Nella figura a fianco è riportato un disegno schematico del problema con indicate le forze agenti sul corpo (punto (0) della procedura); essendo questo l'unico corpo presente (il piano inclinato è semplicemente un *vincolo* del quale non ci interessa la dinamica) possiamo considerare anche il punto (1), il disegno dell'unico *diagramma di corpo libero*, come automaticamente svolto (o vedere più avanti).[22]

[22] Suggerimento: se il disegno del piano inclinato non fosse già stato dato (come è il caso nei problemi da esame), una "regola d'oro" per non cadere in errore nel vedere relazioni non valide in generale, è quella di cercare sempre

Notare che nel disegno sono state aggiunte per convenienza anche due frecce tratteggiate rappresentanti la *componente parallela* e quella *perpendicolare al piano* della forza peso $\vec{P}$, rispettivamente $\vec{P}_{\parallel}$ e $\vec{P}_{\perp}$; non si tratta quindi di due ulteriori forze ma solo di una "comoda" decomposizione della forza peso, simile a quella che si fa solitamente per i vettori in componenti x e y. Vale quindi la relazione:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\parallel} + \vec{P}_{\perp}.$$

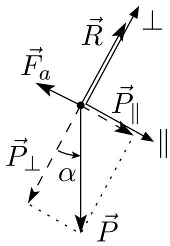
L'*equazione del moto*, punto (2), è dunque:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_a$$

dove $\vec{F}_a$ e la forza di attrito dinamico tra la cassa e il piano inclinato. Come già discusso nell'Esercizio 19, la componente perpendicolare della forza peso si cancella con la reazione vincolare, $\vec{R} = -\vec{P}_{\perp}$, e rimane solamente:

$$m\vec{a} = \vec{P}_{\parallel} + \vec{F}_a.$$

Per semplificare lo studio di queste equazioni vettoriali, introduciamo, punto (3) della procedura del metodo delle forze, un sistema di assi cartesiano. La scelta di questo è dettata dalla dinamica del problema e risulta senza troppe sorprese che la scelta più saggia sia la seguente:



$$\begin{cases} ma_{\parallel} = P_{\parallel} - F_a \\ ma_{\perp} = 0 = R - P_{\perp} \end{cases}$$

[si noti la scelta "insolita" di non prendere un sistema di assi verticale e orizzontale e di chiamare le coordinate rispetto a questi non x e y ma semplicemente $\parallel$ e $\perp$]

La seconda delle precedenti equazioni è identicamente uguale a zero poiché non si ha movimento in direzione perpendicolare al piano (la cassa non sprofonda né vola). La prima equazione è presto risolta notando che l'angolo compreso tra $\vec{P}$ e $\vec{P}_{\parallel}$ è il complementare dell'angolo α con cui è inclinato il piano,[23] e quindi:

$$ma_{\parallel} = P_{\parallel} - F_a = P \cdot \sin\alpha - F_a = mg\,\sin\alpha - F_a$$

$$\boxed{F_a = m\big(g\sin\alpha - a_{\parallel}\big)}$$

Metodo 2 (dell'energia, difficile)

Benché la precedente procedura sia di gran lunga la più indicata per risolvere il problema, uno può tentare un approccio diverso tramite il metodo dell'energia e, con un po' più di fatica, verificare che effettivamente i due metodi sono equivalenti. Sfruttiamo quindi l'occasione per fare anche un esercizio sull'utilizzo *Teorema delle Forze vive.*

Le forze agenti sul corpo sono la forza peso $\vec{P}$, *conservativa* e quindi descrivibile tramite un'energia potenziale, la forza di attrito $\vec{F}_a$, *non conservativa*, e la reazione vincolare $\vec{R}$ che

di fare il disegno "*più generale* possibile"; per esempio, nel caso di un piano inclinato, cercare di rappresentarlo come un triangolo scaleno e non rettangolo isoscele, o comunque simmetrico, poiché tali simmetrie visibili ad occhio dal disegno sono in realtà inganni di una scelta particolare e non valgono in generale.

[23] Infatti, riferendoci al disegno, risulta evidente che la direzione di $\vec{P}$ è perpendicolare alla "base" del piano inclinato, mentre $\vec{P}_{\perp}$ è perpendicolare al piano stesso, quindi per similitudine l'angolo tra $\vec{P}_{\perp}$ e $\vec{P}$ è uguale a quello tra il piano inclinato e la sua base, cioè α. Si ricordino le considerazione fatte nella nota 22.

tuttavia, essendo perpendicolare allo spostamento della cassa, non compie lavoro e quindi può essere omessa dall'equazione data dal Teorema delle Forze vive (vedere la discussione dell'esercizio Esercizio 15). Scriviamo quindi:

$$\Delta K + \Delta U = L_{\text{NC}},$$

dove:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}m\, v_{\|}(t)^2 - \frac{1}{2}m\, v_{\|0}^2, \\ \Delta U &= mg\, h = mg\, \Delta s_{\|} \cdot \sin\alpha = (mg\sin\alpha)\Delta s_{\|} = P_{\perp}\Delta s_{\|}, \\ L_{\text{NC}} &= \vec{F}_a \cdot \Delta\vec{s} = -F_a\, \Delta s_{\|}. \end{aligned}$$

Commentiamo le precedenti. La prima è semplicemente l'espressione dell'*energia cinetica*, osservando che il movimento avviene parallelamente al piano e che quindi l'unica componente di $\vec{v}$ che contribuisce è quella parallela, $\vec{v}_{\|}$. Nella seconda equazione è scritta la ben nota *energia potenziale gravitazionale*, e dove è stata messa in risalto in particolare la sua dipendenza dallo spazio percorso parallelamente al piano inclinato, $\Delta s_{\|}\sin\alpha = \Delta h$ (vedi disegno ad inizio esercizio), e quindi dalla *componente perpendicolare* al piano della forza peso, $P_{\perp}$. Nell'ultima equazione è stato scritto il *lavoro della forza di attrito* (costante e non conservativa) che, essendo diretta parallelamente al piano ed in verso opposto allo spostamento, può essere riscritta come nella seconda uguaglianza (si veda l'equazione per L nell'Esercizio 15).

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= L_{\text{NC}} \\ \frac{1}{2}m\, v_{\|}(t)^2 - \frac{1}{2}m\, {v_{\|0}}^2 - mg\sin\alpha\, \Delta s_{\|} &= -F_a\Delta s_{\|} \end{aligned}$$

dove, senza perdita di generalità (fra poco faremo una derivata e tutte le costanti additive spariranno), possiamo scegliere di far partire la cassa dalla posizione di riferimento $s_{\|0} = 0$, per cui $\Delta s_{\|} = s_{\|}(t) - s_{\|0} = s_{\|}(t)$. Nelle prossime equazioni ometteremo, per pulizia di scrittura, il simbolo "$\|$" poiché comune a tutte le quantità cinematiche.

Apparentemente la precedente sembra condurci lontano dal risultato cercato, soprattutto poiché non compare l'accelerazione della cassa, che è un dato del problema. Tuttavia è ben visibile la velocità della cassa è quindi l'accelerazione è immediatamente ottenibile ricordandosi che l'*accelerazione* (*istantanea*) è la *derivata della velocità rispetto al tempo*:[24]

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt},$$

e quindi derivando rispetto al tempo l'equazione data dal Teorema delle Forze vive scritta sopra otteniamo:[25]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}v(t)^2 + 0 - mg\sin\alpha\frac{d\,s}{dt} &= -F_a\frac{d\,s}{dt} \\ mv\, a - mg\sin\alpha\, v &= -F_a v \end{aligned}$$

dove, oltre alla relazione che lega $\vec{a}$ a $\vec{v}$, abbiamo utilizzato:

$$\frac{d\,\vec{s}}{dt} = \vec{v}.$$

[24] Vedere la minisezione alla fine dell'esercizio per una soluzione che non fa uso di derivate.

[25] Ricordarsi che v_0 è una costante e quindi la sua derivata fa zero. Inoltra è stato fatto uso della formula di derivazione della funzione composta, ed in particolare di: $D\big[f(x)^2\big] = 2f(x)\cdot f'(x)$.

Nell'equazione scritta sopra il fattore v è comune ad ogni membro e quindi può essere eliminato, portando al risultato (atteso!):

$$m\big(a - g\sin\alpha\big) = -F_a, \qquad \rightarrow \qquad \boxed{F_a = m\big(g\sin\alpha - a_{\|}\big)}$$

identico a quello trovato col metodo delle forze, e pertanto i due metodi devono essere considerati *equivalenti*. Ovviamente non ci dobbiamo stupire di ciò poiché entrambi, il primo in modo più esplicito ma anche il secondo seppur in modo non altrettanto apparente, si basano sui tre *Principi della Dinamica* che sono tutte e sole le leggi necessarie per descrivere il comportamento dinamico dei corpi soggetti a forze.

Inserendo i numeri del problema (vedere l'Esercizio 1 per sapere quanto fa $\sin\alpha$): $F_a \simeq 145$ N.

Soluzione senza l'uso delle derivate

Poiché le forze agenti nel precedente problema sono *costanti*, è possibile ottenere la soluzione anche senza l'uso di derivate, ma giusto con qualche "trucchetto" matematico. Infatti, sotto queste condizioni l'accelerazione istantanea è una costante ed è uguale a quella media: $\vec{a} = \vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Cerchiamo di esplicitare il termine Δv nell'equazione del Teorema delle Forze vive scritta prima:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}m\,{v_0}^2 = \frac{1}{2}m\,\big(v+v_0\big)\big(v-v_0\big) = \frac{1}{2}m\,\big(v+v_0\big)\Delta v$$

dove abbiamo usato il *prodotto notevole*: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. Dividendo per un intervallo di tempo Δt otteniamo:

$$\frac{1}{2}m\,\big(v+v_0\big)\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{2}m\,\big(v+v_0\big)\,a = \big(mg\sin\alpha - F_a\big)\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Occupiamoci del termine a destra; la frazione sarà uguale, per definizione, alla *velocità media* (nel tempo) che ha avuto la cassa durante la sua discesa, ossia tra $v(t)$ e v_0. Avvenendo questa discesa ad *accelerazione costante*, la velocità aumenterà linearmente col tempo ($v(t) \propto t$, dove la costante di proporzionalità è l'accelerazione) e quindi la velocità mediata nel tempo sarà esattamente la *media aritmetica* tra le velocità iniziali e finali della cassa:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv v_m = \frac{v+v_0}{2}$$

e quindi:

$$\frac{1}{2}m\,\big(v+v_0\big)a = \big(mg\sin\alpha - F_a\big)\frac{1}{2}\big(v+v_0\big)$$

$$ma = mg\sin\alpha - F_a \qquad \rightarrow \qquad \boxed{F_a = m\big(g\sin\alpha - a\big)}$$

ancora una volta.

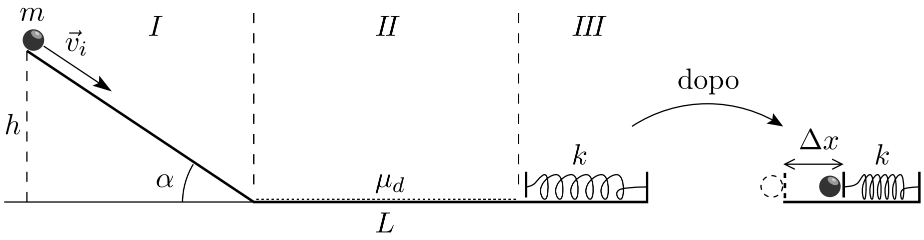
Esercizio 23

Dinamica, piano inclinato con dopo attrito e molla

Una cassa di 50 kg scivola da altezza 1 metro lungo un piano inclinato senza attrito con velocità iniziale 2 m/s, dopo di che incontra un piano orizzontale lungo 2 metri e con attrito dinamico 0.5, al termine del quale vi è una molla. Supponendo che la cassa venga frenata a fine corsa dalla molla con una compressione di 10 centimetri, stimare la costante elastica della molla.

Soluzione

Il presente esercizio è sotto molti aspetti analogo al precedente Esercizio 22, solo che per il tipo di domanda preferisce una strategia di soluzione diversa. Quello che ci è richiesto qui è infatti di legare la costante elastica della molla, k, a grandezze cinematiche in punti diversi della traiettoria, come l'altezza e la velocità iniziali, o la compressione finale della molla. Non viene quindi mai fatto riferimento esplicito a leggi orarie ed equazioni del moto della cassa. Per questi motivi la strategia "più indicata" per risolvere questo genere di esercizi è attraverso il metodo dell'energia, benché anche quella tramite il metodo delle forze sia perfettamente lecita (i due metodi sono equivalenti!). Cominciamo da quest'ultima, rimandando alla prossima sezione per la soluzione col metodo dell'energia.

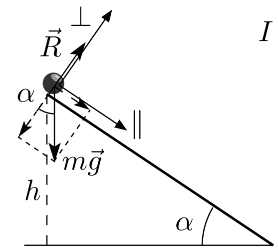


Metodo 1 (delle forze, lungo)

Come mostrato in figura, possiamo dividere il problema in tre fasi: I) abbiamo il moto lungo un piano inclinato privo di attriti, II) abbiamo un moto piano su di una superficie con attrito dinamico μ_d, e III) abbiamo a che fare con *forze di tipo elastico* per cui avremo un *moto armonico*. Per semplicità il problema considera separatamente queste tre fasi, ognuna associata ad un tipo diverso di forza; ad ogni modo la soluzione del problema generale, con tutte e tre queste forze contemporaneamente presenti, non sarebbe stata significativamente diversa poiché le forze si sommano (vettorialmente) nell'equazione del moto, e quindi anche il loro effetto sulla legge oraria.

E' chiaro che la compressione Δx finale della molla dipenderà dalla velocità con cui la cassa le arriverà contro; questa è la condizione iniziale per il moto armonico (III) della cassa a contatto della molla. A sua volta questa velocità sarà quella della cassa dopo esser stata decelerata dal tratto orizzontale con attrito (II), che a sua volta dipenderà dalla velocità con cui è arrivata all'inizio di questo tratto, cioè alla fine del piano inclinato. Tutto sta quindi nel legare la compressione della molla, e la sua costante elastica, con questa serie di velocità alla fine di ogni fase del moto, con le condizioni di velocità, v_i, e posizione, h, iniziali del problema. Procediamo quindi con l'analizzare il piano inclinato.

Nella figura a fianco sono rappresentate le due forze presenti nella fasi I del problema, la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del piano $\vec{R}$, insieme ad un sistema di riferimento con un asse parallelo al piano ed uno perpendicolare col quale caratterizzare le precedenti grandezze vettoriali; si veda l'Esercizio 22 per ulteriori commenti a riguardo. L'equazione del moto e la sua scomposizione nelle due direzioni $\parallel$ e $\perp$ sarà quindi:

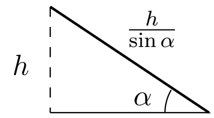


$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} ma_{\parallel} = mg\sin\alpha \\ ma_{\perp} = 0 = R - mg\cos\alpha \end{cases}$$

In realtà non ci serve la seconda equazione, quella per la direzione $\perp$, per determinare la velocità alla fine del piano inclinato. Consideriamo quindi la legge oraria della prima, che corrisponde ad un moto uniformemente accelerato con $a_{\parallel} = g \sin\alpha$ e velocità iniziale $v_{i\parallel} = v_i$:

$$s_{\parallel}(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2 + v_i \cdot t.$$

Calcoliamo il tempo t_1 che impiega ad arrivare in fondo al piano inclinato, che se ha altezza (cateto opposto all'angolo α) uguale ad h allora sarà lungo (ipotenusa) $h/\sin\alpha$:



$$s(t_1) = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t_1^2 + v_i \cdot t_1, \qquad \to \quad t_1 = \frac{-v_i \pm \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g \sin\alpha}$$

dove delle precedenti soluzioni dell'equazione di secondo grado per t_1 dobbiamo ovviamente scegliere solamente quella col segno "+" e che dà un tempo t_1 positivo; l'altra, col segno "−", rappresenta il tempo antecedente a quello di inizio del problema considerato al quale è partita la massa m per arrivare in cima al piano inclinato con velocità v_i. Si veda a tal proposito la discussione contenuta nel box di Esercizio 6. Quindi:

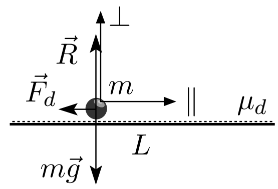
$$t_1 = \frac{-v_i + \sqrt{v_i^2 + 2gh}}{g \sin\alpha}$$

e la corrispondente velocità raggiunta alla fine del piano inclinato/inizio del piano con attrito sarà:

$$\begin{aligned} v(t_1) \equiv v_1 &= a_{\parallel} \cdot t_1 + v_i \\ &= g \sin\alpha \cdot t_1 + v_i \\ &= \sqrt{v_i^2 + 2gh}. \end{aligned}$$

Ripetiamo la stessa analisi per la fase II, del piano inclinato con attrito; si faccia riferimento alla figura a fianco per la scelta del sistema di riferimento.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_d, \qquad \to \quad \begin{cases} ma_{\parallel} = -F_d = -\mu_d mg \\ \dots \end{cases}$$



dove il segno "−" davanti alla forza di attrito dinamico deriva dal fatto che questa ha verso opposto a quello dell'asse orizzontale $\longrightarrow \parallel$ in figura, e dove abbiamo trascurato l'equazione del moto nella direzione verticale, lungo la quale non avviene nessun moto.

L'accelerazione è ancora costante, quindi la legge oraria è sempre quella di un moto uniformemente accelerato, la cui velocità iniziale è la v_1 trovata alla fine della fase precedente:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \mu_d g \cdot t^2 + v_1 \cdot t$$

che andiamo a risolvere per trovare il tempo t_2 che impiega per arrivare alla fine del tratto lungo L con attrito:

$$s(t_2) = L = -\frac{1}{2} \mu_d g \cdot t_2^2 + v_1 \cdot t_2, \qquad \to \quad t_2 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g L}}{\mu_d g}.$$

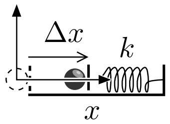
In questo caso l'ambiguità nel quale soluzione della precedente equazione di secondo grado in t_2 scegliere, se quella col "+" o quella col "−", è più sottile. Teniamole entrambe e vediamo cosa implica questo per la velocità alla fine della fase *II*:

$$\begin{aligned} v(t_2) \equiv v_2 &= a_\parallel \cdot t_2 + v_1 \\ &= -\mu_d g \cdot t_2 + v_1 \\ &= \pm\sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g L} \end{aligned}$$

quindi otteniamo due velocità con lo stesso modulo ma una diretta verso sinistra, segno "−", rispetto al sistema di riferimento disegnato, ed una diretta verso destra, segno "+". Ovviamente dobbiamo scegliere quest'ultima, consistente col nostro problema. Sostituendo l'espressione trovata precedentemente per v_1 nella precedente otteniamo:

$$v_2 = +\sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g L} = \sqrt{v_i^2 + 2gh - 2\mu_d g L}.$$

Procediamo quindi allo studio della fase tre. Trascurando di nuovo le componenti del moto perpendicolari al piano, abbiamo un'equazione del moto orizzontale (lungo l'asse x):



$$ma_x = -k\Delta x$$

che fornisce la seguente *legge oraria del moto armonico*:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

dove A è l'ampiezza delle oscillazioni, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ è la *velocità angolare* (o *pulsazione*) che rappresenta la velocità con cui queste oscillazioni avvengono, mentre φ è la *fase* che rappresenta la posizione iniziale del moto.[26] La velocità angolare dipende dalla costante elastica della molla e dalla massa ad essa attaccata tramite la relazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Inseriamo le condizioni iniziali per trovare gli altri parametri che compaiono nella legge oraria del moto armonico scritta sopra. Supponiamo che all'inizio della fase *III*, per $t = 0$, la massa m si trovi nella posizione di riposo della molla, cioè nell'origine degli assi del sistema di riferimento disegnato sopra:

$$x(0) = 0 = A \cdot \sin(0 + \varphi)$$

che quindi per esser soddisfatta implica una fase iniziale nulla: $\varphi = 0$.[27] L'allungamento massimo della molla invece ci dice che:

$$x_{\max} = \Delta x = A$$

che determina l'ampiezza delle oscillazioni. Quindi otteniamo la legge oraria:

$$x(t) = \Delta x \cdot \sin \omega t.$$

[26] La precedente legge oraria può essere scritta anche per pezzo della funzione *coseno*, $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, ma con un valore diverso della fase φ. Infatti le funzioni goniometriche seno e coseno hanno esattamente la stessa forma: il seno dal punto di vista funzionale, è come un coseno *anticipato* di $\pi/2$, e infatti vale la relazione $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos\alpha$, per qualsiasi angolo α, e analogamente il coseno è come un seno *ritardato* di $\pi/2$ (o anticipato di $-\pi/2$): $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha$. Qualunque di queste due funzioni goniometriche si utilizzi, tutto sta quindi nello scegliere il valore di questa fase coerentemente con le condizioni iniziali del problema.

[27] Se avessimo espresso questa legge oraria per mezzo del coseno avremmo trovato una fase $-\pi/2$.

Consideriamo la velocità con cui avviene linearmente il precedente moto (è possibile ottenerla derivando rispetto al tempo):

$$v_x(t) = \omega\,\Delta x \cdot \cos\omega t.$$

Sappiamo tuttavia che la velocità per $t = 0$ di questa fase è quella finale della fase precedente, ossia v_2, quindi:

$$\begin{aligned} t = 0: \qquad v_x(0) = v_2 &= \omega\,\Delta x \cos 0 = \omega\,\Delta x \cdot 1 \\ &= \omega\,\Delta x = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x. \end{aligned}$$

Dalla precedente si ricava in fine la costante elastica della molla:

$$\boxed{k = \frac{v_2^2}{\Delta x^2} m = \frac{v_i^2 + 2gh - 2\mu_d g L}{\Delta x^2} m}$$

Metodo 2 (dell'energia, facile e veloce)

Il metodo dell'energia permette di calcolare in modo agile la velocità di un corpo in un determinato punto della traiettoria in funzione della velocità che aveva in un altro punto e del (lavoro delle) forze in gioco. Prima cosa da fare quindi per applicare il metodo dell'energia è capire quali forze entrano in gioco, valutando se si tratta di *forze conservative*, *forze non-conservative*, o *forze esterne*, e di queste scriverne il lavoro (o la variazione di energia potenziale, nel caso delle prime). Come mostrato in figura all'inizio della sezione precedente, possiamo dividere il problema in tre momenti diversi: il piano inclinato, il piano con attrito, e la molla. Nella prima fase l'unica "forza viva", cioè che compie lavoro, è la componente parallela al piano della forza di gravità, uguale in modulo a $mg \sin\alpha$ e che agisce per un tratto $h/\sin\alpha$ (si veda la discussione nella sezione precedente). Il suo lavoro sarà quindi:

$$mg \sin\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = mgh$$

che poiché abbiamo a che fare con una *forza conservativa* sarà anche uguale a *meno la variazione dell'energia potenziale* (gravitazionale): $-\Delta U_g$.

Nella seconda fase il lavoro è fatto solo dalla forza di attrito, non conservativa, $\mu_d mg$, che si oppone al moto per un tratto L e quindi farà un lavoro negativo $-\mu_d mgL$. Nella terza abbiamo una *forza elastica*, ancora conservativa, il cui lavoro è:

$$-\Delta U_e = -\frac{1}{2}k\Delta x^2.$$

Mettendo insieme questi tre lavori, possiamo scrivere l'*equazione delle forze vive* (o dell'*energia cinetica*) come:

$$\begin{aligned} \Delta K \quad + \quad \Delta U \quad &= L_{\text{NC}} \ (+L_{\text{ext}} \leftarrow \text{non ci sono}) \\ \overbrace{K_f - K_i} + \overbrace{\Delta U_g + \Delta U_e} &= L_{\text{NC}} \\ 0 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2 &= -\mu_d mg \cdot L \end{aligned}$$

dove K_f è l'energia cinetica finale, quando la cassa arriva alla massima compressione della molla e si ferma ($v_f = 0$, quindi $K_f = 0$), mentre K_i è quella iniziale, quando la cassa parte dalla cima del piano inclinato con velocità v_i.

E' immediato risolvere la precedente per trovare k:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh - \mu_d mg \cdot L$$

$$\boxed{k = \frac{v_i^2 + 2gh - 2\mu_d gL}{\Delta x^2}m}$$

esattamente come prima ma con moltissimi meno calcoli.

Inserendo i valori numerici dati dal testo dell'esercizio otteniamo:

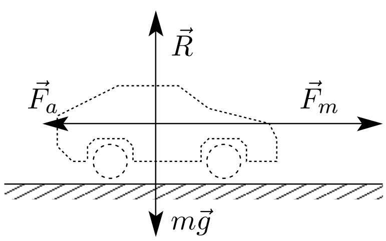
$$k = 20 \text{ kN/m}.$$

Esercizio 24

Dinamica, moto uniformemente accelerato e forza d'attrito - Compito, febbraio 2018

Un'auto di massa 800 kg parte da ferma e si muove spinta da un motore che le imprime una forza costante di 2000 N. Il coefficiente di attrito delle ruote con la strada è costante e vale 0.10. Si calcoli quanta strada compie l'auto per raggiungere la velocità di 100.8 km/h. Quanto lavoro ha fatto il motore per raggiungere questa velocità?

Soluzione



In questo tipo di problemi di Dinamica, in cui è richiesto di studiare il moto di un corpo sul quale agiscono più forze, la prima cosa da fare è sempre quella di disegnare il *diagramma di corpo libero* dell'oggetto, identificando le varie forze e calcolandone la risultante: vedi disegno a destra. Verticalmente agisce la forza peso, $m\vec{g}$ e la reazione vincolare della strada $\vec{R}$; le due sono tali da annullarsi e quindi la macchina procede orizzontalmente senza "sprofondare" o "volare". Orizzontalmente invece agiscono la spinta del motore in avanti, $\vec{F}_m$ e l'attrito, $\vec{F}_a$ in direzione opposta. Prendendo un sistema di riferimento con un asse orizzontale e il verso dato dal moto dell'auto, possiamo scrivere l'equazione del moto lungo questo come:

$$ma = F_m - F_a$$

ma ricordando come è legata la forza di attrito alla forza peso dell'auto (vedi discussione in Esercizio 22), $F_a = \mu mg$, dove $\mu = 0.10$ è il coefficiente di attrito tra ruote e strada, otteniamo:

$$ma = F_m - \mu mg, \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{F_m}{m} - \mu g.$$

Quindi l'auto si muoverà di *moto rettilineo uniformemente accelerato* con accelerazione data da quanto scritto sopra. Per sapere quanta strada compie la macchina prima di raggiungere la velocità finale $v = 100.8$ km/h possiamo risolvere la ben nota legge oraria per il moto uniformemente accelerato e la relazione che lega a a v,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ a = \frac{v}{t} \end{cases}$$

per eliminare la dipendenza dal tempo e trovare lo spazio percorso in funzione di a e di v. Il calcolo è immediato e porta a:

$$x = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}.$$

Il precedente risultato poteva essere ottenuto anche per mezzo dell'*equazione delle forze vive* (o *Teorema dell'energia cinetica*) legando la variazione di energia cinetica al lavoro della forza (costante) che l'ha prodotta:

$$\begin{aligned} \Delta K &= L \\ \frac{1}{2}mv^2 - 0 &= ma\,x \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}. \end{aligned}$$

sostituendo l'espressione per a trovata prima ed i dati del problema otteniamo:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{F_m - \mu mg} \simeq 258 \text{ m}}$$

Il lavoro fatto dal motore sarà dato dal prodotto della forza (costante) fatta dal motore (e NON della risultante delle forze!) per lo spostamento:

$$\boxed{L_m = F_m \cdot x \simeq 516 \text{ kJ}}$$

Notare che questo lavoro è maggiore di quello totale fatto sull'automobile in quanto, oltre a F_m, agisce in direzione opposta la forza di attrito, che quindi fa un lavoro negativo.

Esercizio 25

Dinamica, moto uniformemente accelerato e forza d'attrito

Un'importante "regoletta generale" per rispettare le distanze di sicurezza quando si è alla guida è quella di "dividere la propria velocità espressa in km/h per 10 ed elevare il risultato al quadrato; il numero risultante è un buon indicatore, in metri, della distanza di sicurezza da mantenere."[28] *Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra pneumatici e asfalto, in dipendenza dalle condizioni di usura dei due, va in caso di asciutto da circa 0.6 a circa 0.8 e da circa 0.4 a circa 0.6 in caso di bagnato, giustificare fisicamente la precedente regola.*

Soluzione

Rielaborando un po' il testo del problema, quello che viene richiesto è di calcolare la distanza di sicurezza d necessaria ad un veicolo che viaggia con velocità iniziale v per arrestare il proprio moto per effetto della decelerazione prodotta dalla forza di attrito dinamico (radente) tra ruote ed asfalto: $\mu_d \cdot mg$. Riguardando quindi il confronto di grandezze cinematiche in punti diversi del moto, la velocità iniziale e le posizione finale, la strategia migliore con cui affrontare il problema è attraverso il metodo dell'energia. Nella direzione orizzontale del moto (trascuriamo la direzione verticale)

[28] Fonte: Automobil Club d'Italia.

Esercizio 26

Forze di superficie, introduzione al concetto di pressione

Al Museo delle Scienze di Trento (MUSE) viene proposto ai visitatori di sperimentare sulla loro pelle un letto di chiodi da fachiro. Quest'attrazione, di origine indiana, consiste in un piano di legno sul quale sono disposti verticalmente e con le punte verso l'alto un gran numero di chiodi, e sul quale i visitatori sono invitati a sdraiarsi, come fosse un letto. Assumendo che i chiodi abbiano punte con superfici di circa 1 mm^2 e che siano distribuiti uniformemente 1 ogni centimetro quadro, spiegare se i visitatori hanno la possibilità di sopravvivere all'attrazione oppure no.

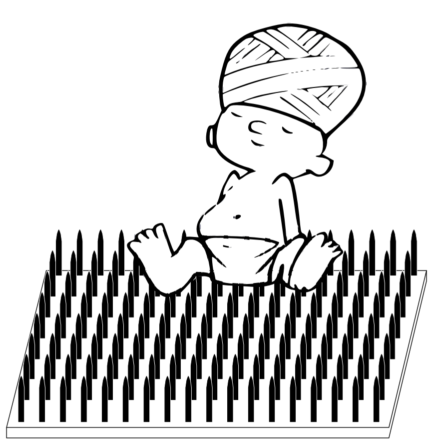
Soluzione

Lo stupore che suscita questa attrazione deriva dal fatto che, a prima vista, può sembrare impossibile sdraiarsi su di un letto di chiodi senza ferirsi. Ciò è motivato dall'esperienza comune che se uno calpesta un chiodo si fa male. Cerchiamo di capire quindi in che modo le cose cambiano, quantitativamente, in questo problema.

In questo problema si abbandona lo studio dei *corpi puntiformi*. Infatti, come vedremo, la spiegazione del letto del fachiro risiede nel fatto che la forza peso non è applicata su di un singolo chiodo, come se uno lo calpestasse (e si ferisse), ma distribuita su tantissimi chiodi. Immaginiamo infatti che una persona sdraiata occupi una superficie di letto $S \sim 1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$. A questa corrisponderanno circa 10 000 chiodi, distanziati l'uno dall'altro 1 cm. Quindi la forza peso sarà distribuita su questi circa diecimila chiodini, e quindi, per un turista di circa 80 kg, la forza sarà in media di 0.08 N per chiodino.

Come facciamo a dire se questa forza, applicata su ogni chiodo, sia poca o tanta, e sia il caso quindi di sdraiarsi o no sul letto del fachiro?

Per rispondere ci è utile introdurre un nuovo concetto. Abbiamo visto che per un *corpo esteso* le forze possono essere applicate su più punti, come in questo caso le punte dei diecimila chiodi. In realtà la punta di ogni chiodo ha a sua volta un superficie, $\sim 1\ \text{mm}^2$, e quindi le forze non saranno applicate in 10 000 punti ma su 10 000 superfici (ognuna delle quali composta da *infiniti* punti). Appare evidente quindi come il concetto di forza sia in un certo senso *inappropriato* per risolvere questo problema; quello che ci interesserà valutare è *quanta forza viene applicata su una certa superficie*; come noto vi è differenza tra il cercare di forare un pezzo di carta con la punta di un dito o con quella di un ago, a parità di forza, e lo stesso vale per il letto del fachiro. Introduciamo quindi il concetto di *pressione*, che discuteremo nel dettaglio in riferimento all'Esercizio 27, come *forza applicata su una certa superficie*:



$$p = \frac{F}{S}$$

la cui unità di misura, nel Sistema Internazionale (SI) di unità di misura, è il Pascal: 1 Pa = 1 N/m^2.

Nel problema considerato la pressione che esercita il letto di chiodi sulla schiena dell'aspirante fachiro è:

$$p = \frac{mg}{S_{\text{chiodo}} \cdot n\hat{}\backslash circ_{\text{chiodi}}} \simeq \frac{800\ \text{N}}{10\,000 \cdot 1\ \text{mm}^2} \simeq 8000\ \text{Pa}.$$

Possiamo quindi riformulare l'obiezione allo sdraiarsi sul letto del fachiro nel seguente modo: è poca o tanta questa pressione da farmi male?

La risposta è che in effetti questa pressione è abbastanza *poca*, ed in particolare è inferiore a quella che si esercita sulle ginocchia di una persona che sta in ginocchioni sul pavimento (superficie ginocchia ~ 50 cm^2). Questo dimostra come effettivamente l'attrazione al museo sia sicura per i visitatori, e soprattutto come spesso, con *corpi estesi*, il solo concetto di forza non sia sufficiente a caratterizzare il problema.

Esercizio 27

Fluidi, pressione - Secondo compitino, 5 giugno 2017

Da un piccolo tubo di area 0.065 cm^2 esce un liquido alla pressione di 6 × 10^5 N/m^2. Quanta forza è necessaria per otturare il tubo in modo che il fluido non esca più?

Richiami di teoria: i fluidi e la pressione

Negli esercizi svolti fino ad ora abbiamo studiato il moto di *corpi* considerati *puntiformi*; si è trattata di una "semplificazione" che ci ha permesso di ignorare tutta una serie di effetti dovuti alla struttura del corpo, come per esempio la possibilità di *ruotare* su loro stessi, di deformarsi durante il loro moto etc. Altro vantaggio era che tutte le forze applicate al corpo avevano come *punto di applicazione* il singolo punto in cui si trovava "concentrato" il corpo stesso, e quindi era immediato calcolarne la risultante per mezzo della loro *somma vettoriale*, come visto nell'Esercizio 1, e scrivere quindi l'*equazione del moto*:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

In questo esercizio abbiamo a che fare con un *corpo esteso*, ed in particolare con un *liquido.* I corpi estesi sono costituiti da un numero molto grande, idealmente infinito[29] di costituenti elementari (particelle, atomi, molecole, granelli di sabbia, pezzettini del LEGO®); si dividono in *solidi*, quelli dotati di *forma e volume propri*, ed in *fluidi.* I primi a loro volta si dividono in *corpi rigidi*, quelli la cui distanza tra ognuna delle loro parti rimane immutata nel tempo, ed in *corpi elastici*, che possono subire deformazioni per poi tornare alla forma originaria, come le molle. I fluidi invece hanno la proprietà caratteristica di *poter "fluire"*; questa è dovuta al fatto che tali sostanze possono opporre solo forze perpendicolari agli eventuali vincoli (o anche a loro stessi) che gli si oppongono,[30] e pertanto *non hanno forma propria.* Per "maneggiare" un fluido sarà spesso nella pratica necessario chiuderlo in un "contenitore". A loro volta i fluidi si dividono *idealmente* in due categorie: i *liquidi*, cioè quelle sostanze dotate di un volume proprio, e quindi incomprimibili, e gli *aeriformi*, come i gas, che non hanno *né forma né volume* proprio (si pensi all'aria contenuta dentro ad un palloncino).

La precedente è ovviamente una semplificazione; non esistono corpi "veramente rigidi" o "liquidi veramente incomprimibili", però nelle applicazioni pratiche, come fatto con lo studio della dinamica dei punti materiali, possiamo immaginare numerose circostanze in cui le proprietà di deformazione o comprimibilità sono trascurabili ai fini del problema. E' facile riconoscere anche che solidi e fluidi sono le sostanze di maggior interesse e più comuni nella pratica del laboratorio, e pertanto è di estrema importanza il loro studio, partendo da semplici problemi come questo.

Lo scopo della *Meccanica dei Fluidi* è quello di estendere a queste sostanze tutte le leggi ed i concetti introdotti o derivati nello studio dei corpi puntiformi. Partiamo dall'*equazione del moto*, data dal Secondo Principio della Dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}$. Già in questa né il termine a destra né quello a sinistra dell'uguale sono direttamente applicabili ad un fluido; infatti, la forza, essendo una grandezza vettoriale, è caratterizzata da un (singolo) punto di applicazione, mentre

[29] O, se si preferisce per avere una stima quantitativa, dell'ordine del *Numero di Avogadro* $\mathscr{N}_A \simeq 6.022 \times 10^{23}$ particelle/mole di sostanza.

[30] Si immagini un barattolo di miele versato sul tavolo; non essendoci forze laterali, parallele al tavolo, il miele finirà per colare allargandosi "a macchia d'olio" lungo la superficie del tavolo.

i costituenti elementari (punti) del fluido sono un numero praticamente infinito. E' ovvio che è di poca utilità pratica scrivere un'equazione del moto per ognuno di questi.

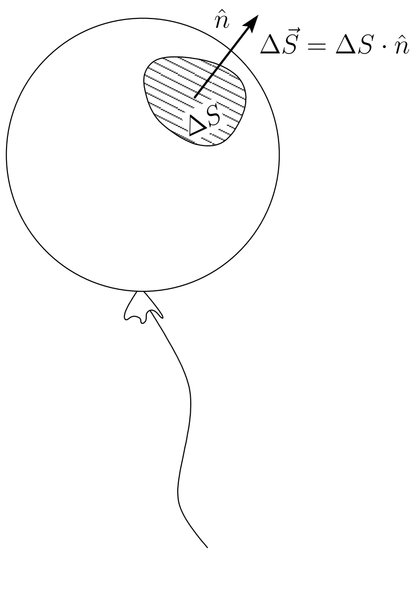
Anche a destra dell'uguale nell'equazione del moto le cose non vanno meglio; tralasciando il fatto che parti diverse di un fluido possono avere, ed in generale hanno, accelerazioni diverse, è immediato convincersi di come la massa non sia di fatto un buon parametro per descrivere la dinamica di un fluido. Si pensi per esempio di rovesciare per terra 1 kg di acqua, poi 2 kg di acqua, ed infine di 1 kg di miele; le differenze maggiori non saranno tanto tra le due quantità di acqua ma piuttosto tra 1 kg di acqua ed uno di miele. Inoltre, in molte situazioni, si pensi per esempio all'acqua che scorre in una conduttura, non abbiamo a disposizione il valore di tutta la massa di acqua disponibile ma solo l'informazione che si tratta di acqua. A questo punto uno potrebbe pensare di risolvere il problema sull'informazione *globale* riguardo alla massa del fluido considerando *localmente* quella che è la massa dei costituenti della sostanza. L'idea è corretta, con una piccola precauzione; per fluidi *non-omogenei*, composti da elementi di tipo diverso, come l'aria (78% N_2, 21% O_2, 1% Ar e altri), occorrerà fare *una media* sul volume delle masse delle varie sostanze. Quindi, mettendo insieme le idee precedenti, possiamo introdurre la così detta **densità** (o **massa volumica**) calcolata attorno al punto $\vec{r}$ come:

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}(\vec{r})}$$

dove $\Delta m(\vec{r})$ è la massa contenuta in un volumetto infinitesimo di fluido $\Delta V(\vec{r})$ centrata attorno alla posizione $\vec{r}$. Se il fluido è *omogeneo* la precedente "media" non dipenderà dal punto $\vec{r}$ in cui questa viene calcolata, e non dipenderà neanche da quanto grande o piccolo uno prende il volume di fluido nel quale calcola la massa; in queste circostanze la precedente definizione di densità può essere semplificata in:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

L'unità di misura nel Sistema Internazionale (SI) è il kg/m^3. Più spesso nella pratica si trovano densità espresse in g/cm^3 o kg/l. Un valore da ricordare è quello dell'acqua, uguale a circa 1000 kg/m^3, o 1 g/cm^3 o 1 kg/l. La densità è una grandezza fisica che ci permette di distinguere "macroscopicamente" due fluidi diversi, come l'acqua e l'olio o il mercurio. Spesso non è sufficiente ed altre proprietà, come la *viscosità*, saranno necessarie a caratterizzare il comportamento di fluidi diversi. Nei problemi che incontreremo trascureremo tali tipi di complicazioni.



Torniamo ad occuparci del generalizzare il concetto di forza ad un fluido. Sulla falsa riga di quanto fatto per la densità, possiamo pensare di definire una sorta di forza "mediata" (o meglio *applicata*) ad una porzione estesa di fluido. Immaginando per esempio di racchiudere il fluido in un contenitore, possiamo definire la **pressione** come la forza applicata sulla superficie del contenitore:

$$\boxed{p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{\Delta S}}$$

dove $\vec{F} \cdot \hat{n}$ è la componente della forza perpendicolare alla superficie (per questo il *prodotto scalare*, si veda l'introduzione all'Esercizio 1), come conseguenza del fatto che i fluidi possono solo esercitare forze perpendicolari e quindi fluiscono, e dove $\Delta\vec{S} = \Delta S \cdot \hat{n}$ è la superficie (infinitesima) col suo

versore $\hat{n}$ che ne dà l'orientazione (vedi figura a fianco).[31]
Questa è anche la pressione che parti di fluido esercitano su altre parti di fluido, considerando la superficie (immaginaria) che le separa come quella su cui agisce la forza. Notare dalla precedente definizione che *la pressione è una grandezza scalare* e che quindi a differenza della forza non ha né direzione né verso. Nel caso particolare in cui la forza sia applicata in modo uniforme su tutta la superficie e che il fluido sia omogeneo, la precedente può essere semplificata in:

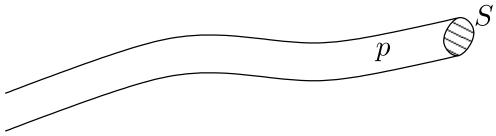
$$p = \frac{F}{S}.$$

L'unità di misura della pressione è il Pascal, 1 Pa = 1 N/m^2. Spesso si trovano in uso suoi multipli "non standard", come il bar = 10^5 Pa = 10 N/cm^2 o l'hPa = 100 Pa, usato nelle previsioni del tempo.

Soluzione

Nell'esercizio è richiesto di calcolare (il modulo de) la forza necessaria a tappare un tubicino dal diametro $S = 0.065$ cm^2 nel quale scorre un fluido con una pressione $p = 6 \times 10^5$ N/m^2. Per farlo basta riscrivere l'equazione che dà la definizione di pressione mettendo la forza come incognita (e facendo attenzione a fare le giuste conversioni di unità di misura):

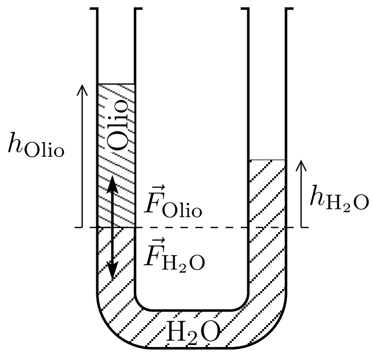
$$\begin{aligned} F &= p \cdot S \\ &= 6 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0.065 \text{ cm}^2 \\ &= 6 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0.065 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ &= 3.9 \text{ N}. \end{aligned}$$



Esercizio 28

Legge di Stevino, fluidi in campo gravitazionale - Compito, 9 giugno 2017

In un tubo a forma di "U" sono versati prima dell'olio e poi dell'acqua. Rispetto al livello del piano di contatto tra i due liquidi, la superficie dell'acqua è più alta di 19 cm e quella dell'olio di 24 cm. Calcolare la densità dell'olio.



Richiami di teoria: Legge di Stevino, pressione in funzione dell'altezza

Nell'esercizio precedente abbiamo studiato l'effetto di *forze di superficie* su di un fluido, come quella necessaria a occludere il tubicino in figura, proporzionali cioè alla superficie che lo delimita. Esistono anche *forze di volume* applicate ai fluidi che sono proporzionali, per ogni volumetto di fluido ΔV, alla quantità di materia in esso contenuta. Un esempio è la *forza di gravità*:

$$\Delta\vec{F} = \vec{g}\Delta m$$

[31] Nota sulla scelta del verso del vettore $\hat{n}$ perpendicolare alla superficie ΔS. I fluidi "non appiccicosi" che considereremo in questi problemi non possono applicare *forze di trazione*, cioè "tirare su" i contenitori coi quali sono a contatto, e quindi le forze che sono in grado di esercitare sono tutte dirette perpendicolarmente *verso l'esterno del fluido*, e di conseguenza le forze di reazione che esercitano le superfici che li delimitano sono verso l'interno del fluido. Quindi, se $\Delta\vec{S}$ è la superficie esterna che delimita il fluido la sua normale $\hat{n}$ sarà diretta verso il fluido, se invece è la superficie del fluido la sua normale sarà diretta esternamente a lui.

che rappresenta la forza peso agente su un elementino ΔV di fluido di massa $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$. Questo è appunto il caso del presente esercizio.

Siamo sempre in condizioni *idrostatiche* di fluidi in quiete; vediamo quali *condizioni di equilibrio* devono sussistere perché ciò sia valido. Il disegno a fianco schematizza il problema ed in particolare riporta la forza peso che il volume di olio applica sull'acqua sottostante e la forza di reazione (segno opposto) dell'acqua su quest'ultimo:

$$\vec{F}_{\text{olio}} = -\vec{F}_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Passiamo alla descrizione per mezzo delle pressioni; la pressione esercitata dal volume di olio per effetto della sua forza peso lungo la superficie di contatto con l'acqua (linea tratteggiata nel disegno) dovrà eguagliare quella di reazione dell'acqua. Possiamo riscrivere la prima come uguale al rapporto tra la forza e la sezione S del tubo, ossia:

$$\frac{F_{\text{Olio}}}{S} = \frac{m_{\text{Olio}}g}{S} = \frac{\rho_{\text{Olio}}V_{\text{Olio}}\,g}{S} = \frac{\rho_{\text{Olio}}\,h_{\text{Olio}}S\,g}{S} = \rho_{\text{Olio}}g\,h_{\text{Olio}}$$

ed eguagliarla alla pressione dell'acqua a quell'altezza del tubicino. Lo stesso dovrà valere dall'altro lato del "tubo a U" dove la pressione sarà data da peso del volume di acqua di altezza $h_{\text{H}_2\text{O}}$. Quindi la condizione di equilibrio all'interno del tubo si ha quindo la pressione dell'olio eguaglia quella dell'acqua all'altezza della linea di galleggiamento, ossia:

$$\rho_{\text{Olio}}g\,h_{\text{Olio}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}}g\,h_{\text{H}_2\text{O}}.$$

La precedente è una relazione generale è può essere riscritta nel seguente modo: *la pressione dovuta alla forza gravitazionale a profondità h in un certo fluido è uguale a:*

$$p(h) = \rho g h.$$

In generale, come nel caso precedente, a contribuire alla pressione non c'è solo il peso dell'olio o dell'acqua ma anche la *pressione atmosferica*, tipicamente indicata con $p_0 \sim 10^5$ Pa, che "preme" sulle superfici superiori dei due fluidi. Ovviamente non è stata considerata nell'equazione del bilanciamento delle due pressioni poiché uguale da entrambi i lati del "tubo a U" e quindi tale da controbilanciarsi automaticamente.

In conclusione, per quanto detto, *a profondità h in un fluido di densità ρ immerso in atmosfera a pressione p_0 è presente una pressione*:

$$\boxed{p(h) = p_0 + \rho g h}$$

La precedente relazione è stata dimostrata sperimentalmente e prende il nome di **Legge di Stevino** (ca. 1580).

Soluzione

Tornando al problema dell'equilibrio del volume di olio sull'acqua nel "tubo ad U" in figura, dalla relazione $\rho_{\text{Olio}}g\,h_{\text{Olio}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}}g\,h_{\text{H}_2\text{O}}$ è immediato ottenere:

$$\rho_{\text{Olio}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}}\frac{h_{\text{H}_2\text{O}}}{h_{\text{Olio}}} \simeq 1\ \text{g/cm}^3 \cdot \frac{19\ \text{cm}}{24\ \text{cm}} \simeq 0.79\ \text{g/cm}^3.$$

Curiosità sugli iceberg

Le stesse considerazioni si applicano al galleggiamento degli iceberg ("montagne di ghiaccio" trad.) nell'acqua del mare. Come noto dal Cinema, il volume che emerge dall'acqua, e quindi *visibile* ai marinai di vedetta, è una parte molto piccola rispetto alla parte sommersa dell'iceberg, che può urtare la chiglia di una nave e causarne l'affondamento. Sapendo infatti che l'acqua (salata) del mare ha una densità di circa $\rho_{\text{mare}} \simeq 1.025$ g/cm^3 e il ghiaccio dell'iceberg $\rho_{\text{iceberg}} \simeq 0.917$ g/cm^3, il rapporto tra le altezze (o anche i volumi, se la sezione orizzontale dell'iceberg rimane invariata, come in un parallelepipedo) della parte che emerge h_{emersa} rispetto a quella di tutto l'iceberg, uguale a quella emersa più quella sommersa in mare, $h_{\text{iceberg}} = h_{\text{emersa}} + h_{\text{mare}}$, è:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{iceberg}}\cancel{g}\, h_{\text{iceberg}} &= \rho_{\text{mare}}\cancel{g}\, h_{\text{mare}} \\ \rho_{\text{iceberg}} h_{\text{iceberg}} &= \rho_{\text{mare}}\left(h_{\text{iceberg}} - h_{\text{emersa}}\right) \\ \frac{\rho_{\text{iceberg}}}{\rho_{\text{mare}}} &= 1 - \frac{h_{\text{emersa}}}{h_{\text{iceberg}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{h_{\text{emersa}}}{h_{\text{iceberg}}} = 1 - \frac{\rho_{\text{iceberg}}}{\rho_{\text{mare}}} \simeq 11\%}$$

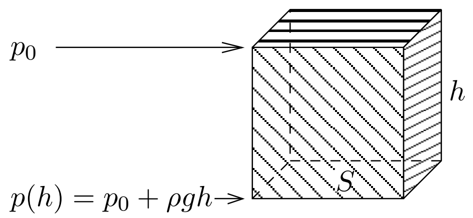
Per esempio, un iceberg che emerge dall'acqua per un altezza pari a quella di un uomo adulto, circa 180 cm, e quindi visibile da relativamente vicino da una nave in avvicinamento, ha in realtà un superficie sommersa alta quanto un palazzo di cinque piani, circa 16 metri.

Esercizio 29

Fluidi, spinta di Archimede - Simile esercizio 5 del secondo compitino B, 5 giugno 2017

Si vuole stimare con ottima precisione la densità di un certo oggetto di polipropilene (formula chimica $(C_3H_6)_n$) di volume 1 dm^3 per mezzo di una bilancia analitica da laboratorio (risoluzione 0.1 mg). Eseguendo la misura si ottiene il valore di 898.7 g. Quanto vale la densità del campione? Come cambia in percentuale la risposta tenendo giustamente di conto della spinta di Archimede dell'aria nella quale è immerso? (Densità dell'aria 1.225 kg/m^3)

Richiami di teoria: Principio di Archimede



Anche in questo esercizio entrano in gioco gli effetti dovuti al comportamento dei fluidi, come l'aria nella quale siamo "immersi", in presenza di un campo gravitazionale. Consideriamo infatti un certo volume di materiale immerso in un fluido; quest'ultimo può essere acqua, aria, olio o qualsiasi altra cosa. Per semplicità considereremo un *parallelogramma* di base S e altezza h, come quello nella figura a fianco, di modo che sia immediato il calcolo del suo volume, $V = S \cdot h$, ma la discussione che segue si applica ad ogni forma di solido.[32] Come noto dalla discussione nelle sezioni precedenti, il fluido, per effetto della forza peso che gli strati superiori esercitano su quelli inferiori, sarà caratterizzato da una certa pressione dipendente dall'altezza, e questa pressione sarà a sua volta applicata sulle facce del parallelogramma. Ponendo come riferimento (o "origine") nella misura delle pressioni la faccia superiore, abbiamo che la pressione del fluido che preme in quel punto è per definizione p_0. Invece, sulla sua faccia

[32] Come noto dal LEGO® o da Minecraft, ogni solido può essere approssimato come tanti cubetti messi insieme; tanti più sono i cubetti tanto maggiore è l'accuratezza nella rappresentazione dell'oggetto.

inferiore, abbiamo dalla Legge di Stevino che la pressione esercitata è:

$$p(h) = p_0 + \rho g h,$$

dove ρ è la densità del fluido nel quale è immerso. Questa differenza di pressioni ha sul solido l'effetto complessivo di produrre una *spinta* verso l'alto, opposta quindi all'accelerazione di gravità, $-\hat{g}$ dove il simbolo "$\hat{\ }$" sta ad indicare il *versore* (o vettore unitario: $\hat{g} = \vec{g}/g$), uguale a:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\hat{g} \cdot \Delta p \cdot S = -\hat{g} \cdot \big(p_0 + \rho g h - p_0\big) \cdot S \\ &= -\rho\, hS\, \vec{g} = -\rho V\, \vec{g}\end{aligned}$$

Come visibile dall'ultimo termine della precedente equazione, *un corpo immerso in un fluido subisce una spinta verso l'alto di intensità uguale al peso del volume di fluido spostato*:

$$\boxed{\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluido}} V_{\text{spostato}}\, \vec{g} = -m_{\substack{\text{fluido}\\\text{spostato}}}\, \vec{g}}$$

Il precedente è conosciuto come **Principio di Archimede**, e la forza prende il nome di *spinta di Archimede.*

Quanto appena visto sta alla base del galleggiamento in acqua di certi corpi, come le navi o gli iceberg, e anche del volo delle mongolfiere. Distinguiamo infatti tre possibili casi. Il corpo *galleggia*, quindi il volume di acqua spostato, che sarà necessariamente minore del suo volume, produce una spinta di Archimede uguale alla sua forza peso; in questo caso valgono le considerazioni fatte nell'esercizio precedente, ed il rapporto tra il volume di solido che emerge e quello totale sarà uguale al rapporto della sua densità e di quella del fluido nel quale è immerso. Per corpi eterogenei, come appunto le navi, composte da parti metalliche e da tantissimi spazi vuoti, quella che si considera è la densità media del suo volume immerso.

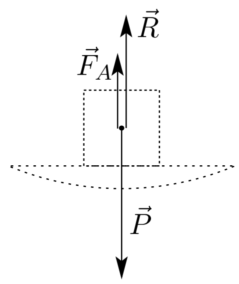
Altre possibilità sono che il corpo *salga*, come le mongolfiere, o che *affondi*, che si verificano rispettivamente quando la sua densità è minore e maggiore di quella del fluido nel quale è immerso. Nel primo caso la forza effettiva che lo *tira su* sarà: $\vec{F} = -V(\rho_{\text{fluido}} - \rho_{\text{solido}})\vec{g}$. Nel secondo la forza che lo *tira giù* (il suo *peso effettivo*) sarà: $\vec{P}_{\text{eff}} = V(\rho_{\text{solido}} - \rho_{\text{fluido}})\vec{g}$. Quest'ultimo è esattamente il caso del presente esercizio.

Soluzione

Noto il volume del campione di polipropilene e utilizzando come "massa" il numero letto sulla bilancia analitica, applicando direttamente la formula per il calcolo della densità otteniamo:

$$\rho_{\text{sbagliata}} = \frac{m_{\text{misurata}}}{V} = 898.7\ \text{kg/m}^3.$$

Questo valore risulta in realtà *sottostimato*, e pertanto sbagliato, per il fatto che non viene tenuta di giusto conto la *spinta di Archimede* che il fluido (l'aria) applica sul campione in esso immerso. In pratica, eseguendo la precedente stima ci siamo scordati di considerare una forza che agisce nel problema e questo ci ha portato ad un risultato sbagliato.



Per tenere di conto di tutte le forze agenti nel problema, cominciamo col disegnare il *diagramma di corpo libero* (si veda l'Esercizio 15) per il campione appoggiato sulla bilancia; vedi figura a fianco. Da quanto visto nella precedente sezione di richiami teorici, oltre alla forza peso $\vec{P}$, proporzionale alla densità del campione, è applicata sul corpo, e in verso opposto a quest'ultima, una seconda forza $\vec{F}_A$ proporzionale alla densità del fluido spostato. Infine, la bilancia fornisce in risposta una *reazione vincolare* $\vec{R}$ uguale alla risultante delle precedenti due forze, detta "peso efficacie", che, avendo versi opposti, sarà inferiore alla risposta che avrebbe dato alla sola forza peso. Essendo il numero (la massa) che leggiamo sulla bilancia proporzionale (per il fattore $g \simeq 9.81$ m/s^2) alla reazione vincolare, anche questo sarà inferiore rispetto alla "massa vera", e lo stesso la stima della densità del campione.

Correggiamo quindi quanto scritto sopra tenendo conto della spinta di Archimede. Scrivendo l'equazione del moto $\vec{F} = m\vec{a} = 0$ (raggiunto l'equilibrio la bilancia è ferma, quindi $\vec{a} = 0$), sfruttando le formule della sezione precedente, otteniamo:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_A = 0 \; (= m\vec{a})$$
$$gm - gm_{\text{misurata}} + gV\rho_{\text{aria}} = 0$$
$$m_{\text{vera}} = m_{\text{misurata}} + V\rho_{\text{aria}}$$

e quindi la densità corretta risulta essere:

$$\rho_{(\mathrm{C_3H_6})_n} = \frac{m_{\text{vera}}}{V} = \frac{m_{\text{misurata}} + V\rho_{\text{aria}}}{V} = 900 \text{ kg/m}^3.$$

Ovviamente la differenza col risultato (scorretto) dato prima è minima, $\sim 1\%$, ma comunque maggiore della risoluzione dello strumento utilizzato, 0.1 g a fronte di una massa di circa 900 g, cioè circa lo 0.1%, e quindi per sfruttare in pieno l'accuratezza della bilancia analitica è stato necessario includere gli effetti della spinta di Archimede. Ovviamente se il campione fosse stato di piombo, densità 11 340 kg/m^3 cioè diecimila volte più dell'aria, l'errore sarebbe stato solo lo 0.01%, o di un grammo su dieci chili, e questo giustifica il fatto che abitualmente, quando pesiamo degli oggetti, non consideriamo gli effetti della spinta di Archimede.[33]

Curiosità: il peso dei pesci

Un'esclamazione che prima o poi viene proferita da ogni pescatore, tranne quelli molto sfortunati, è: "ma quanto pesa questo pesce?!" La risposta in realtà è che il pesce nell'acqua *pesa praticamente* 0 N. La ragione è il solito *Principio di Archimede*: la forza peso di un pesce viene bilanciata quasi esattamente dalla spinta di Archimede dell'acqua su di lui, per cui il *peso effettivo* di un pesce risulta nullo; il pesce "sta a galla". Ciò è noto ai pescatori più esperti, specialmente a quelli che puntano a grosse prede, ed anche a chi ha letto il romanzo di Ernest Hemingway, "*Il vecchio e il mare*". Il protagonista, il vecchio Santiago, per riuscire a pescare un enorme pesce spada, lungo un metro e mezzo più della sua imbarcazione, decide di attendere tre giorni, dal momento in cui lo ha preso all'amo a quando riesce effettivamente a portarlo sulla barca, di modo da far esaurire tutte le energie alla preda e tirarlo a sé senza fare praticamente forza.

Esercizio 30

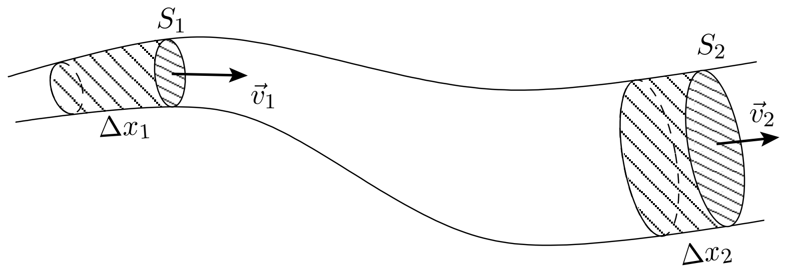
Fluidi, conservazione della portata

Un giardiniere deve installare un dispositivo di irrigazione automatica per una certa porzione di prato. Per farlo attinge l'acqua da un rubinetto capace di erogare 0.1 litri/sec, che collega ad un irrigatore con degli ugelli orientati in modo da spruzzare l'acqua ad un angolo di 45° rispetto al suolo. Quanto deve essere grande la sezione totale S di questi ugelli per riuscire a coprire una distanza massima di 10 metri?

[33] Una persona che pesandosi legge sulla bilancia "80 kg", assumendo una densità simile a quella dell'acqua (d'altronde siamo fatti per il 70% da acqua), ha in realtà sovrastimato la sua massa di ben 80 g, praticamente il peso di un paio di mutande.

Richiami di teoria: Equazione di conservazione della portata

E' chiaro che nel presente problema la distanza raggiunta dal getto d'acqua dipenderà dalla *velocità* con cui questa fuoriesce dagli ugelli dell'irrigatore; per il resto il problema è simile a quello incontrato nell'Esercizio 12 della caduta di un oggetto dal tavolo. A sua volta, la velocità del getto dipenderà da "quanta acqua arriva" ogni istante di tempo, e da quanto sono grandi i forellini da cui viene spruzzata. Cerchiamo di formalizzare la cosa introducendo un concetto molto importante per lo studio dei fluidi.



Prendiamo una generica conduttura con sezione S variabile, come in figura. Consideriamo lo scorrere al suo interno di un liquido (incompressibile), ossia di una sostanza con volume - ma non forma - fissato; vedi discussione nell'Esercizio 27. Grazie a questa proprietà possiamo affermare che, se non ci sono perdite o intasamenti, *tanto liquido entra in un intervallo di tempo* Δt *quanto ne deve uscire*, ossia indicando come in figura con "1" la superficie che considereremo l'ingresso della porzione di tubo e con "2" quella che considereremo l'uscita abbiamo:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t}.$$

Se l'intervallo di tempo è abbastanza breve, *in buona approssimazione* possiamo considerare i due volumi come dei parallelepipedi a facce uguali, e quindi riscriverli come "superficie di base per altezza":

$$\Delta V_1 = S_1 \cdot \Delta x_1 \qquad \Delta V_2 = S_2 \cdot \Delta x_2.$$

Ancora, sapendo che il modulo della velocità di entrata del liquido (cioè al livello della superficie S_1) è v_1 e quello di uscita (in S_2) è v_2 abbiamo (moto approssimativamente *rettilineo e uniforme* se Δt è abbastanza piccolo):

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \qquad \rightarrow \qquad \Delta x_1 = v_1 \cdot \Delta t,$$
$$\Delta x_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

e quindi:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{S_1 \cdot \Delta x_1}{\Delta t} = \frac{S_1 \cdot v_1 \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = S_1 \cdot v_1$$

e lo stesso per $\Delta V_2/\Delta t$, per cui abbiamo la seguente **equazione di conservazione della portata** (volumica):

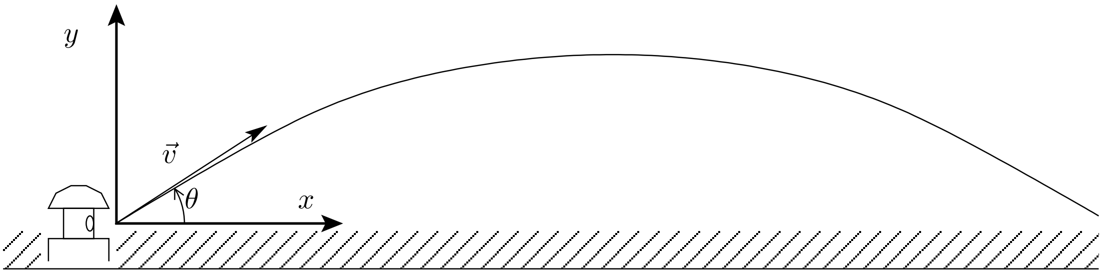
$$\boxed{S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2}$$

oppure $\Delta V/\Delta t = cost.$ per un liquido lungo tutta la condotta.

Osservare che la precedente in generale non è applicabile ad un gas poiché può essere compresso o espanso a piacimento: leggi di Boyle e di Charles. Tuttavia è immediato ottenere la giusta generalizzazione osservando che, benché il volume non si conservi, la massa sì, ed infatti *tanti grammi di gas entrano quanti ne devono uscire* (sennò il numero di molecole dello stesso non si conserverebbero!), e passare dalla conservazione dei volumi a quella delle masse è immediato moltiplicando per la densità (si ricordi la definizione data nell'Esercizio 27):

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

dove ρ_1 e ρ_2 sono le densità del gas all'ingresso ed all'uscita della condotta, rispettivamente nelle posizioni S_1 e S_2. E' immediato verificare che se il gas non subisce compressioni o espansioni $\rho_1 = \rho_2$ e la precedente si riduce all'equazione di conservazione della portata volumica.



Soluzione

Per trovare (il modulo de) la velocità v con la quale l'acqua esce dagli ugelli del disposizione di irrigazione di sezione (totale) S dobbiamo eguagliare il flusso di uscita $S \cdot v$ a quello di ingresso che arriva dal rubinetto:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v = 0.1 \text{ l/sec.}$$

A questo punto il problema diventa un comune *esercizio di caduta dei gravi*. Riprendendo la procedura vista nell'Esercizio 12 e definendo un sistema di riferimento come quello in figura, possiamo scrivere per le due componenti del moto bidimensionale:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + y_0 \end{cases}$$

Per come è posto il sistema di riferimento, centrato nella posizione dell'irrigatore: $x_0 = y_0 = 0$. Inoltre sappiamo che l'orientazione degli ugelli è tale da spruzzare l'acqua con un angolo $\theta = 45\hat{}\backslash circ$ (come la diagonale di un quadrato, lunga v, rispetto ai lati $v_x = v_y$), per cui:

$$\begin{aligned} v &\overset{\text{Teo. Pitagora}}{=} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2 v_{x,y}^2} = v_{x,y}\sqrt{2}, \\ v_x = v_y &= v/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Eliminando la dipendenza dal tempo nel sistema di equazioni per x e y, otteniamo:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2/2} + \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{x}{v/\sqrt{2}} \\ &= -g\frac{x^2}{v^2} + x. \end{aligned}$$

Il punto in cui arriva il getto d'acqua è caratterizzato da avere "altezza" $y = 0$, per cui:

$$0 = -g\frac{x^2}{v^2} + x = x\left(1 - gx/v^2\right).$$

Una soluzione della precedente equazione è quella con $x = 0$, ma il punto $O = (0, 0)$ è quello da dove parte il getto d'acqua e non dove arriva, per cui andrà scelta come soluzione del problema l'altra soluzione della precedente equazione di secondo grado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2}{g} \\ &= \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\frac{1}{S}\right)^2 \frac{1}{g} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata sostituita l'espressione per v ottenuta dalla conservazione della portata. La x qui trovata è uguale alla lunghezza della porzione di prato da irrigare: $x = 10$ m.

Scopo del problema era quello di trovare la sezione (totale) degli ugelli dell'irrigatore, per cui dobbiamo risolvere la precedente equazione per trovare S:

$$\boxed{S = \frac{\Delta V}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{gx}}}$$

Inserendo i valori numerici otteniamo una apertura totale per gli ugelli dell'irrigatore $S \simeq 1\ \text{mm}^2$.

Esercizio 31

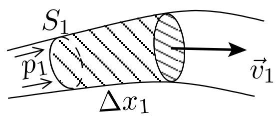
Fluidi, fuoriuscita di un gas a pressione - Simile Compitino B, 5 giugno 2017

Una bomboletta spray è un contenitore nel quale un liquido (tipicamente deodorante, vernice, insetticida etc.) è mescolato ad un gas (propano, butano o isobutano) che è stato compresso fino a raggiungere lo stato liquido. Quando viene premuta la valvola, il gas liquefatto è libero di espandersi fino a tornare al suo stato gassoso, e fuoriuscendo porta con sé parte del liquido insieme al quale era mescolato in una soluzione detta aerosol; il gas a questo punto evapora via mentre il liquido viene proiettato con una certa velocità sulla superficie verso la quale la bomboletta era stata indirizzata. Supponendo che la bomboletta fosse stata caricata con una (differenza di) pressione (rispetto a quella atmosferica) $\Delta p = 10^4$ Pa*, e che la soluzione di aerosol in uscita dalla bomboletta abbia una densità media* $\rho = 8 \times 10^{-4}$ g/cm^3 *(simile a quella del vapore acqueo), a che velocità fuoriesce il liquido dalla bomboletta?*

Richiami di teoria: relazione tra velocità e pressione di un fluido

Anche questo problema considera la dinamica del moto di un fluido; intuitivamente è chiaro che l'incremento di velocità della soluzione contenuta nella bomboletta spray è dovuta alla differenza di pressione tra l'interno e l'esterno di questa (e non alla variazione di sezione di una conduttura, come nel caso precedente). Uno dovrebbe tenere di conto anche della variazione di energia potenziale gravitazionale tra il fondo della bomboletta e la posizione dell'ugello di uscita ma trattandosi di pochi centimetri di differenza possiamo tranquillamente trascurarla rispetto all'effetto dato dalla differenza di pressione. Studiamo quindi in che modo una differenza di pressione è in grado di accelerare un fluido.

Tale problema è già stato affrontato per un corpo puntiforme soggetto a *forze "vive"* nell'Esercizio 21, dove abbiamo introdotto il *Teorema delle Forze vive* o *dell'Energia Cinetica*.[34] Si tratta quindi di estenderlo ad un fluido. Per semplicità partiamo con un *liquido incomprimibile* (volume costante) e riconsideriamo l'immagine della conduttura con sezione variabile dell'Esercizio 30; supponiamo infatti che il moto di

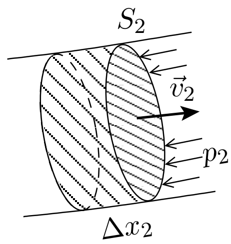


[34] A sua volta il Teorema delle Forze vive è stato ricavato a partire dall'*equazione del moto* $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$, riscrivendola in funzione della posizione. Quindi la derivazione dell'equazione di Bernoulli poteva esser fatta in modo del tutto analogo partendo direttamente da questa equazione.

una certa parte di fluido all'interno di questa, tipo il volumetto ΔV_1 in figura, sia dovuto alla "spinta" del fluido che lo precede. Questa spinta sarà rappresentata dalla pressione p_1 "esercitata sulla" superficie S_1 che fa da base sinistra per il parallelepipedo $\Delta V_1 = S_1 \cdot \Delta x_1$, e di conseguenza la forza che muove il fluido sarà in modulo:[35]

$$F_1 = p_1 \cdot S_1.$$

Questa forza, ogni intervallo (piccolo) di tempo Δt, nello spostare il volumetto di fluido di un tratto Δx_1 compie un *lavoro*:



$$L_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 \cdot S_1 \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V_1.$$

Contemporaneamente in un'altra sezione di tubo, come quella S_2 a destra nel disegno dell'Esercizio 30, il liquido per muoversi verso destra dovrà vincere una pressione p_2 sulla sua faccia destra che corrisponde alla forza di reazione della parte di fluido che lo precede:

$$F_2 = -p_2 \cdot S_2, \qquad L_2 = -p_2 \cdot \Delta V_2$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che la forza che questo subisce ha verso opposto alla sua faccia S_2, ossia entrante verso il volumetto stesso.

Considerando per intero il tratto di conduttura che va dalla superficie S_1 sinistra del volumetto ΔV_1 a quella S_2 destra del volumetto ΔV_2, il lavoro totale che agisce su questo sarà:

$$L = L_1 + L_2 = p_1 \cdot \Delta V_1 - p_2 \cdot \Delta V_2.$$

Applichiamo quindi a questo sistema il Teorema delle Forze vive, o dell'Energia Cinetica, eguagliando il precedente lavoro alla *variazione di energia cinetica* ΔK di una corrispondente massa di fluido, tra le posizioni S_1 ed S_2:

$$\begin{aligned} L &= \Delta K \\ p_1 \cdot \Delta V_1 - p_2 \cdot \Delta V_2 &= \frac{1}{2}\Delta m_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m_1\, v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho \Delta V_2\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \Delta V_1\, v_1^2 \end{aligned}$$

Ricordando però l'equazione di conservazione della portata, il volume che entra in S_1 è uguale al volume che esce in S_2, ossia: $\Delta V_1 = \Delta V_2$. La precedente equazione si può quindi riscrivere eliminando il volume come:

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2}$$

La precedente equazione vale qualunque coppia di punti della conduttura si prenda, e quindi otteniamo la grandezza costante:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = cost.$$

dove il primo termine ha il significato di *energia cinetica per unità di volume* del liquido, mentre il secondo serve a calcolare il lavoro fatto sul fluido una volta valutata la differenza di pressione tra due punti.

[35] Attenzione che in questa frase, e pure nel disegno, è stato commesso un leggero abuso; la pressione, come abbiamo visto, è una grandezza scalare, per cui non ha alcun senso parlare del suo verso e della sua direzione, e nemmeno rappresentarla con una freccia, come fatto in figura. Nonostante tutto è stato scelto di compiere questo abuso di notazione per enfatizzare quale fosse l'origine della forza alla base

Questa *equazione di conservazione* sta alla base del così detto *effetto Venturi*, nel quale *una differenza di velocità in un fluido* (provocata per esempio dall'allargamento o si restringimento di una conduttura) *causa una differenza di pressione nello stesso*, o viceversa, come nel problema della bomboletta spray, di modo da mantenere costante la quantità scritta sopra. Questo effetto sta anche alla base del *principio del volo* degli aerei, come vedremo nella prossima sezione.

Per completare il panorama teorico necessario per risolvere i problemi da esame di Meccanica dei Fluidi, possiamo includere anche il lavoro fatto dall'energia potenziale gravitazionale, $\Delta U = mg\Delta h$, nel bilancio energetico (Teorema delle Forze Vive o dell'Energia Cinetica) di un fluido: $L = \Delta K + \Delta U$. Senza ripetere la derivazione che ci ha portato alla precedente equazione di conservazione, possiamo semplicemente includere la relazione data dalla Legge di Stevino per un fluido in quiete col termine di energia cinetica per unità di volume dell'equazione dell'effetto Venturi, per ottenere:

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2}$$

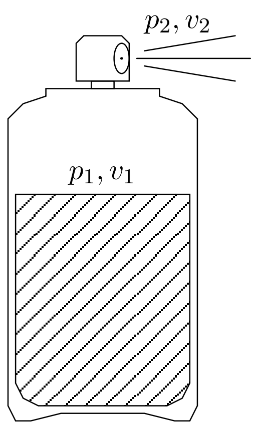
oppure, lungo tutta la conduttura:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = cost.$$

Questa prende il nome di **equazione di Bernoulli**. In modo analogo al primo termine cinetico, il secondo termine, $\rho g h$, può essere interpretato *come energia potenziale gravitazionale per unità di volume* del fluido.[36]

Soluzione

Quanto visto nella precedente sezione ci è sufficiente per risolvere il problema della bomboletta spray. Indichiamo con un pedice "1" le quantità riferite all'interno della bomboletta e con un "2" quelle dell'aerosol spruzzato fuori, come in figura.



All'interno della bomboletta la soluzione è ferma e per tanto ha velocità $v_1 = 0$. Quindi, dall'equazione dell'effetto Venturi otteniamo:

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

che risolta per trovare $v_{(2)}$ (possiamo anche rimuovere il pedice perché è l'unica velocità all'interno del problema) dà:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

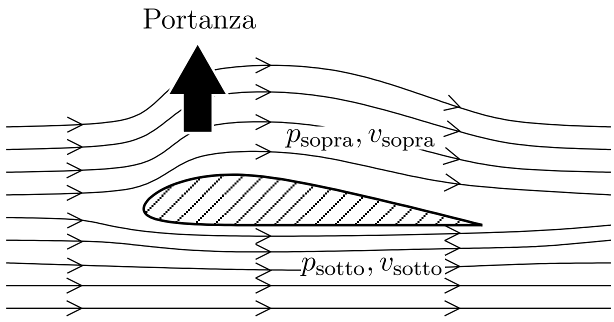
che coi dati del problema (fatte le dovute conversioni di unità di misura!) dà $v = 50$ m/s.

[36] Si noti che per come sono state ricavate, eguagliando i volumi di fluido in ingresso ed in uscita dalla conduttura, queste formule sono valide solo per un *liquido incomprimibile*. Per un gas che può esser compresso o dilatato uno ha in generale densità diverse nelle due sezioni della condotta. Inoltre, potrebbe essere presente un termine di *energia interna per unità di massa* $\rho\epsilon$ da entrambi i lati dell'equazione (questa energia è per esempio quella di agitazione termica delle molecole del gas $\propto k_B T$, come vedremo studiando la termodinamica), per cui l'equazione di Bernoulli andrà generalizzata in:

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 + \rho_1 \epsilon_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 + \rho_2 \epsilon_2 + p_2.$$

Questa velocità può sembrare a prima vista un po' alta per i tipici valori di uno spray domestico. C'è da osservare però che in questo problema sono stati trascurati un certo numero di effetti, come l'attrito tra le molecole di aerosol (*viscosità*) e l'urto di queste con l'aria all'uscita dell'ugello, di non semplice modellizzazione, che portano ad una considerevole diminuzione della velocità dell'aerosol e della sua gittata.

Curiosità: il volo degli aerei



L'effetto Venturi è alla base del meccanismo del volo degli aeroplani. Si consideri infatti l'immagine a fianco, che mostra un profilo alare e delle *linee di flusso* dell'aria viste dal sistema di riferimento di quiete dell'aeroplano. A causa della forma asimmetrica dell'ala (e anche dell'*angolo di attacco*, l'inclinazione dell'ala rispetto alla direzione del moto dell'aeroplano) l'aria fluisce in modo diverso sopra e sotto l'ala. In particolare risulta che, *localmente*, l'*aria sopra* all'ala ha una *velocità maggiore* di quella sotto. Generalmente si spiega questo fatto dicendo che le linee di flusso che si separano di fronte all'ala devono poi *ricongiungersi* dopo, nello stesso tempo;[37] ma essendo il percorso dell'aria sopra più lungo, a causa del profilo alare, questa dovrà muoversi a velocità maggiore.[38] Quindi, per la legge di conservazione

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = cost.$$

deve esserci un comportamento opposto della pressione, ossia la *pressione sotto* l'ala ha un valore *maggiore* di quella sopra. Quindi, la differenza di pressione tra sopra e sotto l'ala causa una *depressione* che, moltiplicata per la superficie dell'ala, da una forza detta *Portanza* diretta verso l'alto (freccia spessa in figura). Questa è sufficiente a vincere la forza di gravità, che farebbe precipitare l'aereo, e quindi a tenerlo su.

Ovviamente gli effetti che entrano in gioco sono molti, ma tanto ci basta per avere una comprensione qualitativa del motivo principale che permette agli aerei di volare.

[37] Intuitivamente ciò ha senso. Supponiamo di fare un *cambiamento di riferimento* e di guardare da terra un aereo volare. L'aria sarà approssimativamente *ferma* rispetto a noi (anche se c'è un po' di vento, è difficile che questo abbia velocità paragonabili a quelle dell'aereo, e quindi possiamo trascurarlo) ma non rispetto all'aereo, come mostrato nella figura in alto. Quando quest'ultimo "taglierà l'aria", come un *coltello il burro*, poiché l'aria è ferma il tempo impiegato dall'ala ad attraversare l'aria sotto è uguale a quello per l'aria sopra, che quindi torneranno a ricongiungere i loro fronti una volta passata l'ala. Per quanto intuitiva, questa descrizione non è del tutto vera; come noto, dietro agli aerei e le navi, a differenza del burro, rimane una *scia* in cui il fluido, aria o acqua che sia, è trascinato dal mezzo che lo ha attraversato. La descrizione di questo fenomeno è molto complicata e richiede la soluzione di equazioni estremamente più complicate di quelle viste fino ad ora (equazioni di Navier-Stokes). Accontentiamoci quindi della descrizione semplificata "tipo burro", in cui le parti di fluido tagliato si ricongiungono nello stesso tempo sopra e sotto, che comunque ci permette di fare delle buone stime qualitative basandoci solamente sulla Fisica vista fino ad ora.

[38] Questo non è del tutto vero per i ben noti aerei di carta, che hanno un profilo alare simmetrico, uguale allo spessore del foglio, eppure volano. Stessa cosa per gli aquiloni. In questi casi gli effetti dati dall'angolo di attacco non piatto sono quelli che influiscono maggiormente sulla loro possibilità di volare.

Esercizio 32

Effetto Venturi ed il volo degli aerei

Il Cessna 150 è un popolare aereo biposto, molto utilizzato per turismo e come addestratore. Sapendo che la sua superficie alare misura 15 m^2, e che ha un profilo tale per cui il dorso dell'ala è più lungo di un fattore $f = 50\%$ rispetto al ventre, discutere a quale velocità deve muoversi per sollevare dalla pista i suoi 750 kg di peso per decollare.

Soluzione

La soluzione che segue per questo problema è fondamentalmente sbagliata poiché non tiene conto di tutta una serie di effetti determinanti per la descrizione corretta del volo; si veda il commento in nota 37 o la sezione sull'effetto Coandă. Tuttavia, facendo unicamente riferimento all'effetto Venturi ed all'idea intuitiva esposta alla fine dell'Esercizio 31, è possibile con un semplice calcolo fornire una stima quantitativa della velocità che deve avere l'aereo al decollo.

L'aereo per sollevarsi deve esercitare una spinta verso l'alto che vinca la sua forza peso, $mg \simeq 7500$ N. Per farlo può sfruttare la differenza di pressione che si viene a creare tra sopra e sotto la sua ala una volta che l'elica lo ha spinto in avanti ad una velocità sufficiente. Mettiamoci nel sistema di riferimento in cui l'aereo è fermo (come se fossimo seduti al suo interno), ed è l'aria a muoversi contro di noi a una certa velocità, uguale (in modulo) a quella che avrebbe l'aereo rispetto ad un osservatore fermo a terra. Facendo riferimento alla figura del profilo alare alla fine dell'Esercizio 31, possiamo osservare che l'aria sotto l'ala avrà una velocità:

$$v_{\text{sotto}} = \frac{\Delta x_{\text{sotto}}}{\Delta t},$$

con Δx_{sotto} la lunghezza, da lato a lato, del ventre dell'ala (vedi figura), e Δt il tempo che l'aria impiega a passare da un lato all'alto. Sapendo dal testo dell'esercizio che il dorso è più lungo del 50% rispetto al ventre:

$$\Delta x_{\text{sopra}} = \Delta x_{\text{sotto}} + \Delta x_{\text{sotto}} \cdot f = (1+f)\Delta x_{\text{sotto}}$$

abbiamo che, assumendo un tempo uguale Δt dell'aria a percorrere dorso o ventre dell'ala (vedi nota 37), la velocità sopra sarà:

$$v_{\text{sopra}} = \frac{\Delta x_{\text{sopra}}}{\Delta t} = (1+f)\frac{\Delta x_{\text{sotto}}}{\Delta t} = (1+f)v_{\text{sotto}}.$$

Questa differenza di velocità causa una differenza di pressione, *deportanza*, nell'aria tra sopra e sotto l'ala:

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{1}{2}\rho v_{\text{sopra}}^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\text{sotto}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho v_{\text{sotto}}^2 \left((1+f)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\rho v_{\text{sotto}}^2 f\,(2+f)\end{aligned}$$

La relativa forza si ottiene moltiplicando per la superficie alare $S = 15$ m^2. Eguagliandola alla forza peso dell'aereo, possiamo quindi risolvere per trovare v_{sotto}:

$$mg = \Delta p \cdot S = \frac{1}{2}\rho v_{\text{sotto}}^2 f(2+f) \cdot S, \qquad v_{\text{sotto}} = \sqrt{\frac{2}{f(2+f)}\frac{mg}{S\rho}}.$$

Inserendo i dati del problema, $S = 15$ m^2, $f = 50\%$, $m = 750$ kg e $\rho \simeq 1.225$ kg/m^3, otteniamo una velocità dell'aria sotto all'ala, circa pari a quella dell'aereo visto da un osservatore fermo a terra, uguale a:

$$v \approx v_{\text{sotto}} \simeq 25.6 \text{ m/s} = 92.1 \text{ km/h}.$$

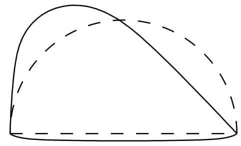
Tale risultato è in ottimo accordo con la realtà dei fatti, nonostante la fisica con la quale il processo è stato modellizzato sia piuttosto criticabile e trascuri molti dettagli. Ripetendo il calcolo per un Boeing 737, uno dei più popolari aerei di linea per tratte di breve e media distanza e capienza fino a 189 passeggeri, con superficie alare di 105 m^2 e massa di 50 tonnellate, otterremo una velocità al decollo di circa 285 km/h, ancora una volta in sorprendente accordo con la realtà.

Verso una descrizione più realistica del volo: effetto Coandă

"Secondo alcuni autorevoli testi di tecnica Aeronautica, il calabrone non può volare, a causa della forma e del peso del proprio corpo in rapporto alla superficie alare. Ma il calabrone non lo sa e perciò continua a volare."

Igor Sikorsky, pioniere dell'aviazione russo, 1900 ca.

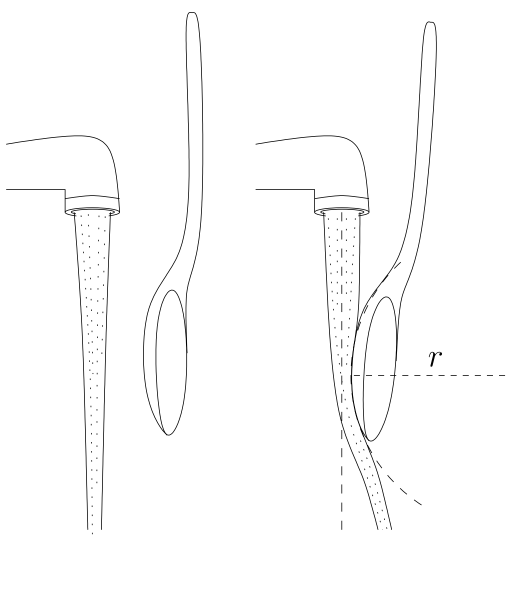
Il lettore attento si sarà già accorto probabilmente che nei dati forniti per gli aerei ce n'è uno a dir poco irrealistico, e che in realtà è solo grazie a lui che i precedenti risultati numerici tornano in accordo con la realtà. Questo dato è ovviamente la differenza percentuale tra la distanza percorsa dall'aria che passa sopra e sotto l'ala: $f = 50\%$. E' facile convincersi di quanto questo sia irrealistico pensando ad un'ala con effettivamente tale profilo; una differenza del 50% corrisponde all'incirca a quella in un cerchio tra diametro e semicirconferenza ($2r$ e $\pi/2\, r$).



Osservando la figura a fianco si capisce immediatamente che un tale oggetto avrebbe dei seri problemi a volare, derivanti da tutte quelle complicazioni aerodinamiche che volutamente abbiamo deciso di tralasciare in questo esercizio. Valori più realistici per f posso essere il 10%, o anche meno. Utilizzando questo valore otteniamo che la velocità di decollo di un Cessna 150 dovrebbe essere di oltre 220 km/h, e quella di un Boeing 737 di circa 700. In entrambi i casi i velivoli non sono in grado di raggiungere tali velocità al decollo (e nel caso del Cessna neanche in volo).

Come possiamo provare a modificare le precedenti equazioni per tornare ad avere velocità di decollo realistiche con dati realistici, pur senza complicare eccessivamente la Fisica e la Matematica che ci stanno dietro?

Sfruttando quasi esclusivamente i concetti introdotti con gli esercizi precedenti, risulta che il secondo effetto più importante per spiegare il volo degli aerei è il così detto **effetto Coandă**, che descrive la tendenza di un getto di fluido (come aria o acqua) in moto a seguire il contorno di una superficie vicina. Tale fenomeno fu scoperto e descritto dal pioniere dell'aerodinamica romeno Henri Coandă, il quale brevettò nel 1936 prima in Francia e poi negli Stati Uniti alcuni strumenti che sfruttavano la proprietà di deviare un getto.



Per descrivere ciò viene mostrato generalmente un filo d'acqua scorrere sul dorso di un cucchiaio e curvare il proprio moto per seguire il profilo di tale superficie, come in figura.

La sua descrizione formale è piuttosto complicata ma con alcune semplificazioni possiamo arrivare al risultato che ci serve. Modellizziamo il dorso del cucchiaio come se avesse un profilo circolare di raggio r, e che il fluido ci scorra sopra a velocità costante v.

Ogni particella di fluido starà quindi descrivendo un moto circolare uniforme, e per farlo la forza risultante $\vec{F}$ deve essere, lungo la direzione radiale centripeta $(-\hat{r})$:

$$\vec{F} \cdot (-\hat{r}) = F_{r,cent.} = m\frac{v^2}{r} = \Delta V \rho \frac{v^2}{r},$$

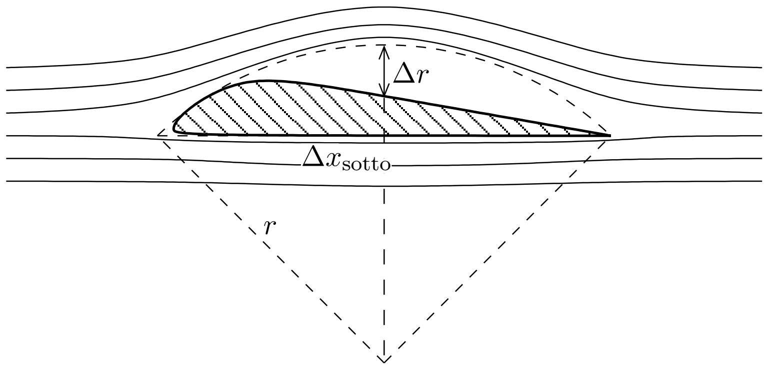
cioè una forza per unità di volume $F_{r,cent.}/\Delta V = \rho v^2/r$. Quali sono le forze che gli permettono di farlo, specialmente sotto al cucchiaio, dove la tendenza di un corpo puntiforme sarebbe quella di proseguire verticalmente? La risposta sta nella natura del mezzo fluido, che è appunto quella di scorrere sulle superfici con cui entra in contatto; la differenza di pressione in direzione radiale, che permette al fluido di non allontanarsi dalla traiettoria circolare, deriva dal fluido stesso. Se il fluido si allontanasse di un tratto Δr dalla superficie del cucchiaio si creerebbe una depressione (risucchio), tra lì dove c'è il vuoto ed il fluido stesso, uguale a

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{r} \Delta r$$

dove $\Delta p = p$ è la pressione del fluido. In pratica si viene a creare una specie di *ventosa* tra il fluido e la superficie curva lungo la quale sta scorrendo; si veda la "cupola" delimitata dalla linea curva tratteggiata nell'immagine sottostante. Questo fenomeno è simile a quello che si verifica nell'*esperimento di Torricelli*, in cui la pressione atmosferica sostiene il peso di una colonna di circa 76 cm di mercurio.

Tanto ci basta per rivalutare il meccanismo del volo descritto prima; l'effetto Coandă infatti dà ben due contributi fondamentali per il volo. Prima di tutto ci dice che non è detto che il flusso di aria debba seguire esattamente il profilo alare, e quindi è possibile costruire ali più sottili di quanto non era necessario col procedimento svolto prima, purché la loro forma sia tale da spingere l'aria in modo da avere un percorso più lungo di un fattore f e quindi una velocità maggiore sopra.[39] Secondo contributo è che tanto più il getto di aria si allontana dall'ala, Δr, tanto maggiore è la depressione creata, come si vede nell'ultima formula scritta.

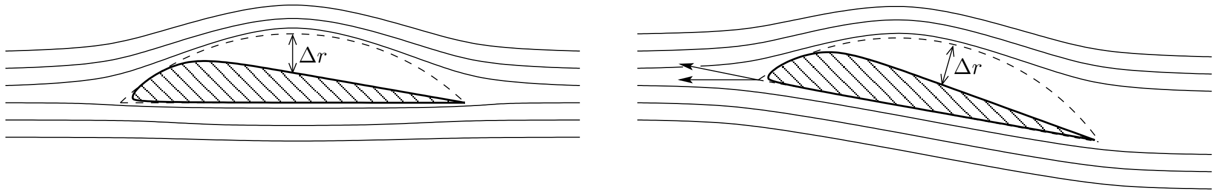
Quindi, senza eccedere nel dettaglio, supponiamo semplicemente che le ali del Cessna abbiano superficie rettangolare (1.5×10 m^2) ed un profilo tale che l'aria che fluisce sopra percorra un arco di cerchio di raggio $r \simeq 1.10$ m e che quindi abbia una velocità maggiore di un fattore $f \simeq 10\%$ maggiore di quella dell'aria sotto; vedi figura a fianco. Prendiamo poi come separazione tra la superficie superiore dell'ala e il flusso d'aria approssimativamente metà della *saetta* (la distanza massima tra arco e corda), ossia $\Delta r \simeq 15$ cm.[40]



Riscriviamo dunque l'equazione per la differenza di pressione inserendo, oltre al termine dovuto

[39] Al di là delle complicate equazioni di Navier-Stokes, solo raramente risolvibili analiticamente, a tale scopo si utilizzano le gallerie del vento.

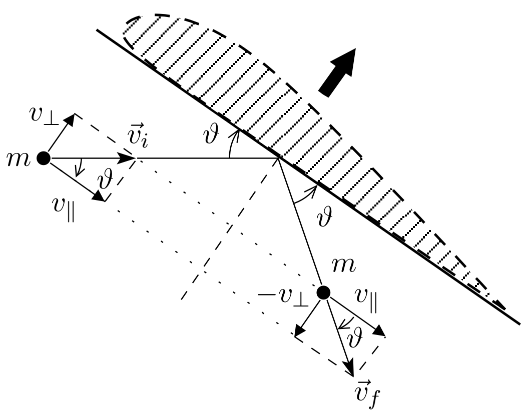
[40] Il raggio dell'arco di cerchio r si ottiene risolvendo l'equazione trascendente $1.5 \text{ m} = 2r \sin(1.5 \text{ m} f/2r)$. La saetta invece si ottiene da $\Delta r = r\,(1 - \cos(1.5 \text{ m} f/2r))$.



all'effetto Venturi, anche il contributo dato dall'effetto Coandă:

$$
\begin{aligned}
mg/S &= \frac{1}{2}\rho v_{\text{sotto}}^2 f(2+f) + \rho \frac{v_{\text{sopra}}^2}{r}\Delta r \\
&= \rho v_{\text{sotto}}^2 \left(f\frac{(2+f)}{2} + \frac{\Delta r}{r}(1+f)^2 \right).
\end{aligned}
$$

Risolvendo per v_{sotto} ed inserendo i dati del problema troviamo una velocità di decollo per il Cessna di circa 140 km/h, e per il Boeing 737 (larghezza ali media di 3 m) di circa 430 km/h. Tali risultati sono più realistici dei precedenti ma comunque entrambi in eccesso di circa il 50%.



Per migliorare ulteriormente l'accuratezza del precedente risultato, ciò che ci manca è di tenere conto anche dell'*angolo di attacco* dell'ala rispetto alla direzione di volo, come rappresentato nella figura in alto a destra. Questo ha l'effetto di aumentare leggermente la separazione Δr tra il getto di fluido sopra l'ala e la superficie della stessa, aumentando quindi l'effetto Coandă, ma soprattutto di rallentare, per attrito, l'aria che scorre sotto l'ala, e di contribuire quindi ad aumentare f, la differenza di velocità tra sopra e sotto l'ala.[41] Purtroppo, coi mezzi a nostra disposizione, non è facilmente quantificabile in modo organico la dipendenza di Δr e f da questo angolo. Scegliamo quindi una strada diversa, sempre approssimata; supponiamo che Δr e f siano fissati e aggiungiamo, separatamente, l'ulteriore effetto di questo angolo ignorando eventuali modifiche che questo porterebbe a Δr e f.

Per studiare l'effetto dell'angolo d'attacco, consideriamo l'urto di una "particella di aria" di massa m e velocità $\vec{v}_i$ contro l'ala dell'aereo, supposta ferma (come nella precedente discussione); vedi figura a fianco. Rispetto ad un sistema di coordinate con un asse parallelo all'ala ed uno perpendicolare (entrante) a questa, le componenti di questa velocità possono essere scritte come:

$$\vec{v}_i = (v_\parallel, v_\perp),$$

dove $v_\perp = v \sin\vartheta$ e $v_\parallel = v \cos\vartheta$ ($v \equiv |\vec{v}_i|$). Dopo l'urto la componente parallela della velocità non avrà subito modifiche (e infatti una particella con velocità esattamente parallela all'ala non urterà mai contro questa) mentre la componente perpendicolare sarà uguale in modulo ma con segno opposto:

$$\vec{v}_f = (v_\parallel, -v_\perp).$$

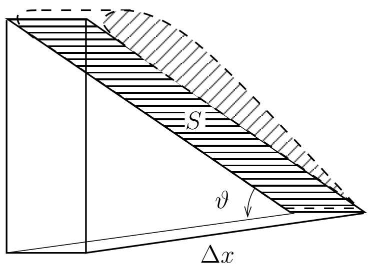
Quindi la variazione di quantità di moto della particella di aria sarà stata, in modulo:

$$\Delta q = m\big(-v_\perp - v_\perp\big) = -2m\,v_\perp$$

[41] In un contesto abbastanza diverso ma non troppo, l'*angolo di attacco* col quale la tavola da surf è inclinata rispetto all'onda permette a questa (anche solo metà) di sostenere il peso del surfista sopra di essa. Appena l'onda finisce e il surfista rimane fermo sopra l'acqua, cade.

e direzione perpendicolare all'ala e verso uscente.

In realtà, in ogni istante di tempo Δt incide contro l'ala dell'aereo non una sola particella ma un volume ΔV di aria. Questa avrà una massa $\Delta m = \Delta V \cdot \rho$, con ρ la solita densità dell'aria. Con riferimento alla figura a fianco è facile convincersi che questo volume di aria può essere riscritto in funzione della superficie dell'ala e dell'angolo d'attacco ϑ come:



$$\Delta V = \frac{1}{2} S \cdot \Delta x \, \sin\vartheta.$$

[Si tratta di un parallelepipedo a base triangolare; si pensi di calcolare l'area di un triangolo partendo da due lati e l'angolo compreso, e si moltiplichi per la terza profondità per trovare il volume] A partire dalle precedenti due equazioni è immediato ricavare la forza impressa dall'ala sull'aria:

$$\begin{aligned} F_{\to\text{aria}} &= \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{2\Delta m\, v_\perp}{\Delta t} = -\frac{S \cdot \Delta x \, \sin\vartheta \, \rho v_\perp}{\Delta t} = -S \, \sin^2\vartheta \, \rho v \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= -S \, \rho v^2 \, \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata sostituita la velocità dell'aereo (o dell'aria, a seconda dell'osservatore) $v = \Delta x/\Delta t$. Viceversa (cambiando di segno) la forza di reazione impressa dell'aria sull'ala, che permette all'aereo di stare su, è:

$$\boxed{F_{\to\text{ala}} = +S \, \rho v^2 \, \sin^2\vartheta}$$

Inserendo anche questa nell'equazione del moto per l'aereo, otteniamo:

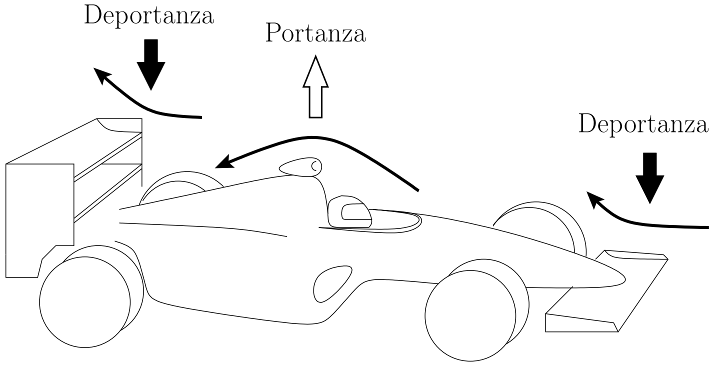
$$mg/S = \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2 f(2+f)}_{\text{effetto Venturi}} + \underbrace{\rho \frac{v^2}{r}(1+f)^2 \Delta r}_{\text{effetto Coandă}} + \underbrace{\rho v^2 \, \sin^2\vartheta}_{\text{angolo d'attacco}} .$$

Risolvendo per v otteniamo, per un angolo di attacco al decollo di $\vartheta = 30°$, una velocità di circa 100 km/h per il piccolo Cessna e di 309 km/h per il Boeing 737. Finalmente, questi risultati sono in buon accordo con la realtà e soprattutto ricavati a partire da dati realistici.

Ricapitolando: i meccanismi che contribuiscono maggiormente al volo sono l'effetto Venturi, l'effetto Coandă, che impattano sui parametri f e Δr dell'equazione del moto scritta sopra, e l'angolo di attacco che dà un contributo aggiuntivo alla spinta verso l'alto, principalmente al momento del decollo (o dell'atterraggio).

Curiosità: la deportanza e la forma delle automobili da corsa

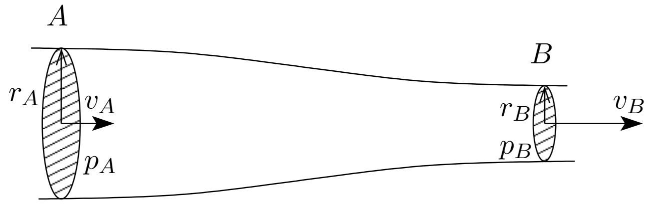
Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni, uno dei principali fenomeni che permettono il volo è la spinta verticale data dalla forma stondata, *convessa*, dell'ala e che abbiamo chiamato "portanza". Tale effetto si verifica anche nelle automobili ed è molto dannoso, specialmente in quelle da corsa, poiché subendo una spinta verso l'alto l'automobile ha una minor aderenza al manto stradale e aumenta di conseguenza il rischio di perdere il controllo o addirittura di "decollare" letteralmente. Le auto sportive cercano quindi di correre ai ripari da questo effetto progettando carrozzerie dai profili "taglienti" e affusolati, l'opposto del cucchiaio mostrato in una delle precedenti figure, e ricorrendo all'uso di alettoni, detti "spoiler" o deflettori, che con una curvatura opposta, *concava*, a quella dell'ala creano una spinta opposta, verso il basso; questa è chiamata *deportanza*. Nella figura in basso è rappresentata una vettura di Formula 1 nella quale sono presenti dei deflettori anteriori e posteriori, in prossimità delle ruote, con lo scopo di aumentare l'aderenza alla pista della vettura. Seppur non in modo così estremo, anche le auto comuni hanno dei profili leggermente "all'insù" nella parte posteriore della carrozzeria.



Esercizio 33

Equazione di Bernoulli e conservazione della portata - Compito, 15 gennaio 2018

Un tubo di sezione circolare trasporta acqua ed è in posizione orizzontale. In un punto A il raggio è $r_A = 1.1$ cm e in un punto B è $r_B = 0.5$ cm. La differenza di pressione tra le sezioni del tubo in A e B è equivalente ad una colonna d'acqua alta 5 cm. Si calcola la velocità dell'acqua in A e B.



Soluzione

Il problema riguarda la differenza di pressione in un fluido che scorre in un tubo a sezione variabile orizzontale, per cui non ci sono effetti dovuti alla variazione di (densità di) energia potenziale gravitazionale. Dovranno valere l'*equazione di conservazione della portata* volumica, cioè "tanto fluido passa in A quanto ne esce in B", e l'*equazione di Bernoulli*, senza il termine di potenziale gravitazionale (confronta *effetto Venturi*):

$$\begin{cases} v_A S_A = v_B S_B \\ \frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B \end{cases}$$

Riscriviamo la seconda mettendo in evidenza la differenza tra le pressioni:

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2.$$

Sappiamo dal testo che questa differenza equivale alla differenza di pressione tra cima e fondo di una colonna d'acqua di altezza $h = 5$ cm; quindi, dalla Legge di Stevino $p(h) = p_0 + \rho g h$:

$$p_A - p_B = \rho g h.$$

Sostituendo quanto trovato nel precedente sistema di equazioni (in cui le incognite a questo punto rimangono solamente v_A e v_B), possiamo procedere a risolverlo per trovare una delle due velocità. Cominciamo con v_A:

$$\begin{cases} v_B = v_A S_A/S_B \\ \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(S_A/S_B\right)^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\left(S_A/S_B\right)^2 - 1\right)$$

per cui:

$$v_A^2 = \frac{2gh}{\left(S_A/S_B\right)^2 - 1} = \frac{2gh}{\left(r_A/r_B\right)^4 - 1}$$
$$\simeq \left(0.21 \text{ m/sec}\right)^2$$

Dall'equazione di conservazione della portata è immediato ricavare anche v_B:

$$v_B = v_A \frac{S_A}{S_B} = v_A \frac{r_A^2}{r_B^2}$$
$$\simeq 1.01 \text{ m/sec.}$$

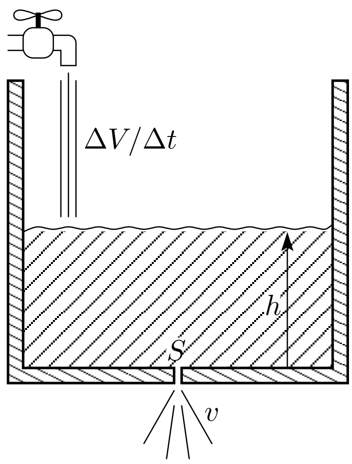
Esercizio 34

Ancora fluidi - Compito, 3 ottobre 2017

Un rubinetto, con la portata di $10^{-4} m^3/sec$, fornisce acqua ad un serbatoio di forma cubica. In fondo al serbatoio c'è un foro largo 1 cm^2. Fino a che altezza sale l'acqua nel serbatoio?

Soluzione

Per risolvere questo esercizio dobbiamo applicare più concetti riguardanti i fluidi. Cominciamo col fare alcune considerazioni:



1. Il *flusso dell'acqua che esce* dal serbatoio sarà uguale al prodotto della sezione del foro per la *velocità di uscita* della stessa;

2. La *velocità di uscita dell'acqua* dal serbatoio dipenderà dalla *pressione dell'acqua che gli sta s*opra;

3. L'acqua all'interno del serbatoio smetterà di salire quando il flusso di quella che arriva dal rubinetto eguaglierà il *flusso di quella in uscita* dal foro sul fondo

il che permette di tornare al punto (1) determinando l'altezza raggiunta dall'acqua nel serbatoio in funzione del flusso di acqua in arrivo dal rubinetto e delle dimensioni del foro sul fondo.

Traduciamo in formule quanto appena detto. La condizione (1) rappresenta l'equazione di conservazione della portata, che dà l'equilibrio tra l'acqua che entra e quella che esce dal serbatoio:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v.$$

La velocità dell'acqua, punto (2), sarà ottenibile dall'equazione di Bernoulli, osservando che l'acqua all'interno del serbatoio è praticamente ferma ($v_{\text{dentro}} = 0$) e che le pressioni sul pelo dell'acqua nel serbatoio e quella fuori dal foro sono le stesse, uguali alla pressione atmosferica p_0, e quindi:[42]

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h,$$

che risolta per trovare v e sostituita nella precedente dà:

$$v = \sqrt{2gh},$$
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot \sqrt{2gh}$$

che risulta a sua volta per dare h, punto (3), dà il risultato:

$$\boxed{h = \left(\frac{\Delta V/\Delta t}{S}\right)^2 \frac{1}{2g}}$$

Sostituendo i dati forniti dal problema otteniamo: $h \simeq 5$ cm. Notare che la soluzione non dipende dalla forma o dalla larghezza del serbatoio. Ciò non dovrebbe sorprendere, ricordando anche quanto noto dal principio dei *vasi comunicanti*.

[42]In pratica per valutare la conservazione delle quantità date dall'equazione di Bernoulli stiamo considerando come "punto 1" la cima dell'acqua all'interno del serbatoio e come "punto 2" l'uscita dal foro sul fondo.

Esercizio 35

Calorimetria e potenza elettrica

Per non sottrarre troppo tempo allo studio, uno studente decide di ottimizzare la pausa scaldando l'acqua per il tè al microonde. Leggendo che la potenza del forno a microonde è 1 kW, quanto tempo deve impostare sul timer per scaldare una tazza contenente 2 dl di acqua per farla passare da 20 ai 90°C richiesti per la preparazione del tè?

Richiami di teoria: Primo Principio della Termodinamica, calore e calori specifici

Questo problema affronta la *trasformazione di stato* del *sistema termodinamico* costituito dalla tazza di acqua; la trasformazione riguarda la sua temperatura, che viene portata da 20° C a 90° C. Tale processo viene effettuato *fornendo calore* all'acqua. Ricordando l'interpretazione "microscopica" della temperatura come *energia di agitazione termica* delle molecole di una sostanza, il **calore** può essere pensato come un "lavoro disordinato", fatto su ognuna di queste molecole, che causa l'aumento della loro energia cinetica e quindi, macroscopicamente, l'aumento di temperatura del sistema. Viceversa avviene quando è il sistema a cedere calore, facendo questo "lavoro disordinato" su un corpo in contatto termico con lui, e quindi abbassando la propria temperatura.

Come il Lavoro ("ordinato") L, che abbiamo imparato a manipolare in Esercizio 21, anche il calore si misura nel Sistema Internazionale (SI) in *Joule* = 1 Newton · metro. Per motivi storici è molto diffusa anche la *caloria*, uguale all'energia necessaria ad aumentare di un grado la temperatura di un grammo di acqua (come vedremo a breve): 1 cal = 4.18 J.

Il calore assorbito da un sistema, Q, ed il Lavoro fatto da questo, L, sono legati alla *variazione di energia interna* $\Delta\mathcal{U}$ *di un sistema* tramite il **Primo Principio della Termodinamica**:

$$\boxed{\Delta\mathcal{U} = Q - L}$$

dove il segno "$-$" davanti al lavoro è dovuto al fatto che se questo compie lavoro diminuisce la sua energia interna. Tale relazione è stata dedotta sperimentalmente grazie soprattutto agli *esperimenti di Joule* (1850 ca.).

Assumendo che il lavoro fatto da un certo sistema termodinamico sia nullo, e questo è particolarmente vero per liquidi (incomprimibili) e solidi, meno per i gas che possono variare il proprio volume facendo lavoro (leggi di Boyle e di Charles), sempre sperimentalmente è possibile ricavare che in un certo range di temperatura il *calore* Q necessario a variare di ΔT la temperatura di una certa sostanza è proporzionale a questa variazione ed alla massa m della sostanza:

$$\boxed{Q = cm\,\Delta T}$$

dove il coefficiente di proporzionalità c, misurato nel SI in J/kg °K o anche in cal/kg °K, prende il nome di *calore specifico* della sostanza. Il fattore $C = c \cdot m$ invece prende il nome di *capacità termica*. Esistono tabelle in cui sono riportati i calori specifici di diverse sostanze; attenzione ai dati relativi ai gas perché, per quanto detto è necessario tenere di conto del lavoro fatto dal gas e per tanto è necessario specificare il modo in cui la trasformazione è stata fatta.

Soluzione

Ricordando che la *potenza* (media) P è definita come il lavoro (anche quello "disordinato", cioè il calore Q) fatto in un certo intervallo di tempo,

$$P = \frac{Q}{\Delta t},$$

possiamo legare il tempo necessario a preparare il tè alla variazione di temperatura richiesta tramite:

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{cm\,\Delta T}{P}.$$

Inserendo i dati del problema, e ricordando il calore specifico $c_{\mathrm{H_2O}} \simeq 4180$ J/kg °K e la densità $\rho_{\mathrm{H_2O}} \simeq 1000$ kg/m^3 dell'acqua, fatte le dovute conversioni di unità di misura otteniamo la soluzione numerica $\Delta t \simeq 58$ sec $\simeq 1$ minuto.

Ovviamente la soluzione precedente non tiene conto del calore che l'acqua cederà a sua volta alla tazza; quindi per avere effettivamente un tè alla temperatura desiderata dovremo tenere conto anche di questo aggiungendo al timer qualche secondo, proporzionale alla massa della tazza.

Esercizio 36

Calorimetria, calore specifico variabile con la temperatura - Esercizio 4, compito di febbraio 2018

A basse temperature il calore specifico dei metalli può essere espresso come $c = kT^3$, dove T è la temperatura in gradi Kelvin. Per il rame $k = 2.8 \times 10^{-6}$ cal/g °K^{-2}. Quanto calore è necessario per scaldare 15 grammi di rame da 5° K a 10° K?

Soluzione

Formalmente la soluzione del presente esercizio è simile a quella dell'Esercizio 20; si rimanda a quella per quanto riguarda la discussione sugli integrali.

Si tratta di un problema di calorimetria. Generalmente, quando i calori specifici sono costanti, per calcolare il calore necessario ad aumentare di ΔT la temperatura di un corpo di massa m è necessario fornire un calore

$$Q = cm\Delta T.$$

In questo caso però il calore specifico non è costante, $c = c(T) = kT^3$, e la precedente equazione non sarà valida. Tuttavia possiamo pensare di considerare variazioni di temperatura ΔT_i talmente *piccole* che il calore specifico è rimasto pressoché costante, e sommare per ciascuna di queste per ottenere il calore totale:

$$Q = \sum_i c(T_i) m \, \Delta T_i.$$

Considerando intervalli infinitesimi, $\Delta T \to dT$, e sommandone un numero infinito, quello che abbiamo descritto non è altro che la definizione di *integrale di Riemann*:

$$Q = \sum c(T) m \, \Delta T \quad \to \quad Q = \int_{T_i}^{T_f} c(T) m \, dT.$$

Quindi, per calcolare il calore totale necessario per far passare 15 g di rame da $T_i = 5°\mathrm{K}$ a $T_f = 10°\mathrm{K}$ dobbiamo sostituire l'espressione funzionale del calore specifico $c(T)$ data nell'enunciato del problema e calcolarne l'integrale, come scritto sopra:

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} c(T) m \, dT = \int_{T_i}^{T_f} km \, T^3 dT = km \left[\frac{1}{4} T^4 \right|_{T_i}^{T_f} = \frac{1}{4} km \left(T_f^4 - T_i^4 \right).$$

Sostituendo i dati forniti dal problema otteniamo:

$$\boxed{Q \simeq 0.197 \text{ cal}}$$

Esercizio 37

Calorimetria, scambio di calore

Per la preparazione di un cocktail si mettono 10 g di ghiaccio, preso dal freezer a $-5°C$, in 1 dl di alcool a temperatura ambiente (20° C). Quale sarà la temperatura raggiunta dal drink una volta che tutto il ghiaccio si sarà sciolto?

Richiami di teoria: calore latente di fusione

In questo problema si affronta lo scambio di calore tra due sistemi: ghiaccio (acqua allo stato solido) e alcool. A meno che la soluzione finale non sia ad una temperatura inferiore a 0°C, il ghiaccio si sarà sciolto in acqua. Perché avvenga la *transizione di fase* (o "passaggio di stato")

$$\text{Ghiaccio}(0° \text{ C}) \quad \to \quad \text{Acqua}(0° \text{ C})$$

sarà necessario fornire energia sotto forma di *calore* al sistema; questo è detto **calore latente di fusione** (per unità di massa), si indica solitamente con la lettera greca λ, "lambda", e si misura in unità SI in J/kg:

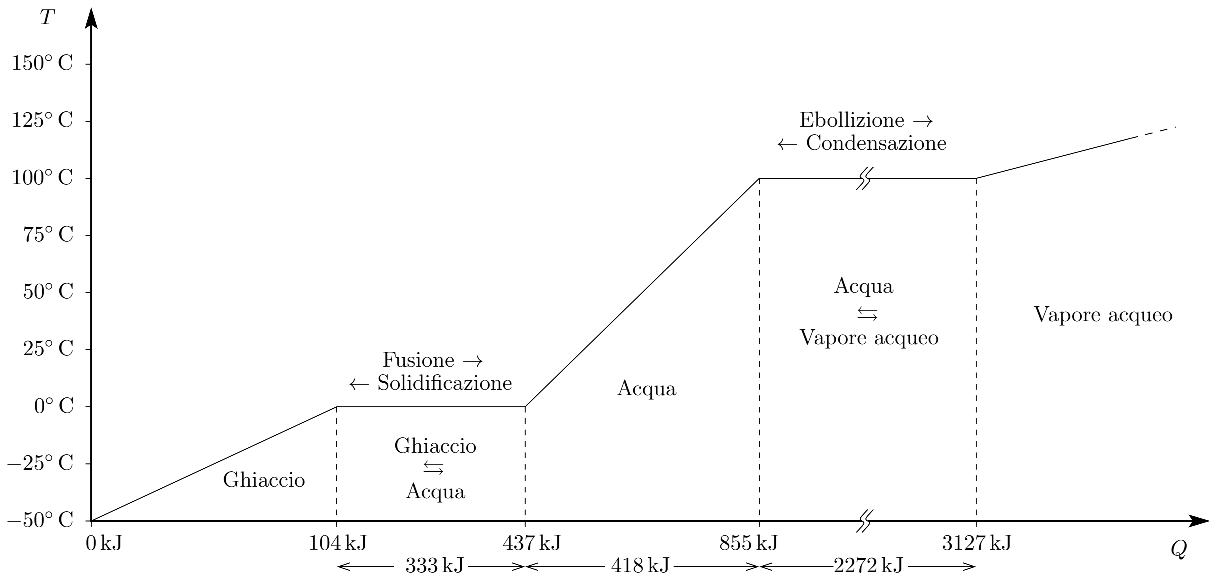
$$\boxed{Q = m \cdot \lambda}$$

Microscopicamente questo calore fornisce energia alle molecole della sostanza, le quali tuttavia non incrementeranno il proprio moto di agitazione termica, aumentando così la temperatura della sostanza, bensì utilizzano questa energia per vincere le mutue forze di attrazione e allontanarsi l'una dall'altra, effettuando quindi il *passaggio di stato* dallo stato di aggregazione *solido*, in cui le molecole sono fortemente stipate tra loro ed obbligate ad oscillare attorno a posizione fissate, a quello *liquido*, in cui hanno maggiore libertà di movimento, pur rimanendo concentrate nello stesso volume di sostanza.

Stessa cosa per quanto riguarda il *calore latente di vaporizzazione*, per il passaggio della sostanza dallo stato *liquido* a quello *aeriforme* (ebollizione[43]).

Nel grafico sottostante è mostrata la temperatura raggiunta in funzione del calore ceduto di un campione di ghiaccio di 1 kg che parte dalla temperatura iniziale di −50° C, e che subisce i passaggi di stato da liquido prima e a gassoso poi (vapore acqueo). In realtà nel grafico non c'è nessun ordinamento temporale (tranne quello implicito nel segno di Q) e può esser letto anche da destra verso sinistra come processo di raffreddamento del vapore acqueo, in funzione del calore che questo cede (o che gli viene sottratto); in pratica, un frigorifero. Notare le scale di grandezza. In particolare, l'energia necessaria a portare il ghiaccio da −50 a 0° C è meno di un

[43] Si faccia attenzione a non confondere l'*ebollizione* con l'*evaporazione*. Entrambi sono processi di *vaporizzazione*, che comportano il passaggio di stato da liquido ad aeriforme, solo che il primo avviene alla temperatura di ebollizione della sostanza (o oltre), 100° C per l'acqua, e riguarda tutto il volume della stessa, mentre il secondo avviene a temperature inferiori a quella di ebollizione e coinvolge solo gli strati superficiali della sostanza.



terzo dell'energia necessaria a permettere la fusione del ghiaccio in acqua, e solo il 20% in meno di quello per portare l'acqua da 0° a 100° C; l'energia necessaria a vaporizzare tutta l'acqua invece è addirittura un ordine di grandezza maggiore. In generale quindi sono i passaggi di stato a necessitare la maggior quantità di calore, e non l'aumento di temperatura. Si notino anche le diverse pendenze delle linee corrispondenti al riscaldamento del ghiaccio, dell'acqua e del vapore acqueo, conseguenza dei diversi calori specifici delle tre sostanze: 2090, 4186 e 1030 J/kg ·° C rispettivamente.

Soluzione

Considerando alcool+ghiaccio come un *sistema isolato*, nel quale non avvengono scambi di calore con l'*esterno*, trascuriamo quindi il calore scambiato con il bicchiere e con l'aria, tutto il calore ceduto (segno "−") dall'alcool sarà dato (segno positivo, standard) al ghiaccio. Varrà quindi l'equazione del *bilancio energetico dei calori*:

$$Q_{\mathrm{H_2O}} + Q_{\mathrm{alcool}} = 0, \qquad \text{oppure} \qquad Q_{\mathrm{H_2O}} = -Q_{\mathrm{alcool}}.$$

Poiché il ghiaccio subisce una trasformazione di stato, il suo calore andrà suddiviso in tre contributi, quello necessario a portare il *ghiaccio* preso dal freezer da −5 a 0° C, quello latente necessario alla fusione del ghiaccio in acqua, e quello necessario a portare l'acqua da 0° C alla temperatura finale T_f raggiunta dal drink:[44]

$$Q_{\mathrm{H_2O}} = m_{\mathrm{H_2O}} c_{\mathrm{ghiaccio}} \big(0^\circ - (-5^\circ)\big) + m_{\mathrm{H_2O}} \lambda + m_{\mathrm{H_2O}} c_{\mathrm{acqua}} (T_f - 0^\circ).$$

Attenzione che per come è scritta la precedente, T_f sarà espressa in °C. Unendo questa equazione

[44] Attenzione: in Termodinamica è ottima abitudine esprimere tutte le temperature in °K poiché la maggior parte delle formule, come le leggi dei gas, sono valide solo ed esclusivamente utilizzando questa unità di misura. In questo esempio, ed in generale quando abbiamo a che fare col calore scambiato, in cui compaiono differenze di temperatura ΔT, è superfluo eseguire la conversione poiché il fattore 273.15° K si cancella e 1° C = 1° K. Attenzione tuttavia che questo è solo un caso fortunato, da considerare come "l'eccezione" in Termodinamica.

all'analoga del calore <u>ceduto</u> dall'alcool abbiamo:

$$Q_{\mathrm{H_2O}} = -Q_{\mathrm{alcool}}$$
$$m_{\mathrm{H_2O}}\Big(c_{\mathrm{ghiaccio}} \cdot 5^\circ + \lambda + c_{\mathrm{acqua}} \cdot T_f\Big) = -m_{\mathrm{alcool}} c_{\mathrm{alcool}} \big(T_f - 20^\circ\big)$$

che risolta per trovare T_f dà:

$$T_f = \frac{m_{\mathrm{alcool}} c_{\mathrm{alcool}} 20^\circ - m_{\mathrm{H_2O}}\big(c_{\mathrm{ghiaccio}} \cdot 5^\circ + \lambda\big)}{m_{\mathrm{alcool}} c_{\mathrm{alcool}} + m_{\mathrm{H_2O}} c_{\mathrm{acqua}}}.$$

Raccogliendo dalle varie tabelle disponibili nei libri o in rete le informazioni necessarie,

$$\rho_{\mathrm{alcool}} \simeq 789 \text{ kg/m}^3$$
$$c_{\mathrm{acqua}} \simeq 4186 \text{ J/kg} \cdot^\circ \text{K}$$
$$c_{\mathrm{ghiaccio}} \simeq 2080 \text{ J/kg} \cdot^\circ \text{K}$$
$$c_{\mathrm{alcool}} \simeq 2470 \text{ J/kg} \cdot^\circ \text{K}$$
$$\lambda \simeq 333 \text{ kJ/kg}$$

da cui calcoliamo la massa del 1 dl = 0.1 litri di alcool usato per il cocktail, otteniamo numericamente che la temperatura finale raggiunta dalla bevanda è: $T_f \simeq 1.94^\circ$ C. Ricordiamo l'assunzione fatta all'inizio, di avere un sistema isolato per cui abbiamo trascurato l'apporto di calore dall'ambiente, quindi in realtà ci sarà da aspettarsi che la temperatura del cocktail sia effettivamente maggiore, fino a raggiungere quella dell'ambiente circostante (*termalizzazione*) dopo un tempo sufficientemente lungo.

Esercizio 38

Calorimetria, sistemi non isolati e scambio di calore con l'esterno - Simile esercizio 4 compito, 15 gennaio 2018

Una massa di 50 grammi di ghiaccio alla temperatura di -10°C è immersa in una tazza che contiene 300 g di tè alla temperatura di 30°C. Si calcoli la temperatura del liquido all'equilibrio. Si assuma che il tè abbia lo stesso calore specifico dell'acqua. Si ricordi che il ghiaccio ha il calore specifico $c = 0.5$ cal/g°K e calore latente di fusione $c_l = 80$ cal/g.

Tornando dopo 30 minuti da quando è stato messo il ghiaccio nel tè si nota che il ghiaccio si è completamente sciolto e che la temperatura di equilibrio dei due è in realtà 18 ° C. Confrontare questo valore col precedente. Quanto calore è stato scambiato con l'ambiente ($T_A = 25$ ° C)?

Soluzione (parte I)

Questo problema è nella prima parte identico al precedente Esercizio 37 mentre nella seconda considera il caso più realistico di un *sistema non* perfettamente *isolato* termicamente con l'esterno. Procediamo quindi come prima e rimandiamo ad una prossima sezione l'ulteriore complicazione presentata in questo problema.

Poiché vi è differenza di temperatura tra ghiaccio e tè, ponendo questi due sistemi in contatto avverrà *scambio di calore* fino al raggiungimento di una *temperatura di equilibrio* comune. Viste le differenze di temperatura e quantità, è ragionevole aspettarsi che all'equilibrio il ghiaccio si sarà completamente sciolto in acqua; se ci fosse stato molto più ghiaccio che tè (o fosse stato molto più freddo) sarebbe stato quest'ultimo a congelarsi. Quindi il processo di scambio di calore consta di <u>tre fasi</u>. Nella prima il ghiaccio assorbe calore dal tè passando da $T_{i\,\mathrm{ice}} =$

$-10°$ C a $T_{\text{fusione}} = 0°$ C, la sua temperatura di fusione (I). A questo punto avviene una fase in cui il calore fornito al ghiaccio serve per eseguire il *passaggio di stato* da solido a liquido (*fusione*) trasformandolo tutto quanto in acqua (*II*). Nell'ultima fase l'acqua ottenuta si scalda raggiungendo una temperatura di equilibrio T_e uguale a quella del tè, che cedendo calore si sarà invece raffreddato (*III*). Trascurando per ora gli scambi di calore con l'esterno (aria e bicchiere) abbiamo l'equazione di conservazione:

$$Q_{\text{ice}} + Q_{\text{tè}} = 0$$

dove, per quanto detto, Q_{ice} sarà positivo poiché il ghiaccio avrà acquistato calore aumentando la propria temperatura, mentre $Q_{\text{tè}}$ sarà negativo poiché avrà ceduto calore raffreddandosi. Possiamo sviluppare la precedente nelle tre fasi descritte prima:

$$\underbrace{c_{\text{ice}} m_{\text{ice}} \cdot \left(T_{\text{fusione}} - T_{i\,\text{ice}}\right)}_{I} + \underbrace{c_{l\,\text{ice}} m_{\text{ice}}}_{II} + \underbrace{c_{\text{acqua}} m_{\text{ice}} \cdot \left(T_e - T_{\text{fusione}}\right)}_{III} + c_{\text{tè}} m_{\text{tè}} \cdot \left(T_e - T_{i\,\text{tè}}\right) = 0$$

Notare che le masse del ghiaccio e dell'acqua nella quale si è trasformato sono le stesse. La precedente può essere risolta per trovare la temperatura finale di equilibrio T_e:

$$T_e = \frac{c_{\text{acqua}} m_{\text{ice}} \cdot T_{\text{fusione}} + c_{\text{tè}} m_{\text{tè}} \cdot T_{i\,\text{tè}} - c_{\text{ice}} m_{\text{ice}} \cdot \left(T_{\text{fusione}} - T_{i\,\text{ice}}\right) - c_{l\,\text{ice}} m_{\text{ice}}}{c_{\text{acqua}} m_{\text{ice}} + c_{\text{tè}} m_{\text{tè}}}$$

Prima di procedere al calcolo per trovare la soluzione numerica va ricordato che in Termodinamica (ed in Fisica e Chimica in generale) è importante utilizzare sempre temperature in gradi Kelvin. Quando nel problema entrano in gioco solo differenze di temperatura, come in questo esercizio sullo scambio di calore o nella dilatazione termica, il fattore 273.15° di differenza tra Celsius e Kelvin si cancella ed i risultati possono essere ottenuti con entrambe le unità di temperatura. In tutti gli altri casi (equazione di stato dei gas, legge di Stefan-Boltzmann etc.) la conversione è necessaria.

Inserendo i dati dell'esercizio nella precedente equazione per T_e otteniamo:

$$\begin{aligned} T_e &\simeq 286.7°\,\text{K} \\ &\simeq \ 13.6°\,\text{C} \end{aligned}$$

Prima di concludere, per completezza, riesaminiamo l'assunzione fatta all'inizio dell'esercizio seconda la quale ci aspettavamo che tutto il ghiaccio si sarebbe sciolto nel tè. In effetti se non fosse stato così ce ne saremo accorti dal fatto che T_e sarebbe venuto minore di T_{fusione}; in tal caso avremmo dovuto reimpostare l'esercizio senza la fase *III* e prevedendo invece per il tè una fase di congelamento.

Richiami di teoria: conducibilità termica e costante di tempo del calorimetro

Nessun sistema può veramente considerarsi isolato dall'ambiente esterno, anche se per la maggior parte degli scopi l'errore che si compie facendo questa assunzione è piccolo rispetto al dettaglio nel risultato che vogliamo ottenere. Consideriamo cosa cambia quindi nel precedente risultato includendo anche questa possibilità.

Come la maggior parte delle *leggi empiriche* che descrivono la calorimetria e gli scambi di calore (con l'unica importante eccezione data dalla legge di Stefan-Boltzmann), anche in questo caso risulta che in buona approssimazione, per temperature del sistema non troppo diverse da quelle dell'ambiente e per tempi sufficientemente brevi, lo scambio di calore è descrivibile per mezzo di una relazione lineare. Abbiamo infatti che *il calore ΔQ ceduto al sistema dall'ambiente è circa proporzionale al tempo, Δt, in cui lo scambio di calore è avvenuto ed alla differenza di* *temperatura* tra i due:

$$\Delta Q = \delta \cdot \big(T(t) - T_A\big)\Delta t$$

dove δ è una costante, con le dimensioni di $\mathrm{J}/^\circ\mathrm{K} \cdot \mathrm{sec} =$ W/ˆ\circK, che descrive la *conducibilità termica del calorimetro*[45] e quanto rapidamente il calore viene ceduto al sistema (o tolto se il sistema è più caldo dell'ambiente). E' possibile legare questa alla forma dell'oggetto usato come calorimetro:

$$\delta \equiv k\frac{S}{L}, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta Q = k\frac{S}{L}\big(T(t) - T_A\big)\Delta t}$$

dove S è la superficie laterale a contatto con l'ambiente esterno, L è lo spessore delle sue pareti, e k è una costante ($\mathrm{W/m} \cdot^\circ \mathrm{K}$), detta *conducibilità termica* specifica, che dipende unicamente dal materiale con cui è fatto l'oggetto. Sarà migliore un calorimetro con pareti spesse, L grande, e forma tale da minimizzare la sua superficie esterna S; k è elevata, $\sim 10^2$, per i buoni conduttori termici (i metalli) e bassa, $\sim 10^{-2}$, per gli isolanti (polistirolo, lana).

La temperatura ambientale T_A è considerata costante nell'intervallo di tempo Δt di misurazione, mentre $T(t)$ è la temperatura del sistema al tempo t.

A questo punto dovremmo inserire la precedente equazione in quella per il calore, $Q = c\,m\Delta T$; ciò che ne risulterebbe è un'*equazione differenziale*, in cui compaiono contemporaneamente l'incremento nella variabile indipendente Δt, la variabile dipendente del tempo $T(t)$ e l'incremento di quest'ultima ΔT:

$$cm\Delta T + \delta \cdot \big(T(t) - T_A\big)\Delta t = 0,$$
$$\frac{\Delta T}{T(t) - T_A} = -\frac{\delta}{cm}\Delta t \equiv -\frac{\Delta t}{\tau}$$

dove $\tau \equiv cm/\delta$ è chiamata la *costante di tempo del calorimetro.* In pratica questo numero misura il tempo degli scambi di calore tra il sistema (il calorimetro) e l'ambiente.

Purtroppo non siamo in grado di risolvere la precedente equazione formalmente per il caso più generale senza ricorrere ad ulteriori nozioni di Matematica. Tentiamo quindi un approccio semplificato per ricavare solamente alcune caratteristiche generali. Riscriviamo per prima cosa l'equazione in due modi diversi:

$$\frac{\Delta T}{T(t) - T_A} = -\frac{\Delta t}{\tau}, \qquad T(t) = -\tau\frac{\Delta T}{\Delta t} + T_A.$$

Osservando l'equazione a sinistra possiamo ipotizzare che se il tempo di contatto tra il calorimetro (il sistema di ghiaccio e tè) e l'ambiente è molto più breve del tempo caratteristico del calorimetro, $\Delta t/\tau \sim 0$, questo non avrà di fatto scambiato calore con l'ambiente, e $\Delta T = 0$. Questa è l'ipotesi implicita nel primo punto e nell'esercizio precedente.

Guardando invece l'equazione a destra notiamo, nella condizione opposta, che dopo un tempo molto più lungo di quello caratteristico del calorimetro, $\tau/\Delta t \sim 0$, la temperatura del sistema diventa quella dell'ambiente: $T(t) \sim T_A$, come prevedibile.

[45] La maggior parte dei nomi presenti in questa sezione fa riferimento a "calorimetri". I calorimetri, i più noti storicamente quelli di Bunsen e di Regnault, sono strumenti appositamente progettati per svolgere misure dei valori dei calori latenti di fusione, di evaporazione, di reazione, e della determinazione dei calori specifici delle sostanze. Erano progettati per minimizzare lo scambio di calore con l'esterno, per non alterare i risultati delle misure, o quanto meno tenere sotto controllo questa, come ci proponiamo di fare nel presente esercizio, e δ è appunto uno dei parametri utilizzati per farlo.

Soluzione (parte II)

La situazione descritta nella seconda parte dell'esercizio si trova compresa tra i due estremi, $\Delta t/\tau \sim 0$ e $\tau/\Delta t \sim 0$, descritti nella sezione precedente; sicuramente sarà valso il primo, e quindi sarà stata raggiunta la temperatura di equilibrio tra ghiaccio e tè come descritto nella prima parte della soluzione (trascuriamo quindi gli scambi di calore con l'ambiente), però non varrà ancora la seconda, ed infatti la temperatura risultante dopo 30 min è $T(t) = 18^\circ$ C. Sotto queste approssimazioni possiamo calcolare il calore scambiato con l'ambiente come:

$$\Delta Q = cm\big(T(t) - T_e\big)$$

dove c e m sono calore specifico e massa totale di ghiaccio e tè: $c = c_{\text{acqua}}$, $m = m_{\text{ice}} + m_{\text{tè}}$. Inserendo i dati troviamo che il calore scambiato con l'ambiente, in 30 min, è stato:

$$\Delta Q \simeq 1540 \text{ cal} = 6.446 \text{ kJ}.$$

Possiamo stimare dai precedenti valori anche la conducibilità termica del calorimetro δ costituito dal sistema di acqua e ghiaccio:

$$\Delta Q = \delta \cdot \big(T(t) - T_e\big)\Delta t, \qquad \delta = \frac{\Delta Q}{\big(T(t) - T_e\big)\Delta t} \simeq 0.814 \text{ W}\,^\circ\text{K}.$$

Esercizio 39

Calorimetria in cucina

Per cuocere la pasta è necessario che l'acqua penetri nell'impasto, sciogliendo l'amido, e che quest'ultimo gelatinizzi per ottenere una consistenza morbida ed elastica. Tale processo avviene generalmente tra i 60° ed i 70° C, in base al tipo di farina utilizzata. Inoltre, per rendere il tutto più digeribile, è bene che le proteine del glutine denaturino, tipicamente tra i 70° e gli 80° C. In linea di principio non è quindi necessario cuocere la pasta in acqua bollente (100° C) a fiamma accesa; basta solo che la temperatura dell'acqua non scenda mai sotto gli 80° C. Sfruttando questa idea calcolare quanta acqua serve per cuocere a fuoco spento 400 g (4 porzioni abbondanti) di pasta, presa a temperatura ambiente 20° C, immaginando di buttarla e spegnere la fiamma esattamente al bollore dell'acqua (100° C).

Per risolvere l'esercizio serve conoscere il calore specifico della pasta. Disponendo di un termometro da cucina (scala −30°-300° C) descrivere un esperimento col quale misurarla.
[Soluzione: $c_{pasta} \simeq 2$ kJ/°K · kg]

Soluzione

Il presente esercizio è di fatto molto simile ai precedenti ed è stato incluso qui quasi unicamente per spiegare fisicamente una procedura, a prima vista un po' "poco ortodossa", per la cottura della pasta che sta riscuotendo un forte eco su internet, sia nei video che su blog di cucina e non.

Impostiamo quindi la soluzione in modo formalmente identico a quanto fatto nell'Esercizio 37, ricordandoci poi di fare delle considerazioni sulla minima quantità di acqua perché la temperatura finale, quella di equilibrio, sia maggiore di 80° C e si mantenga tale per i circa 10 minuti necessari alla cottura della pasta. Scriviamo quindi:

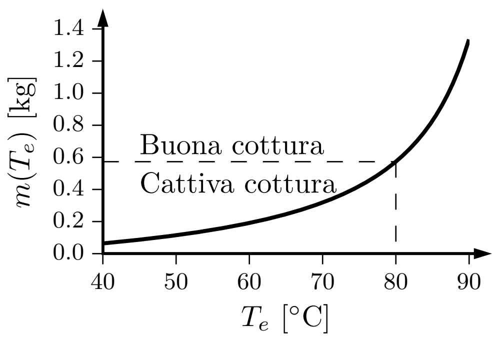
$$Q_{\text{pasta}} + Q_{\text{acqua}} = 0$$

dove se avessimo avuto la fiamma ancora accesa avremo dovuto aggiungere un termine positivo a destra, mentre se volessimo tenere conto della dissipazione del calore, un termine negativo; si veda la discussione contenuta nell'Esercizio 38. Espandiamo la precedente per trovare non la temperatura finale di equilibrio, T_e, come abbiamo fatto negli esercizi precedenti, bensì la massa di acqua (in funzione di T_e):

$$c_{\text{pasta}} m_{\text{pasta}} (T_e - T_{\text{pasta}}) + c_{H_2O} m_{H_2O} (T_e - T_{H_2O}) = 0$$

$$m_{H_2O} = \frac{c_{\text{pasta}} m_{\text{pasta}} (T_e - T_{\text{pasta}})}{c_{H_2O} (T_{H_2O} - T_e)}.$$

Questa massa, vista come funzione della temperatura di equilibrio, è una *funzione crescente*: infatti sia il numeratore che il denominatore sono positivi (essendo $T_e < T_{H_2O} = 100°$ C e $T_e > T_{\text{pasta}} = 20°$ C) e il primo cresce con T_e mentre il secondo decresce, aumentando in ogni caso al crescere di T_e il valore della frazione; si veda il grafico a fianco. Quindi la massa minima di acqua con cui cuocere la pasta è quella corrispondente alla temperatura minima di cottura della pasta, ossia 80° C (escludendo sempre gli effetti di dispersione del calore con l'esterno). Inserendo i numeri otteniamo quindi:



$$\boxed{m_{H_2O}(\text{minima}) \simeq 573 \text{ g}}$$

Questo risultato, apparentemente sorprendente, è dovuto all'alto calore specifico dell'acqua. Ovviamente, per tenere di conto anche della dispersione del calore nell'ambiente servirà un po' più di acqua, per mantenere alta la temperatura. Per esempio, invece che 80°, per fare una stima più conservativa possiamo scegliere un quantitativo di acqua che dia una temperatura di equilibrio T_e uguale a 90° C; in questo modo anche l'effetto di abbassamento di temperatura dovuto alla dispersione del calore nel tempo ($\sim$ 10 min) di cottura della pasta dovrebbe essere compensato. Inserendo i dati otteniamo un quantitativo di acqua $m_{H_2O}(\text{minima}) \simeq 1.3$ kg. Altra piccola accortezza è verificare che tutta la pasta sia ben coperta dall'acqua, e questo va aumentare ancora il volume necessario di acqua per cuocere la pasta in questo modo. In ogni caso, la Chimica e la Fisica ci insegnano che è possibile cuocere la pasta a fuoco spento.

Esercizio 40

Calorimetria, conducibilità termica - problema pratico estivo

Si calcoli la temperatura dalla soffitta di un'abitazione, sapendo che le tegole del tetto hanno raggiunto la temperatura di 45 ° C per effetto dell'irraggiamento solare, e che la temperatura delle stanze sottostanti è di 22 ° C. Si supponga che il tetto sia stato coibentato con pannelli di polistirene espanso (EPS) dello spessore di 10 cm, conducibilità termica 0.035 $W \cdot m^{-1} \cdot° K^{-1}$*, e che abbia una forma triangolare a due falde, inclinate di 30 °, mentre il piano sottostante sia separato dalla soffitta da uno strato di 30 cm di mattoni forati, conducibilità termica 0.8* $W \cdot m^{-1} \cdot° K^{-1}$.

Soluzione

Work in progress!

Esercizio 41

Calorimetria, conversione di energia potenziale in calore - Simile esercizio 4 compito, 3 ottobre 2017

Le cascate del Niagara, situate al confine tra Stati Uniti e Canada, sono le più grandi per portata d'acqua di tutto il Nord America. Sapendo che la temperatura dell'acqua a monte della cascata è 10° C, e supponendo che tutta l'energia acquisita nel salto di 50 metri sia trasformata in calore, di quanto è più alta la temperatura dell'acqua a valle rispetto a sopra?

Soluzione

In questo problema si unisce dinamica dei fluidi a calorimetria. Data l'ipotesi (per la verità non troppo realistica, poiché implica il trascurare ogni eventuale contributo all'energia cinetica e gli scambi di calore con l'ambiente circostante) che tutta l'energia potenziale acquisita nel salto sia trasformata in calore, basta eguagliare l'equazione della variazione dell'energia potenziale gravitazionale in funzione della differenza di altezza

$$\Delta U = mg\,\Delta h$$

e quella del calore in funzione della differenza di temperatura tra sopra e sotto la cascata

$$Q = mc\,\Delta T = mc\big(T_{\text{sotto}} - T_{\text{sopra}}\big)$$

e risolvere per trovare T_{sotto} in funzione della differenza di altezza:

$$Q = \Delta U$$

$$mc\,\Delta T = mg\,\Delta h \qquad \rightarrow \qquad \boxed{T_{\text{sotto}} = \frac{g\Delta h}{c} + T_{\text{sopra}}}$$

che dà numericamente $T_{\text{sotto}} \simeq 10.12°$ C, ossia $\Delta T \simeq 0.12°$ C.

Esercizio 42

Carica elettrica e Legge di Coulomb - Compito, 9 giugno 2017

Due cariche positive, rispettivamente di 100 e 299 microCoulomb, sono poste alla distanza di 3 cm. Di quanto diminuisce la loro forza repulsiva se le stesse cariche distano tra di loro di 0.09 m?

Richiamo di teoria: Elettrostatica, la Legge di Coulomb

A partire da questo problema verrà considerata la fenomenologia legata ad una particolare *proprietà della materia*: la **carica elettrica**. Questa ha carattere fondamentale, esattamente come la massa, ma con importanti differenze.

Le principali *proprietà della carica elettrica* sono:

conservazione: la carica elettrica è una *grandezza fisica conservata*, nel senso che per un *sistema isolato* la carica totale rimane *costante nel tempo* ed indipendentemente dalle interazioni o reazioni chimiche che possono avvenire. Questa è una legge sperimentale fondamentale della Natura in quanto non è mai stata osservata una sua violazione. Come ci ha insegnato Albert Einstein, la massa non possiede questa proprietà ed infatti può essere trasformata in energia;[46]

doppia fenomenologia (Franklin 1750): già dal VI secolo a.C. il filosofo greco Talete di Mileto aveva notato che una bacchetta di ambra (in greco élektron, da cui deriva il termine *elettricità*) strofinata con un panno di lana acquista la capacità di *attrarre* corpi leggeri (per esempio, piccole pagliuzze o fiocchi di lana stessa)[47] e che doveva entrare in gioco una forza diversa da quella gravitazionale, perché l'ambra non strofinata non aveva questa capacità. Inoltre, sempre a differenza della *forza* (e della *massa*) *gravitazionale*, due pezzetti di ambra precedentemente strofinati con la lana si *respingevano* a vicenda.[48] Questa "doppia fenomenologia" ha spinto Benjamin Franklin ad ipotizzare che esistessero due tipi di cariche, quelle *come la bacchetta di ambra* e quelle *come il panno di lana strofinato*, e a formulare il principio secondo cui: *cariche dello stesso tipo si respingono, mentre cariche di tipo diverso si attraggono.* Da queste considerazioni è stato scelto quindi di descrivere la carica elettrica per mezzo di una *grandezza fisica scalare dotata di segno*; in questo modo il precedente principio può essere riformulato come segue: *due cariche q_1 e q_2 con lo stesso segno (tipo), cioè per cui $q_1 \cdot q_2 > 0$, si respingono mentre cariche di segno (tipo) opposto, $q_1 \cdot q_2 < 0$, si attraggono.* Al contrario, la massa (gravitazionale) di un corpo è sempre positiva e la forza di gravità tra due corpi sarà sempre attrattiva;

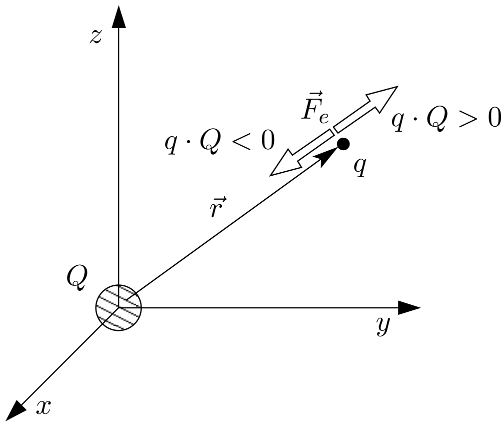
[46] Per esempio il *deuterio* $^2_1$H, un isotopo dell'idrogeno formato da un protone ed un neutrone, ha una massa di circa 1875.61 MeV, *inferiore* di circa 2.22 MeV, ossia lo 0.12%, alla somma delle masse di protone, 938.27, e neutrone, 939.56 MeV. Questa energia, detta *energia di legame*, è impiegata per tenere unite queste due particelle a formare il nucleo dell'atomo di deuterio. Anche a livello atomico, e più oltre molecolare, la massa totale è inferiore alla somma delle masse dei costituenti fondamentali, solo che le energie di legame in gioco sono molto inferiori e la differenza percentuale quasi trascurabile.

[47] Oggigiorno è possibile ripetere l'esperimento con una biro al posto della bacchetta di ambra e dei foglietti di carta al posto della pagliuzza.

[48] Questo è l'effetto che succede ai nostri capelli quando ce li asciughiamo con il phon. Per fortuna hanno inventato gli asciugacapelli con funzione "ionizzatore", con lo scopo di controbilanciare la carica acquisita dai nostri capelli ed evitare che si "rizzino".

quantizzazione (Millikan 1910): la carica elettrica di un corpo è sempre un *multiplo intero* della *carica fondamentale dell'elettrone* (o del protone). Il modulo (numero positivo) di quest'ultima viene generalmente indicato con la lettera "e", quindi la carica di un corpo sarà sempre scrivibile come: $q = k \cdot e$, con $k \in \mathbb{Z}$ cioè un numero intero (positivo o negativo): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.[49]

La Dinamica di due corpi interagenti elettricamente è descritta per mezzo della *forza elettrica*, $\vec{F}_e$. *Sperimentalmente* la forza che si esercita tra una *carica elettrica* Q ed una seconda q posta nella posizione $\vec{r}$ rispetto alla prima, come in figura, assumendo entrambe le *cariche ferme* e *di dimensioni piccole* rispetto alle scale del problema, è data dalla **Legge di Coulomb**:



$$\boxed{\vec{F}_e(\vec{r}) = k_e \frac{qQ}{r^2} \hat{r}}$$

Come descritto poco fa, questa forza sarà *attrattiva* (freccia $\Leftarrow$, verso $-\hat{r}$, opposto a quello del raggio vettore $\vec{r}$) se le cariche sono opposte, e *repulsiva* (freccia $\Rightarrow$, verso $\hat{r}$, concorde a quello del raggio vettore $\vec{r}$) se le cariche sono dello stesso tipo.

L'unità di misura della carica nel Sistema Internazionale di pesi e misure (SI) è il *Coulomb*, indicato con la lettera C; due cariche elettriche da 1 C poste alla distanza di 1 m si *respingeranno* con una forza pari a circa 8.9×10^9 N (enorme!!), da cui il valore della costante davanti al membro di sinistra della precedente equazione, detta *costante elettrica, e dal valore* $k_e \simeq 8.9 \times 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$. Rispetto a queste unità di misura la carica elettrica dell'elettrone risulta essere in modulo $e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Nella precedente Legge di Coulomb è importante notare alcuni aspetti fondamentali:

lineare nelle cariche: la forza elettrica è lineare in entrambe le cariche, nel senso che se la carica Q fosse in realtà composta da due cariche Q_1 e Q_2, poste nella stessa posizione (come approssimativamente la carica dei due protoni del nucleo di *elio*), la forza risultante sulla carica q sarebbe la somma delle forze i ciascuna delle cariche sottostanti: $\vec{F}_e = k_e \frac{qQ}{r^2} \hat{r} == k_e \frac{qQ_1}{r^2} \hat{r} + k_e \frac{qQ_2}{r^2} \hat{r} = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2}$. Analogamente, a parità di distanza $\vec{r}$, se la carica Q raddoppia, la forza agente sulla carica q raddoppierà;

proporzionale a $1/r^2$: la dipendenza funzionale della forza dalla posizione relativa tra le due cariche, come *l'inverso del quadrato della loro distanza*, è la stessa della *forza gravitazionale* dalle *masse*. Questo implica che le traiettorie e le orbite delle masse e delle cariche sono simili; l'atomo di *ossigeno* (O, 8 elettroni) è per certi aspetti simile classicamente ad un *sistema solare* (8 pianeti). La differenza più macroscopica sta nelle dimensioni dell'ossigeno ed in quelle del sistema solare; ciò è dovuto all'enorme differenza tra la *costante di gravitazione universale* $G \simeq 6.67 \times \underline{10^{-11}}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$, che descrive le orbite dei pianeti attorno al Sole, e la *costante elettrica* $k_e \simeq 8.9 \times \underline{10^9}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$, che descrive quelle degli elettroni attorno al nucleo.

Soluzione

Work in progress!

[49] In realtà dagli anni '60 del '900 è noto che i costituenti fondamentali di neutroni e protoni, i *quark*, hanno in realtà cariche di 1/3 e 2/3 della carica dell'elettrone. Tuttavia la forza che lega queste particelle all'interno dei nuclei è tale da renderne possibili solo combinazioni con carica intera (o nulla).

Esercizio 43

Campo elettrico - Compitino, 5 giugno 2017

Partendo da fermo, un elettrone si muove in un campo elettrico uniforme spostandosi di 10 cm in 10 -7 sec. Qual è l'intensità del campo elettrico? (carica dell'elettrone: 1,6x 10 -17 Coulomb, massa dell'elettrone: 9.1x10 -31 kg).

Richiami di teoria: campo elettrico e potenziale elettrico

La *forza elettrica* che si esercita tra una *carica elettrica* q_1 ed una seconda q_2 (misurate nel SI in *Coulomb*: C) posta nella posizione $\vec{r}$ rispetto alla prima, assumendo entrambe le cariche ferme e di dimensioni piccole rispetto alle scale del problema, è data dalla Legge di Coulomb:

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

ed è *repulsiva* (col verso dato dal versore $\hat{r}$) se le due cariche hanno segno concorde e *attrattiva* (verso $-\hat{r}$) viceversa. La *costante elettrica* $k_e \simeq 8.9 \times 10^9$ N $\cdot$ m^2/C^2. Questa *forza posizionale* è facile convincersi che è anche *conservativa* (si riveda la discussione contenuta nell'Esercizio 21), per cui il lavoro necessario a spostare una carica può essere espressa anche per mezzo di una *variazione di energia potenziale elettrica*:

$$L = -\Delta U_e.$$

Si ricordi la convenzione con la quale è stata introdotta ΔU. Dal precedente, risulta conveniente introdurre il concetto di *potenziale elettrico*, o meglio di *differenza di potenziale elettrico* (ddp), come il lavoro necessario a spostare una carica elettrica unitaria:

$$\Delta U_e = q \cdot \Delta V.$$

Se misuriamo l'energia in Joule e la carica in Coulomb, il potenziale elettrico si misurerà in J/C = Volt (abbreviato in V); *un Volt è la differenza di potenziale tra due punti se per portare una carica elettrica di -1 C da uno a l'altro è necessario compiere un lavoro di 1 J* (si ricordi la convenzione sui segni: $L = -\Delta U_e = -q \cdot \Delta V$). Spesso, soprattutto nelle applicazioni domestiche, si considera come potenziale di riferimento quello "di terra", posto uguale a zero, e tutte le ddp scritte come potenziali V misurati rispetto a questo.

La forza elettrica farà muovere le cariche; il potenziale elettrico (o per meglio dire la ddp) serve a fornirci una descrizione di ciò in modo analogo a come abbiamo fatto in Meccanica col metodo dell'energia.

Soluzione

Work in progress!

Esercizio 44

Corrente elettrica - Compito, 9 giugno 2017

In ogni centimetro di un tipico filo di rame ci sono 2x10 21 elettroni liberi. Se tali elettroni si muovono alla velocità di 0,05 cm/sec, quanta corrente fluisce nel filo? (La carica dell'elettrone è 1,6x 10 -19 Coulomb.)

Richiami di teoria: la corrente elettrica

Dato un conduttore elettrico, come un filo di rame, possiamo definire in modo operativo la *corrente elettrica* come la carica totale che passa attraverso una sezione di questo in un intervallo di tempo infinitesimo:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

In condizioni stazionare:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Notare l'analogia con le definizioni di *velocità istantanea* e *velocità media*. L'unità di misura standard nel SI della corrente è l'*Ampère*: 1 A = 1 C/1 sec.

Per far circolare corrente è necessario vincere la *resistenza* offerta dal materiale attraversato al passaggio delle cariche. Si definisce quindi la *resistenza elettrica* R dalla relazione:

$$\Delta V = R \cdot I$$

e si misura in *Ohm*: *un Ohm* (1 Ω) *è la resistenza che offre un conduttore al passaggio di una corrente di 1 A tra una ddp di 1 V.* Ricordando quanto appena detto nella scelta del potenziale di terra come riferimento, nella precedente definizione possiamo omettere la Δ e la dicitura "differenza di" in riferimento al potenziale.

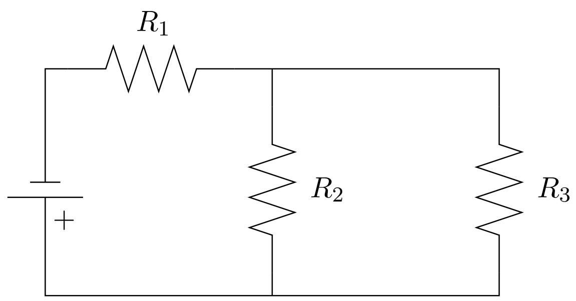
Soluzione

Work in progress!

Esercizio 45

Circuiti elettrici con resistenze - Compito, 15 gennaio 2018

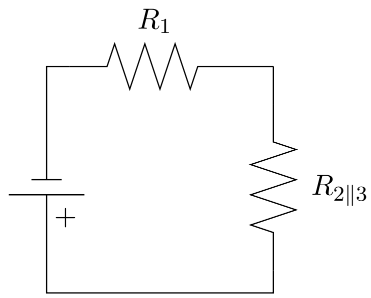
Tre resistenze sono collegate come in figura. La resistenza R_2 da 4 Ohm è attraversata da una corrente 1.4 A e la resistenza R_3 da 2 Ohm è attraversata da 2.8 A. Sapendo che $R_1 = 2.0$ Ohm, qual è la differenza di potenziale ai capi della batteria? Quanta potenza è dissipata nel circuito?



Soluzione

Metodo 1 (della serie e del parallelo)

Per risolvere il circuito basta osservare che le resistenze R_2 e R_3 sono poste in *parallelo*, ossia la tensione ai loro capi è la stessa (sono collegate agli stessi *nodi*, i punti del circuito dove le correnti si dividono). Quindi il circuito equivalente a quello mostrato in alto è il seguente:



dove $R_{2\|3}$ è la *resistenza equivalente* al parallelo di R_2 e R_3. Per trovare il suo valore basta applicare il fatto che le correnti che attraversano R_2 ed R_3, rispettivamente i_2 ed i_3, si ricongiungono ai due nodi ai quali sono attaccate le resistenze, ossia:

$$i = i_2 + i_3 = \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3} \equiv \frac{\Delta V}{R_{2\|3}},$$

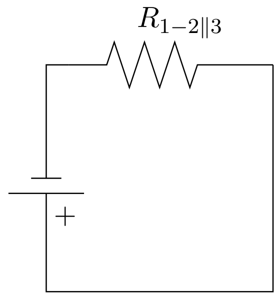
dove ΔV è la differenza di tensione tra i nodi a cui sono collegate R_2 e R_3. Eliminandola è immediato ricavare l'espressione della resistenza in parallelo equivalente:

$$\frac{1}{R_{2\|3}} \equiv \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

ossia:

$$R_{2\|3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Ancora, nel precedente circuito equivalente R_1 si troverà in *serie* a $R_{2\|3}$ poiché saranno attraversate dalla stessa corrente. Quindi il circuito equivalente alla serie di R_1 col parallelo di R_2 ed R_3 sarà:



dove:

$$R_{1-2\|3} = R_1 + R_{2\|3} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

La corrente che scorre in questo circuito equivalente è la somma delle correnti che scorrevano in R_2, $i_2 = 1.4$ A, ed in R_3, $i_3 = 2.8$ A, e che si riunivano nel nodo in alto al centro nel disegno originario del circuito, quindi:

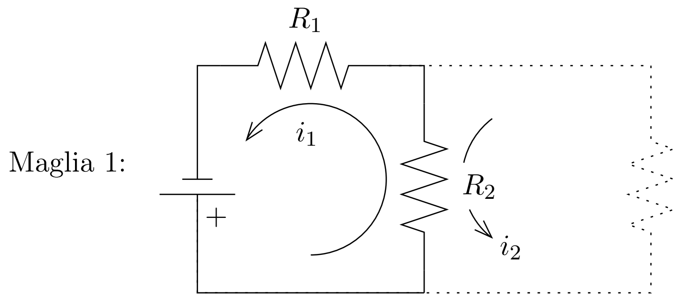
$$i = i_2 + i_3.$$

Nel semplice circuito equivalente disegnato prima, per trovare la differenza di potenziale ai capi del generatore di tensione basta applicare la *legge di Ohm*:

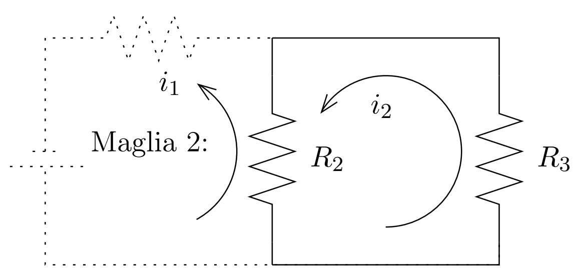
$$\begin{aligned} V &= i \cdot R_{1-2\|3} \\ &= (i_2 + i_3)\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) \\ &= 14 \text{ V}. \end{aligned}$$

Metodo 2 (soluzione completa tramite le leggi di Kirchhoff)

Il circuito dell'esercizio è costituito da due *maglie*, cioè due linee chiuse in cui ciascun componente (le resistenze, in questo caso) viene attraversato una sola volta. In generale la scelta di come definire le maglie è arbitraria, purché ogni componente alla fine appartenga ad almeno una maglia. Per esempio, guardando la figura in alto, una maglia può essere identificata come la linea chiusa costituita dal generatore di tensione a sinistra, la resistenza R_1, la resistenza R_2 ed il filo in basso:



L'altra invece potrà essere definita dalla resistenza R_2, la esistenza R_3, ed i file che le congiungono in alto ed in basso:



Alternativamente, poteva esser scelta come seconda maglia la linea chiusa esterna contenente il generatore di tensione, R_1, R_3, ed il filo in basso. Poiché tutti i componenti presenti nel circuito sono già contenuti in una delle precedenti due maglie, è superfluo includere anche quest'ultima.

Per ognuna delle precedenti maglie possiamo identificare una corrente, definendo i_1 e i_2 come in figura. La scelta del verso della corrente è arbitraria, come lo è in generale la scelta degli assi delle coordinate. Una convenzione abbastanza diffusa è che quando si ha un generatore di tensione, come quello nella maglia a sinistra, la corrente fuoriesca dal suo polo positivo.

Per *risolvere il circuito*, trovare cioè per ogni suo componente la corrente che lo attraversa e la tensione ai suoi capi, scriviamo la così detta *equazione delle maglie* (di Kirchhoff); questa equazione consiste nell'eguagliare la somma delle tensioni prodotte dai vari generatori con la somma delle cadute di potenziale ai capi di ciascun elemento. Per le nostre due maglie abbiamo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V = R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) \\ 0 = R_2(i_2 - i_1) + R_3 i_2 \end{cases}$$

Notare che nella resistenza R_2, per come sono state definite, scorrono due correnti in versi opposti; per questo la corrente totale sarà la differenza delle due. Si osservi inoltre che a sinistra della seconda equazione c'è zero poiché nella seconda maglia non ci sono generatori di tensione.

Per risolvere il problema è sufficiente l'equazione della prima maglia, osservando che nel testo non ci viene fornita i_1 ma solo $(i_1 - i_2) = 1.4$ A, la corrente che attraversa R_2, e $i_2 = 2.8$ A, la corrente che attraversa R_3, separatamente. Quindi:

$$\begin{aligned} V &= R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) \\ &= R_1(i_1 - i_2) + R_1 i_2 + R_2(i_1 - i_2) \\ &= 14 \text{ V}, \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio ho sottratto e sommato $R_1 i_2$ di modo da far comparire un termine $R_1(i_1 - i_2)$.

Come si nota, il risultato è identico al precedente. Il vantaggio di questa procedura, tramite le leggi di Kirchhoff è che è molto più potente e si applica ad una grande varietà di circuiti, non solo con componenti in serie o in parallelo.

La *potenza dissipata* negli elementi resistivi (quelli che si oppongono al moto delle cariche) del circuito è uguale a quella prodotta dal generatore di tensione per far circolare corrente, ossia per muovere le cariche elettriche all'interno del circuito. Per una quantità infinitesima di carica dq è necessaria un'energia $dE = dq \cdot V$ per farle superare un (differenza di) potenziale V. Quindi, ogni istante di tempo dt sarà necessario fornire una *potenza* (misurata in Watt):

$$\begin{aligned} P &= \frac{dE}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot V \\ &= i \cdot V \\ &= i^2 R = \frac{V^2}{R} \end{aligned}$$

per permettere alla corrente i di circolare nel circuito. Nell'ultimo passaggio è stata usata la *legge di Ohm* $V = i \cdot R$.

Inserendo i valori dati dall'esercizio di V e di $i = i_2 + i_3$, che scorre nel generatore di tensione, otteniamo immediatamente:

$$P = 14 \text{ V} \cdot 4.2 \text{ A} = 58.8 \text{ W}.$$

Esercizio 46

Circuiti elettrici con resistenze

Per costruire una serra ottimale è necessario disporre di una luce con un determinato spettro luminoso ed una potenza fissata. Purtroppo nel laboratorio di Botanica gli strumenti sono limitati ed è disponibile solo un tipo di lampadine con lo spettro giusto ma potenza di 45 W, mentre le nostre piantine possono sopportare al massimo 30 W. Com'è possibile costruire un semplice circuito elettrico, utilizzando solo del filo conduttore da collegare alla rete (220 V) ed il minor numero di lampadine di questo tipo, per avere la giusta potenza luminosa?

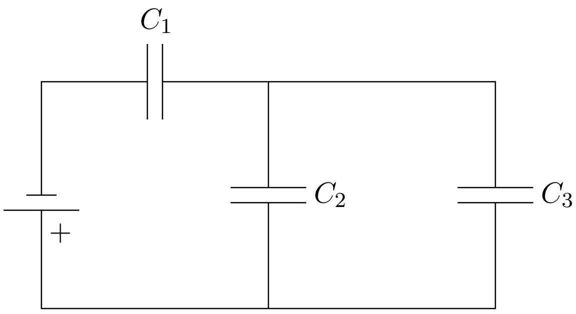
Soluzione

Work in progress!

Esercizio 47

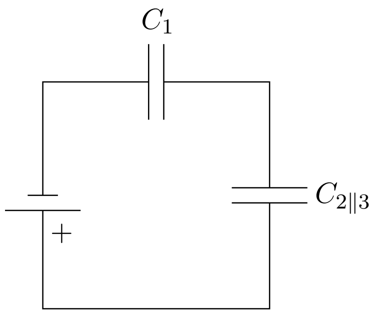
Circuiti elettrici con condensatori - Compito, 15 gennaio 2018

Tre condensatori sono collegati come in figura. $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$ e $C_3 = 5\ \mu F$. Qual è la capacità equivalente dei condensatori? Se la batteria esercita una ddp di 12 V e la ddp ai capi di C_3 è 4 V, quanta carica si accumula su ciascun condensatore?



Soluzione

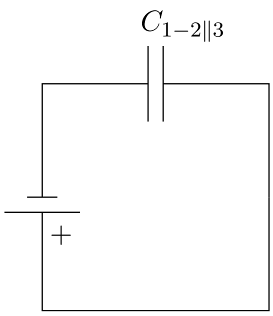
Per risolvere il circuito basta osservare che li condensatori C_2 e C_3 sono posti in *parallelo*, ossia la tensione ai loro capi è la stessa. Quindi il circuito equivalente a quello mostrato in alto è il seguente:



dove $C_{2\|3}$ è la *capacità equivalente* al parallelo di C_2 e C_3. Per trovare il suo valore, basta osservare che la carica totale immagazzinata dai due è la somma delle cariche sui singoli condensatori, e quindi:

$$C_{2\|3} \cdot V = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V,$$
$$\Rightarrow \quad C_{2\|3} = C_1 + C_2.$$

Nel precedente circuito equivalente C_1 si troverà in *serie* a $C_{2\|3}$ poiché saranno attraversate dalla stessa corrente. La ddp prodotta dal generatore V sarà la somma di quella ai capi di C_1, che chiameremo V_1, e di quella ai capi del parallelo $C_{2\|3}$, V_{23}. Il relativo circuito equivalente sarà il seguente:



Inoltre, essendo il circuito globalmente neutro, le cariche che si troveranno su ciascuna armatura saranno (in modulo) le stesse: Q. Sfruttando queste considerazioni possiamo quindi ottenere la capacità equivalente alla serie di C_1 e $C_{2\|3}$:

$$V = V_1 + V_{23}$$
$$\frac{Q}{C_{1-2\|3}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_{2\|3}}$$

quindi:

$$C_{1-2\|3} = \frac{C_1 C_{2\|3}}{C_1 + C_{2\|3}} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata sostituita l'espressione della capacità equivalente al parallelo di C_2 e C_3. Sostituendo i numeri forniti dal problema otteniamo:

$$\boxed{C_{1-2\|3} = 2\ \mu\text{F}}$$

Per ottenere la carica su ciascuna lastra delle capacità basta moltiplicare il precedente risultato per la ddp del generatore di tensione:

$$\boxed{Q = V \cdot C_{1-2\|3} = 30\ \mu\text{C}}$$

Esercizio 48

Calorimetria e potenza elettrica - Simile al secondo compitino, 5 giugno 2017

Come al solito la vostra coinquilina è andata a fare la doccia ed ha consumato tutti e 20 i litri di acqua calda del boiler (scaldabagno) che avete in bagno. Sapendo (c'è scritto sotto) che la potenza del boiler è di 1200 W, quanti minuti dovete aspettare prima che l'acqua in esso contenuta si sia nuovamente scaldata dai 20° C dell'acqua (fredda) della rete idrica ai 60° C per una doccia ottimale? Purtroppo il boiler ha qualche anno e il tempo effettivo che dovete aspettare si rivela essere addirittura un'ora; questo perché la serpentina che fa da resistenza interna al boiler e che permette di riscaldare l'acqua per effetto Joule si è deteriorata ed ha modificato il suo valore di fabbrica. Stimare (nell'attesa della doccia) quanto valeva originariamente questa resistenza interna ed invece quanto vale adesso.

Ripetendo questa routine ogni sera, quanti soldi dovrete chiedere a fine mese alla coinquilina per pagare la bolletta dell'energia elettrica, sapendo che il costo dell'energia è di circa 10 centesimi il chilowattora (kWh)?

Richiami di teoria: potenza elettrica

In questo problema, che mescola calorimetria ed elettrodinamica, il calore (energia) necessario a scaldare l'acqua viene fornito da una *resistenza elettrica* percorsa da corrente. Per risolvere il problema è necessario quindi legare la potenza che serve a scaldare l'acqua nel tempo richiesto con le proprietà elettriche dello scaldabagno (la sua resistenza) e quelle della rete elettrica che lo alimenta. Richiamiamo brevemente il significato dei termini appena menzionati.

La *forza elettrica* che si esercita tra una *carica elettrica* q_1 ed una seconda q_2 (misurate nel SI in *Coulomb*: C) posta nella posizione $\vec{r}$ rispetto alla prima, assumendo entrambe le cariche ferme e di dimensioni piccole rispetto alle scale del problema, è data dalla Legge di Coulomb:

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

ed è *repulsiva* (col verso dato dal versore $\hat{r}$) se le due cariche hanno segno concorde e *attrattiva* (verso $-\hat{r}$) viceversa. La *costante elettrica* $k_e \simeq 8.9 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. Questa *forza posizionale* è facile convincersi che è anche *conservativa* (si riveda la discussione contenuta nell'Esercizio 21), per cui il lavoro necessario a spostare una carica può essere espressa anche per mezzo di una *variazione di energia potenziale elettrica*:

$$L = -\Delta U_e.$$

Si ricordi la convenzione con la quale è stata introdotta ΔU. Dal precedente, risulta conveniente introdurre il concetto di *potenziale elettrico*, o meglio di *differenza di potenziale elettrico* (ddp), come il lavoro necessario a spostare una carica elettrica unitaria:

$$\Delta U_e = q \cdot \Delta V.$$

Se misuriamo l'energia in Joule e la carica in Coulomb, il potenziale elettrico si misurerà in J/C = Volt (abbreviato in V); *un Volt è la differenza di potenziale tra due punti se per portare una carica elettrica di −1 C da uno a l'altro è necessario compiere un lavoro di 1 J* (si ricordi la convenzione sui segni: $L = -\Delta U_e = -q \cdot \Delta V$). Spesso, soprattutto nelle applicazioni domestiche, si considera come potenziale di riferimento quello "di terra", posto uguale a zero, e tutte le ddp scritte come potenziali V misurati rispetto a questo.

La forza elettrica farà muovere le cariche; il potenziale elettrico (o per meglio dire la ddp) serve a fornirci una descrizione di ciò in modo analogo a come abbiamo fatto in Meccanica col metodo dell'energia.

Dato un conduttore elettrico, come un filo di rame, possiamo definire in modo operativo la *corrente elettrica* come la carica totale che passa attraverso una sezione di questo in un intervallo di tempo infinitesimo:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

In condizioni stazionare:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Notare l'analogia con le definizioni di *velocità istantanea* e *velocità media*. L'unità di misura standard nel SI della corrente è l'*Ampère*: 1 A = 1 C/1 sec.

Per far circolare corrente è necessario vincere la *resistenza* offerta dal materiale attraversato al passaggio delle cariche. Si definisce quindi la *resistenza elettrica* R dalla relazione:

$$\Delta V = R \cdot I$$

e si misura in *Ohm*: *un Ohm (*1 Ω*) è la resistenza che offre un conduttore al passaggio di una corrente di 1 A tra una ddp di 1 V.* Ricordando quanto appena detto nella scelta del potenziale di terra come riferimento, nella precedente definizione possiamo omettere la Δ e la dicitura "differenza di" in riferimento al potenziale.

Quindi, per far circolare corrente, ossia per trasportare una carica Δq attraverso un potenziale V in un tempo Δt, è necessario applicare una *Potenza* (*Lavoro nell'intervallo di tempo*):

$$\begin{aligned} P = \frac{\Delta U_e}{\Delta t} = \frac{\Delta q \cdot V}{\Delta t} &= I \cdot V \\ &= \frac{V^2}{R} \\ &= R \cdot I^2. \end{aligned}$$

Soluzione

La prima parte del problema è identica a situazioni già descritte nei precedenti problemi di calorimetria; per portare 20 litri ($m = 20$ kg) di acqua dalla temperatura iniziale $T_i = 20°$ C alla temperatura finale $T_f = 60°$ C è necessario fornire un calore:

$$\begin{aligned} Q &= c\,m\Delta T = c\,m\big(T_f - T_i\big) \\ &= 4186\ \mathrm{J/°K{\cdot}kg} \cdot 20\ \mathrm{kg}\,40°\ \mathrm{K} \\ &= 3348.8\ \mathrm{kJ}. \end{aligned}$$

Questo calore ci viene fornito dal boiler, attraverso la sua resistenza interna che, percorsa da corrente, dissipa una potenza $P = 1200$ W per *effetto Joule*, trasferendola all'acqua che in questo modo viene riscaldata. Per ottenere il tempo impiegato a raggiungere la temperatura desiderata dobbiamo richiamare la definizione di potenza come quantità di energia (trasferita) nell'unità di tempo:

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx \frac{Q}{t}, \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{Q}{P} = \frac{3348.8\ \mathrm{kJ}}{1.2\ \mathrm{W}} \simeq 2790\ \mathrm{sec} \simeq 46\ \mathrm{min}.$$

Stando a quanto riportato sotto al boiler, dovremo quindi aspettare ben 46 minuti, circa *tre quarti d'ora*, prima di poterci andare a fare noi la doccia dopo la coinquilina.

Come descritto nel testo, l'attesa risulta anche più lunga poiché la resistenza interna del boiler si è deteriorata. Tramite le equazioni descritte nel richiamo di teoria ad inizio esercizio, iniziamo col calcolare la *resistenza interna* R che doveva avere originariamente il boiler. Ricordando che quest'ultimo è allacciato alla rete elettrica, e pertanto la tensione alla quale lavora è $V = 220$ V, abbiamo la relazione:

$$P = \frac{V^2}{R}, \qquad \text{per cui:} \qquad R = \frac{V^2}{P} \simeq 40.3\ \mathrm{Ohm}.$$

Impiegando più tempo del previsto a scaldare l'acqua per la doccia significa che la sua potenza, P' (con l'apice "$'$" per distinguerla da quella nominale), è diminuita; si ricordi la proporzionalità inversa tra t e P:

$$P' = \frac{Q}{t'}.$$

[Q ovviamente è lo stesso, quello necessario a scaldare i 20 litri di acqua come richiesto] Possiamo legare il precedente alla nuova resistenza interna R' (la tensione di rete è sempre la stessa):

$$P' = \frac{V^2}{R'} = \frac{Q}{t'}, \qquad \boxed{R' = \frac{V^2}{Q}t' = \frac{R}{t}t'}$$

Inserendo i dati otteniamo che la nuova resistenza interna del boiler, dopo lunghi periodi di utilizzo e gli effetti dovuti all'invecchiamento ed il deterioramento, è $R' \simeq \frac{4}{3}R \simeq 53$ Ohm.

Come calcolato nel primo punto, ad ogni doccia viene convertita in calore un energia derivante dalla rete elettrica pari (trascurando perdite e dissipazioni varie) a: $Q \simeq 3348.8$ kJ. Su la coinquilina fa la doccia tutti i gironi, svuotando completamente il boiler ogni volta, a fine mese (30 giorni) è stata consumata un'energia pari a:

$$E_{\mathrm{mese}} = 30 \times Q \simeq 100,5 \times 10^3 \mathrm{kJ}.$$

Tale quantità va convertita nell'unità di misura (un po' cacofonica) dei chilowattora:

$$1\ \mathrm{kWh} = 1\ \mathrm{kW} \cdot 1\ \mathrm{h} = 1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{sec}} 3600\ \mathrm{sec} = 3.6 \times 10^3 \mathrm{kJ}.$$

Quindi, l'energia elettrica consumata in docce in un mese equivale a $E_{\text{mese}} \simeq 27.9$ kWh, per una spesa in bolletta di circa 2 euro e 79 centesimi. Morale della storia, farsi la doccia ogni giorno ed essere puliti non costa (direttamente) denaro ma solo tempo.

Esercizio 49

Calorimetria e potenza elettrica - Secondo compitino, 5 giugno 2017

Quant'è il valore del campo magnetico a 10 cm di distanza da un lungo filo diritto percorso da una corrente di 10 milliAmpere?

Soluzione

Work in progress!