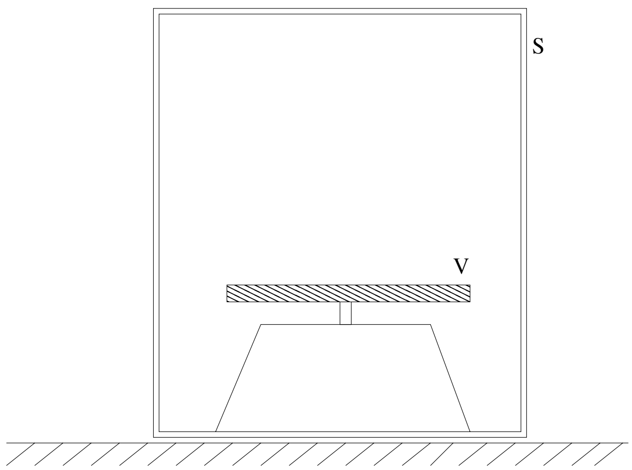
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 21/07/2017
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

In una scatola cilindrica S è fissato, solidale alla scatola, un motore elettrico sul cui asse è montato un volano V, come in figura. La scatola, inizialmente in quiete, poggia su un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo t=0 il volano è messo in rotazione con velocità angolare $\Omega_V = 5\pi$ rad/s rispetto alla scatola S. Il rapporto tra il momento d'inerzia del volano (I_V) e il momento di inerzia della scatola (I_S, che comprende anche il motore ad essa solidale) è dato da $I_V/I_S = 3/2$.



1. Si calcolino le velocità angolari ω_V e ω_S (con il relativo segno) del volano e della scatola nel riferimento solidale al piano orizzontale:
   $\omega_V =$ ....
   $\omega_S =$ ....

   Ad un certo istante, il volano viene rigidamente collegato alla scatola S per mezzo di un sistema di bloccaggio interno alla scatola stessa.

2. Quale sarà la velocità angolare finale del sistema?
   $\omega' =$ ....

3. Calcolare il lavoro fatto (con il relativo segno) dalle forze interne, necessario per bloccare il volano e renderlo solidale alla scatola (si assuma, per questo punto, che $I_S = 2\ kg \cdot m^2$):
   $L_{int} =$ ....

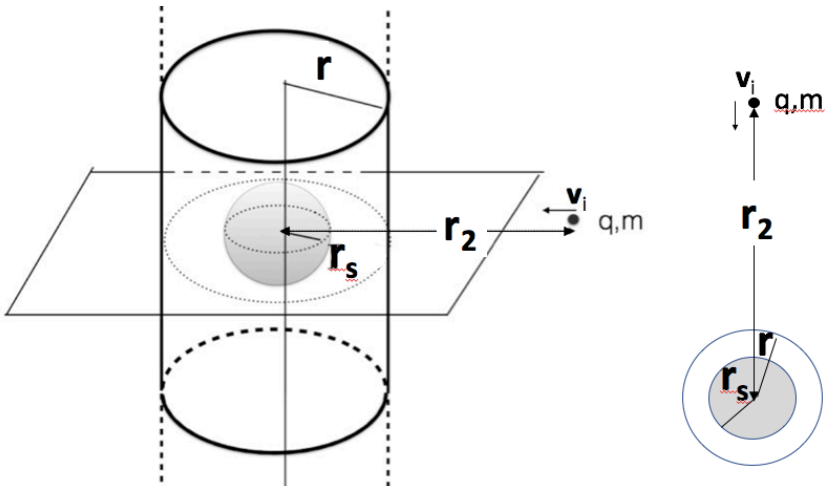
1 Soluzione Esercizio 1

1. Il sistema è soggetto solo a forze esterne che hanno direzioni verticali (i pesi e le reazioni vincolari) e la cui risultante è nulla. Si conserverà quindi la quantità di moto e il baricentro non si muoverà. In particolare l'asse di rotazione del volano, che indicheremo con asse z, che per motivi di simmetria contiene il centro di massa, dovrà rimanere fermo. Poichè il momento delle forze esterne rispetto a questo asse è nullo si conserverà anche il momento angolare. Essendo all'inizio il sistema fermo, si può scrivere:
$$L_i = 0 = L_f = I_s\omega_s + I_V\omega_V$$
dove ω_V e ω_S sono le componenti lungo z delle velocità angolari del volano e della scatola rispetto al piano. La velocità angolare del volano rispetto alla scatola S, Ω_V è un dato del problema. Nel sistema solidale al piano di appoggio (nel quale è espressa la relazione della conservazione del momento angolare) la velocità angolare ω_V è data dalla seguente relazione:
$$\omega_V = \Omega_V + \omega_S$$
dove come sopra, ω_V e ω_S sono le velocità angolari di volano e scatola rispetto al piano di appoggio. Le ultime due relazioni costituiscono due equazioni in due incognite. Da $\omega_S = \omega_V - \Omega_V$, sostituendo nella relazione della conservazione del momento angolare ω_S espressa in funzione di ω_V e Ω_V si ottiene:
$$\omega_V = \frac{I_S}{I_S + I_V}\Omega_V = \frac{1}{1+\frac{I_V}{I_S}}\Omega_V = 2\pi\ rad/s$$
Sempre dalla condizione della conservazione del momento angolare si può ricavare ω_S:
$$\omega_S = -\frac{I_V}{I_S}\omega_V = -3\pi\ rad/s$$
Ovvero la scatola ruota in senso opposto rispetto al volano.

2. Quando il sistema di ancoraggio interno collega rigidamente il volano alla scatola, la conservazione del momento angolare continua a essere valida (è una forza interna quella che ancora il volano alla scatola). Per cui, indicando con $\omega^{'}$ la velocità angolare comune di scatola e volano, la conservazione del momento angolare si esprime:
$$L_i = 0 = L_f = I_S\omega^{'} + I_V\omega^{'} = 0$$
ovvero $\omega^{'} = 0$, che vuol dire che il sistema si blocca.

3. Visto che il sistema si ferma, tutta l'energia cinetica iniziale sarà dissipata dalla forza esercitata dal sistema di connessione tra volano e scatola, ovvero (assumendo $I_S = 2\ kg \cdot m^2$)
$$L_{int} = -(\frac{1}{2}I_S\omega_S^2 + \frac{1}{2}I_V\omega_V^2) = -147.9J$$
Questa energia viene dissipata principalmente sotto forma di calore.

Esercizio 2



Un cilindro infinito di raggio $r = 20\ cm$ e carico con densità uniforme di carica $\rho = 0.2\ C/m^3$, ha al suo interno una cavità sferica di raggio $r_s = r/2$, con il centro della cavità che giace sull'asse del cilindro.
Si consideri il piano che passa per il centro della cavità ortogonale all'asse del cilindro (vedi figura).

1. Si determini l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza, r', dall'asse del cilindro su tale piano, $\overrightarrow{E}(r')$:
   $\overrightarrow{E}(r') =$ ....

2. Si calcoli modulo del campo elettrico nel punto P a distanza $r_1 = 14\ cm$ dal centro della sfera, su tale piano $|\overrightarrow{E}(r_1)|$:
   $|\overrightarrow{E}(r_1)| =$ ....

3. Una particella di massa $m = 1.5 \times 10^{-3}\ g$ e carica $q = 4\ mC$ viene lanciata su tale piano, da una distanza $r_2 = 6\ m$ verso il centro della sfera. Si calcoli il modulo della velocità, v_i, che deve avere la particella all'atto del lancio, per arrivare con velocità nulla sul bordo del cilindro:
   $v_i =$ ....

Soluzione Esercizio 2

1. Il cilindro con la cavità è equivalente al sistema composto da un cilindro pieno con densità di carica ρ ed una sfera con densità di carica $\rho_s = -\rho$. Per il principio di sovrapposizione, in ogni punto il campo risultante è la somma del campo elettrico dovuto alla sfera ($\overrightarrow{E_s}$) e al cilindro pieno ($\overrightarrow{E_c}$). In particolare per un punto che giace sul piano che passa per il centro della sfera e ortogonale all'asse del cilindro, entrambi i campi hanno linee di campo dirette radialmente, con verso entrante per la sfera ed uscente per il cilindro.
   Il campo elettrico generato da una distribuzione di carica a simmetria cilindrica può essere calcolato con il teorema di Gauss. Per il cilindro, indicando con r il raggio del cilindro, per $r' < r$, $E_c(r')2\pi r'h = \rho\pi r'^2 h/\epsilon_0$; $E(r') = \rho r'/2\epsilon_0$. Per $r' \geq r$: $E(r')2\pi r'h = \rho\pi r^2 h/\epsilon_0$; $E(r') = \rho r^2/2r'\epsilon_0$.
   In modo analogo, il campo per una distribuzione di carica a simmetria sferica di raggio r_s può anch'esso essere calcolato usando il teorema di Gauss. Quindi per la cavità, per $r' < r_s$, quando il punto è interno alla cavità: $E_s(r')4\pi r'^2 = -\rho 4\pi r'^3/3\epsilon_0$; $E_s(r') = -\rho r'/3\epsilon_0$. Per $r' \geq r_s$, quando il punto è esterno alla cavità: $E_s(r')4\pi r'^2 = Q/\epsilon_0 = -\rho 4\pi r_s^3/3\epsilon_0$; $E_s(r') = -\rho r_s^3/3r'^2\epsilon_0$.
   Per cui poichè $\overrightarrow{E}(r') = \overrightarrow{E}_c(r') + \overrightarrow{E}_s(r')$, avremo:

   - per $0 < r' < r/2 = r_s$, il punto è interno sia al cilindro che alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho r'}{6\epsilon_0}\widehat{r'}$;
   - per $r/2 = r_s < r' < r$, il punto è interno al cilindro e esterno alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\right)\widehat{r'} = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} - \frac{\rho(r/2)^3}{3r'^2\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(r' - \frac{r^3}{12r'^2}\right)\widehat{r'}$;
   - per $r < r'$, il punto è esterno sia al cilindro che alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r^2}{2r'\epsilon_0} - \frac{\rho\left(\frac{r}{2}\right)^3}{3r'^2\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r'}\left(r^2 - \frac{r^3}{12r'}\right)\widehat{r'}$;

2. Per il punto P: $r/2 = r_s < r' = r_1 < r$, per cui $|\overrightarrow{E}(r')| = (\rho r'/2\epsilon_0 - \rho(r/2)^3/3r'^2\epsilon_0)$ che per $r' = r_1$ fornisce $|\overrightarrow{E}(r_1)| = 1.2 \times 10^9\ V/m$.

3. L'energia è conservata, pertanto $\frac{1}{2}mv_1^2 + qV(r_2) = qV(r)$, dalla quale:

   $$v_i = \sqrt{\frac{2q(V(r) - V(r_2))}{m}}$$

   Per calcolare v_i dobbiamo determinare $V(r) - V(r_2)$. La differenza di potenziale tra i punti r e r_2 è data da:

   $$V(r) - V(r_2) = \int_r^{r_2} \frac{\rho}{2\epsilon_0 r'}\left(r^2 - \frac{r^3}{12r'}\right)dr' = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0}\left(\ln\frac{r_2}{r} - \frac{r}{12}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = 1.5 \times 10^9\ V$$

   Per cui la velocità risulta pari a $v_i = 2.83 \times 10^6\ m/s$