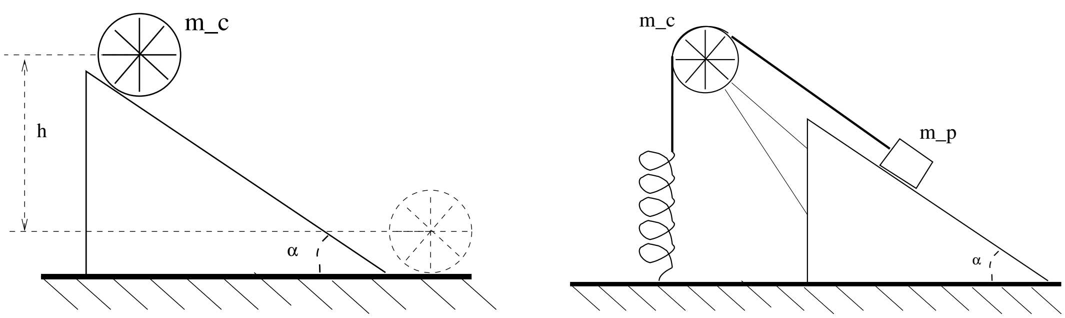
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 09/06/2017
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Una ruota di raggio $R = 30\ cm$ e massa $m_C = 2\ kg$ raggiunge la velocità $v = 4\ m/s$ scendendo di una quota $h = 1\ m$ con moto di puro rotolamento su un piano scabro, inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ e fisso, come nella figura a sinistra. Il modulo dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ vale 9.8 m/s^2.

1. Si calcoli il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro:
   $I =$ ....

La stessa ruota ed un piano fisso e questa volta liscio, inclinato dello stesso angolo α, vengono utilizzati come nella figura a destra. La ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fisso passante per il suo centro. Un filo ideale, inestensibile e privo di massa, appoggia sulla ruota e non slitta su di essa. Un estremo è collegato ad una massa $m_p = 1\ kg$ e l'altro ad una molla di costante elastica $k = 16\ N/m$ e lunghezza a riposo nulla.
Si calcoli:

2. la lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio:
   $\Delta L =$ ....

3. il periodo delle oscillazioni del sistema:
   $T =$ ....

Il sistema viene messo in oscillazione a partire dalla posizione di equilibrio e con un'ampiezza di oscillazione uguale alla lunghezza della molla all'equilibrio.

4. Trovare il valore massimo delle tensioni del filo dal lato delle molla T_{molla} e dal lato del peso T_P:
   $T_{molla,max} =$ ....
   $T_{P,max} =$ ....

Soluzione Esercizio 1

1. Per la conservazione dell'energia (l'attrito non compie lavoro visto che la ruota non striscia) si può scrivere:
$$m_C g h = \frac{1}{2} m_C v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$
inserendo la condizione di puro rotolamento $\omega = v/R$ si può ricavare:
$$I = m_C R^2 (\frac{2gh}{v^2} - 1) = 0.040\ kg\ m^2$$

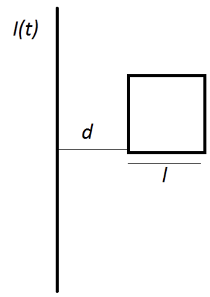
2. All'equilibrio la ruota deve avere accelerazione angolare nulla, quindi il valore delle tensioni del filo devono risultare uguali ai due lati (applicare la II Eq. cardinale alla ruota). La posizione di equilibrio è determinata dalla condizione $m_P g \sin\alpha = k\ \Delta L$, con ΔL allungamento della molla all'equilibrio:
$$\Delta L = \frac{m_P g \sin\alpha}{k} = 0.31\ m$$

3. Per semplicità si può scegliere lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione di equilibrio. Se y esprime l'allungamento aggiuntivo della molla (in verticale) rispetto alla posizione di equilibrio, in un punto generico, si noti che y risulta uguale allo spostamento della massa m_P lungo il piano inclinato (verso il basso) per l'inestensibilità del filo:
$$E_{cin} = \frac{1}{2} m_P \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$
$$E_{pot} = -m_P g y \sin\alpha + \frac{1}{2} k (y + \Delta L)^2$$
Si conserva l'energia meccanica:
$$E_{mecc} = \frac{1}{2} m_P \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - m_P g y \sin\alpha + \frac{1}{2} k (y + \Delta L)^2$$
e derivando rispetto al tempo si ha:
$$m_P \dot{y}\ddot{y} + I\omega\dot{\omega} - m_P g \dot{y} \sin\alpha + k(y + \Delta L)\dot{y} = 0$$
imponendo la condizione di puro rotolamento $\omega = \dot{y}/R$:
$$m_P \dot{y}\ddot{y} + I\dot{y}\ddot{y}/R^2 - m_P g \dot{y} \sin\alpha + k(y + \Delta L)\dot{y} = 0$$
sostituendo la condizione di equilibrio $m_P g \sin\alpha = k\Delta L$, si ottiene l'equazione del moto (armonico):
$$(m_P + \frac{I}{R^2})\ddot{y} + ky = 0$$
con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi/\Omega$ rispettivamente:
$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m_P + I/R^2}} \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_P + \frac{I}{R^2}}{k}} = 1.9\ s$$

4. Per trovare le tensioni del filo ai due lati si può scrivere per la molla e la massa m_P rispettivamente:
$$T_{molla} = k(y + \Delta L)$$
$$m_P g \sin\alpha - T_P = m_P \ddot{y}$$
La legge oraria dell'estremo della molla (imponendo la condizione iniziale $y(t = 0) = 0$ e l'ampiezza dell'oscillazione) risulta:
$$y(t) = \Delta L \sin(\Omega t)$$
Dato che $\ddot{y} = -\Omega^2 y(t)$, risulta:
$$T_P = m_P g \sin\alpha + m_P \Omega^2 y$$
Le tensioni risultano entrambe massime in corripondenza del massimo valore di $y = \Delta L$ (raggiunto dopo un tempo $\tau_{T_{molla,max}} = \tau_{T_{P,max}} = T/4$ dall'inizio dell'oscillazione):
$$T_{molla,max} = 2k\Delta L = 2m_P g \sin\alpha = 9.8\ N$$
$$T_{P,max} = m_P g \sin\alpha + m_P \Omega^2 \Delta L = m_P g \sin\alpha (1 + \frac{1}{1 + \frac{I}{m_P R^2}}) = 8.3\ N$$

Esercizio 2

Un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente continua $I_0 = 2$ A. Al tempo $t = 0$ la corrente inizia a diminuire secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ con $\alpha = 30\ \text{s}^{-1}$. A distanza $d = 50$ cm dal filo e complanare al filo si trova una spira quadrata di lato $l = 20$ cm. La spira ha resistenza $R = 5\ \Omega$, è indeformabile ed è trattenuta nella sua posizione da una forza opportuna.



1. Si calcoli in funzione del tempo e dei parametri geometrici il flusso del campo magnetico generato dal filo $\Phi(B,t)$ attraverso la superficie della spira (si trascurino fenomeni di autoinduzione)

   $\Phi(B,t)=$ ....

2. Si calcoli la la corrente I_S che circola nella spira al tempo $t = 0.2$ s

   $I_S(t)=$ ....

3. Si calcoli l'energia totale E dissipata nella spira per effetto Joule

   $E=$ ....

Soluzione Esercizio 2

1. Il campo magnetico generato dal filo a distanza r dal suo asse nella regione della spira è diretto ortogonalemtente al piano della spira e vale $B(r) = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi r}$. Pertanto il flusso del campo si scrive

$$\Phi(B,t) = \int_d^{d+l} \frac{\mu_o I(t) l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_o I(t) l}{2\pi} ln\frac{d+l}{d} = \frac{\mu_o l I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi} ln\frac{d+l}{d}$$

2. La corrente circolante nella spira si ottiene dividendo la forza elettromotrice indotta, pari alla variazione temporale del flusso del campo magnetico, per la resistenza del circuito. Pertanto

$$I_S(t) = \frac{\mu_o l I_0 \alpha e^{-\alpha t}}{2\pi R} ln\frac{d+l}{d}.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene al tempo $t = 0.2$ s

$$I_S = 0.40 \ \ \text{nA}$$

3. L'energia dissipata dalla resistenza per effetto Joule si ottiene integrando la potenza istantanea $P = RI_s(t)^2$ dal tempo zero a $t = +\infty$.

$$E = R\int_0^{\infty} I_S(t)^2 dt = \frac{1}{R}\Big(\frac{\mu_o l I_0 \alpha}{2\pi} ln\frac{d+l}{d}\Big)^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{\alpha}{2R}\Big(\frac{\mu_o l I_0}{2\pi} ln\frac{d+l}{d}\Big)^2$$

Sostituendo i valori numerici si trova $E = 2.2 \ 10^{-15}$ J.