Prova scritta di Fisica per il cds in Farmacia - Soluzione dettagliata

Secondo appello di Febbraio 2018

1. *Nelle equazioni seguenti x è una lunghezza, t un tempo e v una velocità.*
   Quali sono le dimensioni delle costanti C_1 e C_2?
   a) $v^2 = 2C_1x$
   b) $x = C_1 \cos\big(C_2t\big)$
   c) $C_1v = x/\big(2C_1t\big) + C_2(v/t)$

   Soluzione: Alcune delle precedenti equazioni posso essere analizzate dimensionalmente semplicemente per analogia con formule note. Per esempio, il membro a destra della (a) ricorda il lavoro fatto da una forza costante, "forza per spostamento", e quello a sinistra la tipica dipendenza della velocità al quadrato dell'energia cinetica. Quindi la (a) può esser semplicemente confrontata con $\frac{1}{2}mv^2 = mg\,h$, che dà la velocità di un oggetto in caduta da altezza h (che corrisponde alla x dell'equazione da analizzare). Eliminando quindi le masse da entrambi i membri, e moltiplicando per 2, otteniamo proprio $v^2 = 2g\,h$. Essendo x e h due lunghezze, è immediato concludere che C_1deve avere le stesse dimensioni di g, ossia una "lunghezza fratto un tempo al quadrato": $[C_1] = [L]\cdot[T]^{-2}$. Più formalmente, uno avrebbe potuto risolvere direttamente l'equazione dimensionale:

$$\begin{aligned} \big[v^2\big] &= \big[2C_1x\big] \\ [L]^2\cdot[T]^{-2} &= [C_1]\cdot[L] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{[C_1] = [L]\cdot[T]^{-2}} \end{aligned}$$

   La (b) invece ricorda la legge oraria di un *moto armonico*: $x(t) = A\cos\omega t$. Per similitudine possiamo quindi concludere che l"'ampiezza" C_1 deve avere le stesse dimensioni di x, ed essere quindi una lunghezza, $[L]$, mentre le dimensioni di C_2 devono essere quelle della velocità angolare ω, ossia $[T]^{-1}$ (Hertz). Formalmente, essendo presente la *funzione trascendete* $\cos(C_1t)$, l'analisi dimensionale andrà fatta imponendo che l'argomento di questa sia adimensionale, ossia:

$$[x] = \big[C_1\cos\big(C_2t\big)\big] \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} [x] = [C_1] \\ 1 = [C_2]\cdot[t] \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{matrix} C_1 = [L] \\ C_2 = [T]^{-1} \end{matrix}}$$

   Purtroppo la (c) è di più difficile riconoscimento tra le formule note e l'unico modo per risolverla è procedere formalmente con l'analisi dimensionale:

$$\begin{aligned} [C_1v] &= \left[\frac{x}{2C_1t} + C_2(v/t)\right] \\ [C_1]\cdot[L][T]^{-1} &= [L]\cdot[C_1]^{-1}[T]^{-1} + [C_2]\cdot[L][T]^{-2} \end{aligned}$$

   che semplificando (eliminiamo il fattore comune $[L][T]^{-1}$) diventa:

$$[C_1] = [C_1]^{-1} + [C_2]\cdot[T]^{-1}.$$

   Osservando la precedente possiamo concludere che l'unico modo per cui C_1 abbia le stesse dimensioni del suo inverso è che sia un *numero puro*, e abbia quindi dimensione zero: $[C_1] = 1$. In questo modo rimane $1 = [C_2][T]^{-1}$, e quindi:

$$\boxed{\begin{matrix} [C_1] = 1 \\ [C_2] = [T] \end{matrix}}$$

2. *Una centrifuga ha un braccio lungo 50 cm e ruota con frequenza di 5 Hz. Quanto vale l'accelerazione centripeta all'estremità del braccio? Se la lunghezza del braccio è dimezzata ma la velocità dell'estremità del braccio rimane la stessa, qual è la frequenza della centrifuga?*

Soluzione: Come evidente dal testo, si tratta di un esercizio di Cinematica sul *moto circolare uniforme* nel quale è richiesto di confrontare l'accelerazione centripeta con la frequenza di rotazione ed il raggio della circonferenza, cioè il braccio della centrifuga. La relazione tra queste tre grandezze è data da:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r = (2\pi f)^2 r = 4\pi^2 f^2 r,$$

dove $\omega = 2\pi f$ [rad/sec] è la *velocità angolare*. Inserendo i dati nella precedente equazione, e facendo le dovute conversioni di unità di misura, otteniamo:

$$\boxed{a \simeq 493.5 \text{ m/s}^2}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta richiamare la relazione tra velocità, raggio e frequenza nel moto circolare uniforme, implicitamente già contenuta nell'equazione scritta sopra. Ricordando che la frequenza è uguale all'inverso del tempo impiegato a percorrere la circonferenza, e che quest'ultimo è uguale semplicemente allo spazio percorso ($2\pi r$) diviso per la velocità (in modulo) costante col quale è stato percorso, otteniamo:

$$f = \frac{v}{2\pi r}.$$

Quindi, lasciando v immutato ma dimezzando r la *frequenza raddoppia*, infatti:

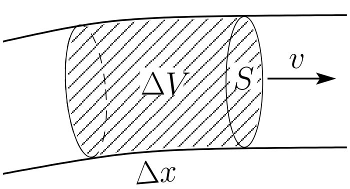
$$r \to r/2 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{v}{2\pi r} \to \frac{v}{2\pi\, r/2} = \frac{2v}{2\pi r} = 2f,$$

quindi:

$$\boxed{f = 10 \text{ Hz}}$$

3. *In un adulto a riposo la velocità media del sangue attraverso l'aorta è $v = 30$ cm/sec e la portata è 5.4 litri al minuto. Se si assume che aorta, arterie e capillari abbiano sezione circolare, qual'e' il raggio dell'aorta (in mm)? Se la sezione totale di tutte le arterie è 20 cm^2, qual'è la velocità del sangue nelle arterie (in cm/sec)?*

Soluzione: In questo problema è richiesto di legare la portata del sangue al raggio dell'aorta nella quale scorre. Richiamando la definizione di portata, come volume (ΔV) di fluido che scorre nell'unità di tempo (Δt), e considerando dei vasi sanguigni di sezione circolare $S = \pi r^2$, abbiamo:



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta x \cdot S}{\Delta t} = v \cdot S = v \cdot \left(\pi r^2\right).$$

Risolviamo quindi per trovare r:

$$r = \sqrt{\frac{\Delta V}{\Delta t}\frac{1}{v\pi}}$$

ed inseriamo i dati, convertendo 5.4 litri al minuto in unità standard, 5.4 dm^3/60 sec = 9×10^{-5} m^3/sec, per ottenere:

$$\boxed{r \simeq 3.09 \times 10^{-3}\ \text{m} = 3.09\ \text{mm}}$$

Dall'aorta, il sangue viene portato alle varie arterie; in condizioni normali (niente emorragie o trasfusioni in corso) la *portata*, cioè il volume di sangue che scorre nell'unità di tempo, deve essere lo stesso nell'aorta e nelle arterie, ed è quanto fornito nel testo del problema. Conoscendo la sezione totale di queste ultime è immediato ricavare dalla definizione di portata scritta sopra la velocità media del sangue nelle arterie:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = v \cdot S, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{1}{S}\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4.5\ \text{cm/sec}}$$

4. *A basse temperature il calore specifico dei metalli può essere espresso come $c = kT^3$, dove T è la temperatura in gradi Kelvin. Per il rame $k = 2.8 \times 10^{-6}$ cal/g °K^{-2}. Quanto calore è necessario per scaldare 15 grammi di rame da 5° K a 10° K?*

Soluzione: Si tratta di un problema di calorimetria. Generalmente, quando i calori specifici sono costanti, per calcolare il calore necessario ad aumentare di ΔT la temperatura di un corpo di massa m è necessario fornire un calore

$$Q = cm\Delta T.$$

In questo caso però il calore specifico non è costante, $c = c(T) = kT^3$, e la precedente equazione non sarà valida. Tuttavia possiamo pensare di considerare variazioni di temperatura ΔT_i talmente *piccole* che il calore specifico è rimasto pressoché costante, e sommare per ciascuna di queste per ottenere il calore totale:

$$Q = \sum_i c(T_i) m\, \Delta T_i.$$

Considerando intervalli infinitesimi, $\Delta T \to dT$, e sommandone un numero infinito, quello che abbiamo descritto non è altro che la definizione di *integrale di Riemann*:

$$Q = \sum c(T) m\, \Delta T \quad \to \quad Q = \int_{T_i}^{T_f} c(T) m\, dT.$$

Quindi, per calcolare il calore totale necessario per far passare 15 g di rame da $T_i = 5$°K a $T_f = 10$°K dobbiamo sostituire l'espressione funzionale del calore specifico $c(T)$ data nell'enunciato del problema e calcolarne l'integrale, come scritto sopra:

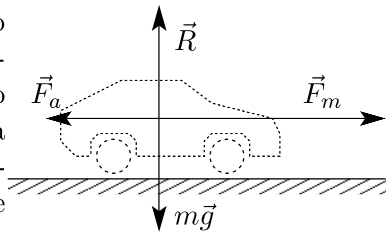
$$Q = \int_{T_i}^{T_f} c(T) m\, dT = \int_{T_i}^{T_f} kmT^3 dT = km\left[\frac{1}{4}T^4\right|_{T_i}^{T_f} = \frac{1}{4}km\left(T_f^4 - T_i^4\right).$$

Sostituendo i dati forniti dal problema otteniamo:

$$\boxed{Q \simeq 0.197\ \text{cal}}$$

5. *Un auto di massa 800 kg parte da ferma e si muove spinta da un motore che le imprime una forza costante di 2000 N. Il coefficiente di attrito delle ruote con la strada è costante e vale 0.10. Si calcoli quanta strada compie l'auto per raggiungere la velocità di 100.8 km/h. Quanto lavoro ha fatto il motore per raggiungere questa velocità?*

<u>Soluzione</u>: In questo tipo di problemi di Dinamica, in cui è richiesto di studiare il moto di un corpo sul quale agiscono più forze, la prima cosa da fare è sempre quella di disegnare il *diagramma di corpo libero* dell'oggetto sul quale sono applicate le forze, e calcolarne la risultante: vedi disegno a destra. Verticalmente agisce la forza peso, $m\vec{g}$ e la reazione vincolare della strada $\vec{R}$; le due sono tali da annullarsi e quindi la macchina procede orizzontalmente senza "sprofondare" o "volare". Orizzontalmente invece agiscono la spinta del motore in avanti, $\vec{F}_m$ e l'attrito, $\vec{F}_a$ in direzione opposta.



Prendendo un sistema di riferimento con un asse orizzontale e il verso dato dal moto dell'auto, possiamo scrivere l'equazione del moto lungo questo come:

$$ma = F_m - F_a$$

ma ricordando come è legata la forza di attrito alla forza peso dell'auto, $F_a = \mu mg$, dove $\mu = 0.10$ è il coefficiente di attrito tra ruote e strada, otteniamo:

$$ma = F_m - \mu mg, \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{F_m}{m} - \mu g.$$

Quindi l'auto si muoverà di *moto rettilineo uniformemente accelerato* con accelerazione data da quanto scritto sopra. Per sapere quanta strada compie la macchina prima di raggiungere la velocità finale $v = 100.8$ km/h possiamo risolvere la ben nota legge oraria del moto uniformemente accelerato e la relazione che lega a a v,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}at^2 \\ a = \frac{v}{t} \end{cases}$$

per eliminare la dipendenza dal tempo e trovare lo spazio percorso in funzione di a e di v. Il calcolo è immediato e porta a:

$$x = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}.$$

Il precedente risultato poteva essere ottenuto anche per mezzo dell'*equazione delle forze vive* (o *Teorema dell'energia cinetica*) legando la variazione di energia cinetica al lavoro della forza (costante) che l'ha prodotta:

$$\Delta K = L$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = ma\,x \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}.$$

sostituendo l'espressione per a trovata prima ed i dati del problema otteniamo:

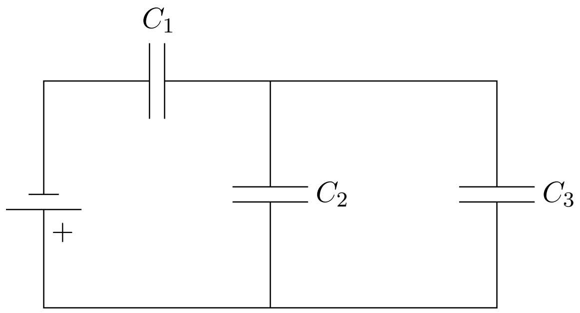
$$\boxed{x = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{F_m - \mu mg} \simeq 258 \text{ m}}$$

Il lavoro fatto dal motore sarà dato dal prodotto della forza (costante) fatta dal motore (e NON della risultante delle forze!) per lo spostamento:

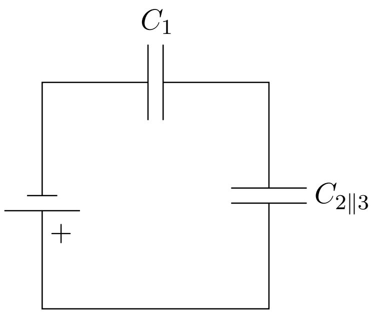
$$\boxed{L_m = F_m \cdot x \simeq 516 \text{ kJ}}$$

Notare che questo lavoro è maggiore di quello totale fatto sull'automobile in quanto, oltre a F_m, agisce in direzione opposta la forza di attrito, che quindi fa un lavoro negativo.

6. *Tre condensatori sono collegati come in figura. $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$ e $C_3 = 5\ \mu F$. Qual è la capacità equivalente dei condensatori? Se la batteria esercita una ddp di 12 V e la ddp ai capi di C_3 è 4 V, quanta carica si accumula su ciascun condensatore?*



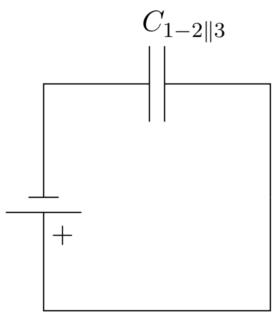
Soluzione: Per risolvere il circuito basta osservare che li condensatori C_2 e C_3 sono posti in *parallelo*, ossia la tensione ai loro capi è la stessa. Quindi il circuito equivalente a quello mostrato in alto è il seguente:



dove $C_{2\|3}$ è la *capacità equivalente* al parallelo di C_2 e C_3. Per trovare il suo valore, basta osservare che la carica totale immagazzinata dai due è la somma delle cariche sui singoli condensatori, e quindi:

$$C_{2\|3} \cdot V = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V,$$
$$\Rightarrow \quad C_{2\|3} = C_1 + C_2.$$

Nel precedente circuito equivalente C_1 si troverà in *serie* a $C_{2\|3}$ poiché saranno attraversate dalla stessa corrente. La ddp prodotta dal generatore V sarà la somma di quella ai capi di C_1, che chiameremo V_1, e di quella ai capi del parallelo $C_{2\|3}$, V_{23}. Il relativo circuito equivalente sarà il seguente:



Inoltre, essendo il circuito globalmente neutro, le cariche che si troveranno su ciascuna armatura saranno (in modulo) le stesse: Q. Sfruttando queste considerazioni possiamo quindi ottenere la capacità equivalente alla serie di C_1 e $C_{2\|3}$:

$$V = V_1 + V_{23}$$
$$\frac{Q}{C_{1-2\|3}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_{2\|3}}$$

quindi:

$$C_{1-2\|3} = \frac{C_1 C_{2\|3}}{C_1 + C_{2\|3}} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata sostituita l'espressione della capacità equivalente al parallelo di C_2 e C_3. Sostituendo i numeri forniti dal problema otteniamo:

$$\boxed{C_{1-2\|3} = 2\ \mu\mathrm{F}}$$

Per ottenere la carica su ciascuna lastra delle capacità basta moltiplicare il precedente risultato per la ddp del generatore di tensione:

$$\boxed{Q = V \cdot C_{1-2\|3} = 30\ \mu\mathrm{C}}$$