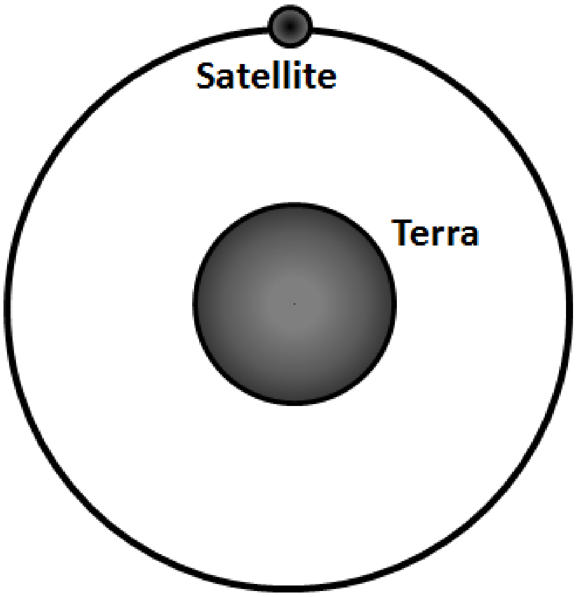
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 07/07/2015
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un satellite geostazionario di massa $m_0 = 3\mathrm{t}$ ruota su un'orbita circolare intorno alla Terra. In un certo istante esplode in due frammenti di massa $m_1 = m_0/3$ e $m_2 = 2m_0/3$. Rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite, il frammento più piccolo viene lanciato verso l'alto con una velocità verticale $v_{1s} = 200\mathrm{m/s}$. Sono dati la costante di gravitazione universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$ e la massa della Terra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$.



Si calcoli:

a) il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiori dimensioni.

$$v_{2t} = \text{.................}$$

b) l'energia minima sviluppata dall'esplosione.

$$E_{esplosione} = \text{.................}$$

c) La distanza di minimo avvicinamento alla Terra dei due satelliti nel moto successivo all'esplosione.

$$d_{1min} = \text{.................} \quad d_{2min} = \text{.................}$$

Soluzione

a)
Rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite si conserva la quantità di moto verticale del sistema

$$0 = m_1 v_{1s} - m_2 v_{2s} \;\Rightarrow\; v_{2s} = \frac{m_1 v_{1s}}{m_2}$$

Il satellite geostazionario, prima dell'esplosione, si muove su un'orbita circolare di raggio:

$$r_{geo} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T_{giorno}^2}{4\pi^2}}$$

Dove con T_{giorno} si indica il tempo che occorre al satellite per percorrere l'orbita geostazionaria. La velocità con cui si muove il satellite prima dell'esplosione rispetto al centro della Terra è:

$$v_{sat} = r_{geo}\omega$$

Dove con ω si indica la velocità angolare del satellite ($\omega = 2\pi/T_{giorno}$) Il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiori dimensioni è dato da:

$$v_{2t} = \sqrt{v_{2s}^2 + v_{sat}^2} = 3071 m/s$$

b)
L'energia minima sviluppata dall'esplosione è quella necessaria a far muovere i due pezzi rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite, in alto e in basso con le velocità v_{1s} e v_{2s}

$$E_{esplosione} = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2 = 3 \cdot 10^7 \mathrm{J}$$

c)
Dopo l'esplosione si conserva l'energia meccanica del sistema. Il primo frammento ha un'energia meccanica iniziale pari a:

$$E_{1iniziale} = \frac{1}{2} m_1 (v_{1s}^2 + v_{sat}^2) - \frac{G M_T m_1}{r_{geo}}$$

Nel momento in cui raggiunge il punto di minima distanza dal centro della terra la componente radiale della velocità si annulla quindi:

$$E_{1finale} = \frac{L^2}{2 m_1 r_1^2} - \frac{G M_T m_1}{r_1}$$

con $L = m_1 r_{geo} v_{sat}$. Ponendo $E_{1finale} = E_{1iniziale}$ si ottiene:

$$A r_1^2 + B r_1 - L^2 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AL^2}}{2A}$$

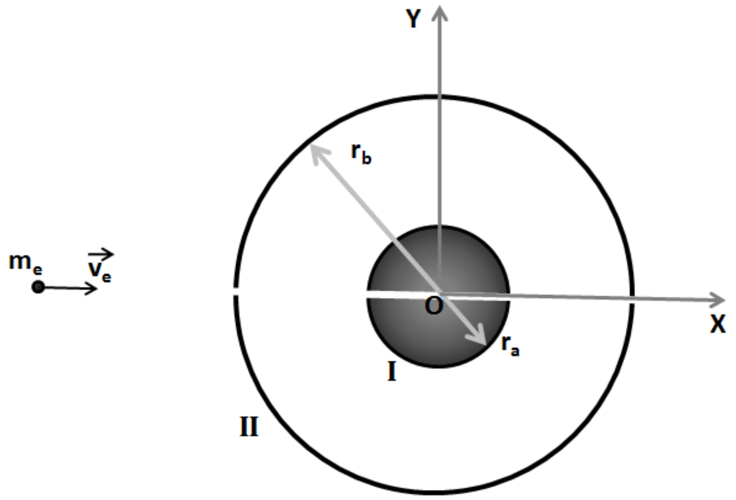
con $A = E_{1finale} 2 m_1$ e $B = 2 G M_T m_1^2$ Trovate le due soluzioni per r_1 si sceglie quella minore e si ricava:

$$d_{1min} = 39,6 \cdot 10^6 \mathrm{m}$$

Allo stesso modo si procede per calcolare d_{2min}

Esercizio 2

Un condensatore cilindrico indefinito è costituito da un'armatura centrale I, realizzata con un conduttore cilindrico (pieno), di raggio $r_a = 10$cm e un'armatura periferica II costituita da un cilindro conduttore di spessore infinitesimo e raggio $r_b = 30$cm. Il condensatore è inizialmente carico e l'energia immagazzinata in una lunghezza $l = 10$m è $E_{imm} = 0.01$J.



Si calcoli:

a) la carica sull'amatura II su una lunghezza $l_1 = 10$cm

$$q_{II} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Nell'ipotesi che la carica sull'armatura I sia positiva si lancia contro il condensatore un elettrone ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg;$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C) che, nel momento in cui si trova nella posizione ($-2r_b$,0) ha velocità $v_e = 2.5 \cdot 10^7$m/s diretta verso il centro O. Considerando la presenza di due fori nell'armatura II e un piccolo canale nell'armatura I (vedere figura), di dimensioni infinitesime e allineati in modo da permettere il passaggio dell'elettrone, si calcoli:

b) la velocità dell'elettrone quando passa per l'origine O.

$$v_O = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Se si connettono le due armature con un filo di resistenza $R = 1.8\text{M}\Omega$ si calcoli:

c) l'energia totale dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 0.2$ms (Si consideri il condensatore di lunghezza $l = 10$m ed energia immagazzinata $E_{imm} = 0.01$J).

$$E_{diss} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Soluzione

a)
La capacità del condensatore cilindrico di lunghezza $l = 10$m è:

$$C = \frac{2\pi l \epsilon_0}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

Data l'energia immagazzinata nel condensatore si ha:

$$E_{imm} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \;\; \Rightarrow \;\; Q = \sqrt{2E_{imm}C}$$

Conoscendo la carica Q presente sulla lunghezza l del condensatore cilindrico si può calcolare la carica sull'amatura II su una lunghezza $l_1 = 0.1$m:

$$q_{II} = \frac{Ql_1}{l} = 0.03 \cdot 10^{-6}\text{C}$$

b)
Il campo elettrico tra le armature del condensatore è dato da:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

con $\lambda = Q/l$ Fissando lo zero del potenziale nel punto O si valuta il potenziale nel punto $(-2r_b$,0):

$$V(-r_b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

Pertanto l'energia potenziale dell'elettrone nel punto di partenza è data da:

$$U = V(-r_b)q_e$$

L'energia iniziale dell'elettrone è:

$$E_{ini} = U + \frac{1}{2}m_e v_e^2$$

Quando l'elettrone passa per il centro O tutta la sua energia potenziale si è trasformata in energia cinetica quindi:

$$E_{fin} = \frac{1}{2}m_e v_O^2$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia ($E_{ini} = E_{fin}$)si ottiene:

$$v_O = \sqrt{\frac{2E_{ini}}{m_e}} = 5.3 \cdot 10^7\text{m/s}$$

c)
In questo caso si considera la scarica di un circuito RC:

$$i(t) = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$

La potenza dissipata è:

$$P(t) = Ri(t)^2 = \frac{Q^2}{RC^2}e^{-2t/RC}$$

Da cui si ricava l'energia totale dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 0.2$ms:

$$E_{diss} = \frac{Q^2}{RC^2}\int_0^{t_1} e^{-2t/RC}dt = \frac{Q^2}{2C}(1 - e^{-2t_1/RC}) = 0.0036J$$