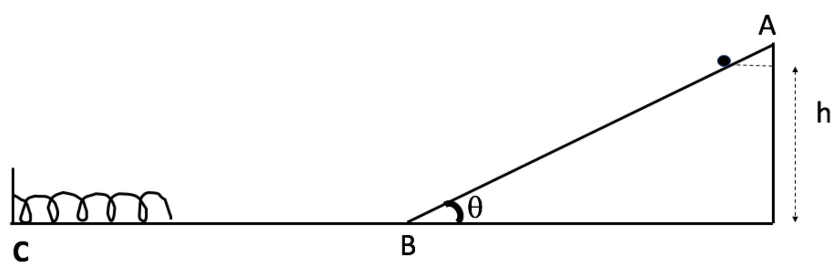
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 2/02/2018
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Con riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m = 0.2\ kg$ è posto su di un piano inclinato scabro di coefficiente d' attrito dinamico μ_d che forma con il piano orizzontale un angolo $\theta = 30^0$. Il punto materiale, partendo da fermo da una altezza $h = 0.8\ m$ rispetto al piano orizzontale, scende lungo il piano inclinato che si raccorda con un piano orizzontale liscio. Alla fine del piano orizzontale, il punto materiale si attacca ad una molla posta inizialmente nella sua posizione di riposo ed inizia un moto di oscillazione. Il moto di oscillazione avviene sul piano orizzontale che è privo di attrito. La molla ha massa nulla. Durante il moto di oscillazione la molla viene compressa di una lunghezza massima pari a $x_{max} = 0.2\ m$ e il periodo di oscillazione del sistema è T=1 s.
Si calcoli:

1. la costante elastica K della molla
   $K =$ ....

2. l'accelerazione massima a_{max} e la velocità massima v_{max} del moto di oscillazione
   $a_{max} =$ .... $v_{max} =$ ....

3. il coefficiente di attrito dinamico μ_d esistente tra punto materiale e piano inclinato
   $\mu_d =$ ....

Soluzione Esercizio 1

1. Ricordiamo che $\frac{K}{m} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ per cui

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 7.9\ N/m$$

2. L'accelerazione massima si ha nel punto di massima ampiezza, che corrisponde alla forza massima $ma_{max} = Kx_{max}$ per cui:

$$a_{max} = \frac{Kx_{max}}{m} = 7.9\ \frac{m}{s^2}$$

La massima velocità si ha quando l'energia cinetica è massima, cioè quando l'energia potenziale della molla è nulla, quindi quando l'elongazione della molla è nulla, essa è inoltre minima (nulla) per l'elongazione massima della molla. Per la conservazione dell'energia vale $\frac{1}{2}Kx_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$, dalla quale:

$$v_{max} = x_{max}\sqrt[2]{\frac{K}{m}} = \omega x_{max} = 1.26\ m/s$$

3. La somma del lavoro compiuto dalla forza di gravità e del lavoro compiuto dalla forza di attrito nel tratto AB è data da:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - \mu_d mgcos\theta\frac{h}{sin\theta}$$

Inoltre quando la molla raggiunge la massima compressione tutta l'energia cinetica del punto materiale è stata convertita in energia potenziale del sistema molla più punto materiale per cui:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

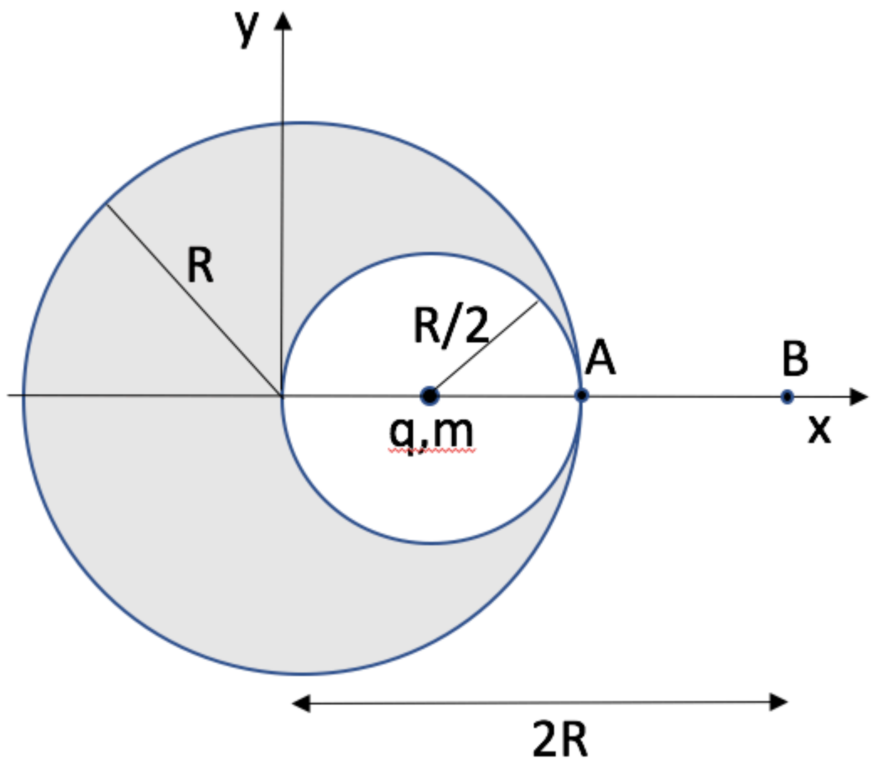
Sfruttando le ultime due equazioni e ricordando che v_A è nulla:

$$\frac{1}{2}Kx_{max}^2 - mgh = -\mu_d mgcos\theta\frac{h}{sin\theta} = -\mu_d\frac{mgh}{tg\theta}$$

dalla quale

$$\mu_d = tg\theta\left(1 - \frac{Kx_{max}^2}{2mgh}\right) = 0.52$$

Esercizio 2



Una sfera di raggio R ha una distribuzione di carica ρ_0 uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio $R/2$. Assumendo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate $(0,0,0)$, Il centro del foro ha coordinate $(R/2,0,0)$. Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica q e massa m.

Con riferimento alla figura, e sapendo che $\rho_0 = 1\ \mu C/m^3,\ R = 1\ m,\ q = 1\ \mu C$, e $m = 10^{-6}\ kg$:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava$\left(\overrightarrow{E}\right)$ e il suo modulo $\left(|\overrightarrow{E}|\right)$ all'interno del foro
   $\overrightarrow{E} =$ .... $|\overrightarrow{E}| =$ ....
2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate $(R,0,0)$ sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava
   $t =$ ....
3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate (2R,0,0)
   $v =$ ....

Soluzione Esercizio 2

1. La sfera con il foro è equivalente al sistema composto da una sfera piena di raggio R con densità di carica ρ_0 e una sfera di raggio $R/2$ con densità di carica $\rho_s = -\rho_0$. Per il principio di sovrapposizione, in ogni punto il campo risultante è la somma del campo elettrico dovuto alla cavità ($\overrightarrow{E_c}$) con centro in (R/2,0,0) e alla sfera piena ($\overrightarrow{E_s}$) con centro in (0,0,0). Il campo per una distribuzione di carica a simmetria sferica di di densità ρ e raggio R, può essere determinato utilizzando il il teorema di Gauss. Per $r < R$, quando il punto è interno alla generica sfera : $E(r)4\pi r^2 = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0$; $E(r) = \rho r/3\epsilon_0$. Per $r \geq R$, quando il punto è esterno alla sfera: $E(r)4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 = \rho 4\pi R^3/3\epsilon_0$; $E(r) = \rho R^3/3r^2\epsilon_0$. In entrambe le situazioni le linee di campo sono dirette radialmente con verso entrante se la densità di carica è negativa e verso uscente se la densità di carica è positiva.
   Nel nostro caso per un generico punto:
   $$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_c} + \overrightarrow{E_s}$$
   Per un punto all'interno del foro il punto è interno sia alla sfera piena sia alla sfera associata alla cavità. Indicando con $\overrightarrow{r}$ il vettore posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano del testo dell'esercizio (che coincide con il centro della sfera) avremo per la sfera piena, $E_s(r)4\pi r^2 = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0$; per cui:
   $$\overrightarrow{E}_s(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\widehat{r}$$
   Per la cavità indicando con $\overrightarrow{r'}$ il vettore posizione rispetto al centro della cavità avremo, con riferimento alla figura:
   $$\overrightarrow{E}_c(r') = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\widehat{r'}$$
   con $r'\widehat{r'} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}$, dove $\overrightarrow{d}$ è il vettore che punta dall'origine degli assi cartesiani al centro della cavità. Per cui il campo elettrico all'interno del foro è dato da:
   $$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_c} + \overrightarrow{E_s} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{d} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R}{2}\widehat{x}$$
   mentre il modulo del campo elettrico è dato da:
   $$|\overrightarrow{E}| = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R}{2} = 1.9 \times 10^4 \ V/m$$

2. Essendo il campo elettrico uniforme nel foro, la particella si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a diretta lungo x, in modulo pari ad:
   $$a = qE/m = \frac{q}{m}\frac{\rho R}{6\epsilon_0}$$
   Essendo la velocità iniziale nulla e il moto uniformemente accelerato lungo x, lo spazio percorso per arrivare in A è pari a R/2 e $R/2 = \frac{1}{2}at^2$ Pertanto il tempo che impiega ad arrivare in A è dato da:
   $$t = \sqrt[2]{\frac{R}{a}} = \sqrt[2]{\frac{6\epsilon_0 m}{\rho q}} = 7,3 \ ms$$

3. Dal teorema del lavoro, essendo la velocità iniziale della particella nulla:
   $$L = q\left(V(R/2) - V(2R)\right) = \frac{1}{2}mv^2(2R)$$
   da questa relazione si può calcolare la velocità $v(2R)$. Essendo:
   $$V(R/2) - V(2R) = \int_{R/2}^{R} E dx + \int_{R}^{2R} E_{ext}(x)dx$$
   dove il campo nel foro, E, è quello calcolato nella domanda precedente. All' esterno del foro, per $x > R$, la distribuzione complessiva di carica si comporta come una coppia di cariche, q_1 in x = 0 e q_2 in $x = R/2$, con:
   $$q_1 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = 4.2 \times 10^{-6} \ C \quad e \quad q_2 = -\rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = -5.2 \times 10^{-7} \ C$$

Per cui la differenza di potenziale richiesta è data da:

$$V(R/2) - V(2R) = E\frac{R}{2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R - \frac{R}{2}} - \frac{1}{2R - \frac{R}{2}}\right) = 22\ kV$$

Pertanto , la velocità finale è data da:

$$v(2R) = \sqrt[2]{\frac{2q}{m}\left(V(R/2) - V(2R)\right)} = 210\ m/s$$