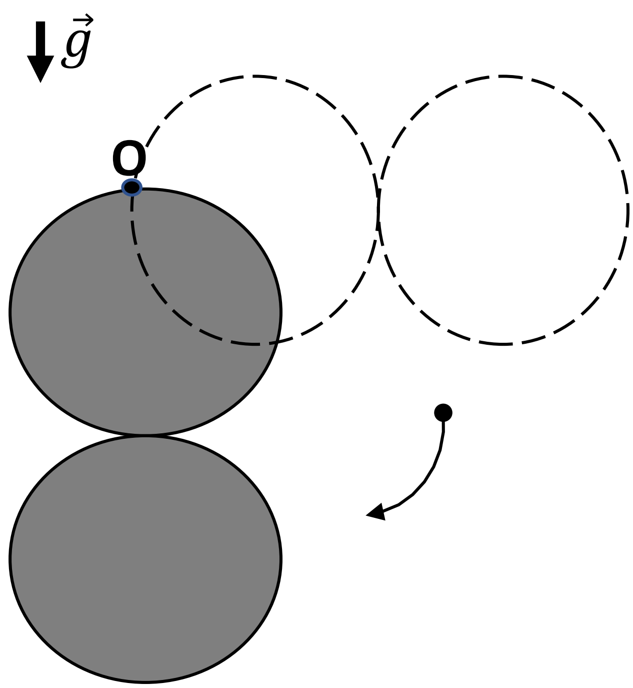
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 20/02/2018
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Due dischi (vedi figura) sono uniti sul bordo e costituiscono un sistema rigido che sospeso all'estremo O può ruotare attorno ad O senza attrito. La rotazione avviene nel piano della figura. I due dischi hanno stessa massa m, ($m = 700\ g$) e raggio R. Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno al punto O vale $T = 1.3\ s$.

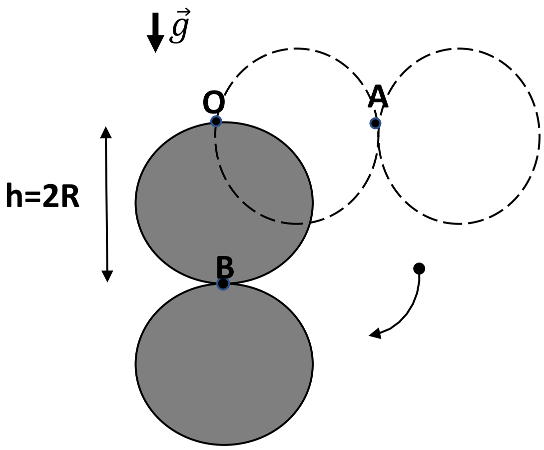
1. Esprimere il momento di inerzia totale del sistema dei due dischi, I, rispetto ad O in funzione del raggio R dei dischi
   $I =$ ....

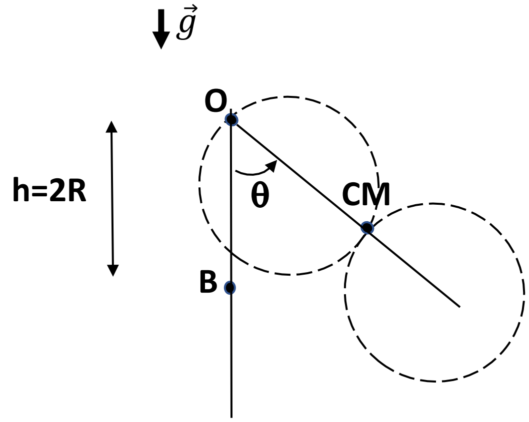
2. Calcolare il raggio dei dischi
   $R =$ ....

3. Il sistema viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla dalla posizione in cui il punto di contatto tra i due dischi è allineato orizzontalmente con il punto O (vedi figura). Determinare la velocità angolare, ω, e il modulo della reazione del perno, $|\vec{R}_p|$, nella posizione del sistema in cui la velocità del centro di massa è massima:
   $\omega =$ .... $|\vec{R}_p| =$ ....

Si assuma $g = 9.8\ m/s^2$.

Soluzione Esercizio 1





1. Il sistema costituisce un pendolo fisico con il centro di massa (CM) nel punto di contatto tra i dischi. Il momento di inerzia del disco 1 rispetto ad O (usando il teorema di Huygens-Steiner) è dato da:

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

mentre per il disco 2:

$$I_2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\,(3R)^2 = \frac{19}{2}mR^2$$

Per cui il momento di inerzia totale espresso in funzione di R è dato da:

$$I = I_1 + I_2 = 11mR^2$$

2. Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema puó essere ricavato utilizzando la conservazione dell'energia. Infatti :

$$costante = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh(1 - cos(\theta))$$

dove il primo termine dopo il segno di uguaglianza indica l'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido e il secondo termine l'energia potenziale del CM. M=2m è la massa del corpo rigido, h=2R indica la distanza dal centro di massa da O e θ indica l'angolo formato dalla congiungente O e la posizione del CM in un istante arbitrario, con la congiungente O e il CM nella posizione in cui l'energia potenziale è minima, punto B. Derivando rispetto al tempo entrambi i membri otteniamo:

$$0 = \frac{1}{2}2I\omega\dot{\omega} + Mghsin(\theta)\dot{\theta} = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mghsin(\theta)\dot{\theta}$$

dividendo per $I\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$) fornisce:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}\theta = 0$$

L'equazione ottenuta per le piccole oscillazioni è quella di un moto armonico che ha pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$$

In alternativa alla conservazione dell'energia, si può utilizzare la seconda equazione cardinale. Utilizzando come polo il centro O, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}$ che tende a riportare il CM in B. Tale momento ha componente non nulla lungo l'asse ortogonale al piano (M_z):

$$M_z = I\alpha = -hMgsin(\theta)$$

Dalla quale:

$$I\ddot{\theta} + Mghsin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$), fornisce lo stesso risultato per Ω. Di conseguenza, il periodo delle piccole oscillazioni è dato da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{11mR^2}{2mg2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{11R}{4g}}$$

L'unica incognita nell'equazione del periodo T è il raggio R di entrambi i dischi, per cui R è dato da:

$$R = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{4g}{11} = 0.15\ m$$

3. Sapendo che il sistema viene lasciato cadere con velocità iniziale del CM nulla dalla posizione orizzontale (cioè dal punto A), la sua energia iniziale è solo potenziale e pari a Mgh, mentre la velocità angolare nella posizione in cui la velocità del CM è massima, si ha per $\theta = 0$, quando l'energia potenziale si annulla. Dalla conservazione dell'energia:

$$Mgh = 2mg2R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{11}{2}mR^2\omega^2$$

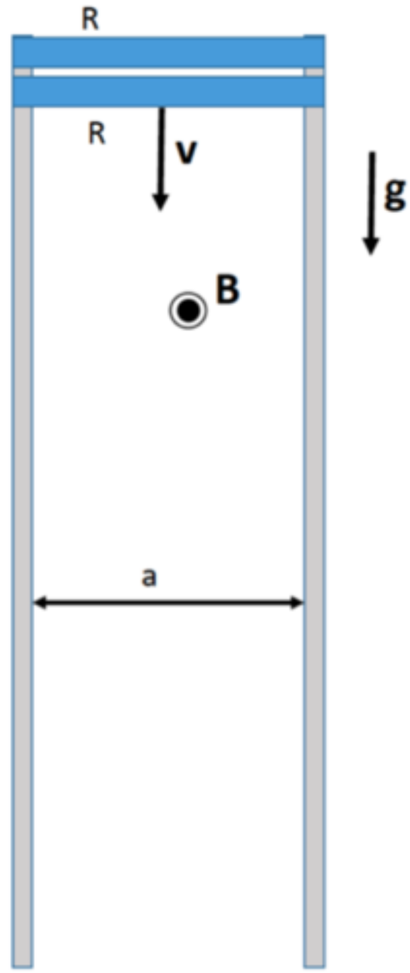
$$8g = 11R\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{11}\frac{g}{R}} = 6.9\ \frac{rad}{s}$$

con ω pari alla massima velocità angolare di rotazione attorno al centro O del sistema, quando il centro di massa occupa la posizione B (vedi figura) e il centro di massa ha la massima velocità $v = \omega 2R$. Possiamo usare la componente verticale della prima equazione cardinale per determinare il modulo della reazione del perno. Quando il CM ha la massima velocità $\theta = 0$: $R_P - Mg = M\omega^2(2R)$. per cui

$$R_P = Mg + M\omega^2(2R) = 33.7\ N$$

Esercizio 2



Il circuito di figura si trova nel piano verticale in presenza del campo gravitazionale (si assuma $g = 9.8\ m/s^2$) e di un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ costante, diretto orizzontalmente nella direzione uscente dal foglio e di intesità pari a 2 T. Le guide verticali presentano una resistenza trascurabile, mentre le sbarre orizzontali hanno entrambe lunghezza $a = 0.5$ m, resistenza $R = 20\ \Omega$ e massa $M = 20$ g. Si assuma che la barra superiore sia fissata mentre quella inferiore è libera di muoversi senza attrito lungo la direzione verticale. Al tempo $t = 0$ la sbarra inferiore inizia con velocitá nulla un moto di caduta sotto l'azione del campo gravitazionale.

1. Si scriva l'equazione del moto per la sbarra in caduta e si scriva la forma funzionale per $v(t)$, mostrando che esiste un limite asintotico v_a della velocitá per $t \to \infty$ e se ne calcoli tale valore numerico:

   $v(t) =$ .... $v_a =$ ....

2. Si calcoli nel limite di $t \to \infty$ la potenza dissipata per effetto Joule P_J :

   $P_J =$ ....

3. Sempre nel limite di $t \to \infty$, si calcoli il lavoro meccanico per unità di tempo compiuto dal campo gravitazionale P_g. Confrontate questo risultato con quello del punto 2 e commentate i due risultati.

   $P_g =$ ....

Soluzione Esercizio 2

1. Si orienti l'asse z verticalmente verso il basso con l'origine in corrispondenza della posizione iniziale della sbarra mobile. Si ha dunque $z(t=0)=0$ e $\frac{dz}{dt}(t=0)=0$. A causa del moto della sbarretta, il flusso di campo magnetico attraverso il circuito costituito dalle due sbarre e dai binari verticali cambia nel tempo. Viene quindi indotta una f.e.m. $\mathcal{E}$ che produce una corrente I il cui verso di circolazione per la legge di Lenz è orario. Utilizzando la legge di Ohm e considerando che la resistenza del circuito è pari a $2R$ si ha:
$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{2R} = \frac{1}{2R}\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{Ba}{2R}\frac{dz}{dt} = \frac{Bav(t)}{2R}. \tag{1}$$
La corrente circolante nella sbarra produce una forza magnetica agente sulla sbarra con direzione verso l'alto (tenuto conto del verso orario di I) e di modulo BIa. L'equazione del moto per la sbarra è quindi:
$$m\frac{dv}{dt} = mg - BIa = mg - \frac{B^2a^2v(t)}{2R}. \tag{2}$$
che descrive un moto di caduta frenato da una forza di attrito proporzionale alla velocitá.
La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali assegnate è data da:
$$v(t) = \tau g\big(1 - e^{-t/\tau}\big) \tag{3}$$
dove $\tau = \frac{2mR}{B^2a^2} = 0.8$ s. Il valore asintotico per la velocitá v_a, raggiunto per $t >> \tau$ è dunque pari a:
$$v_a = \tau g = 7.8\ m/s$$
La velocità limite può anche essere determinata imponendo che per t non nullo, la forza agente sulla sbarra è nulla:
$$0 = mg - BIa = mg - \frac{B^2a^2v_a}{2R}$$

2. Quando $v(t) \simeq v_a$, il corrispondente valore della corrente è $I_a = \frac{mg}{Ba} = 0.2$ A e la potenza dissipata per effetto Joule P_J vale:
$$P_J = 2RI_a^2 = \frac{2Rm^2g^2}{B^2a^2} = mg^2\tau = 1.6\ W \tag{4}$$

3. Il lavoro (positivo) per unitá di tempo P_g svolto dal campo gravitazionale è dato da:
$$P_g = mgv_a = mg\tau g = P_J \tag{5}$$
La potenza dissipata per effetto Joule è dunque uguale a quella associata al lavoro del campo gravitazionale.