Corso di Laurea: **Ingegneria Informatica**

Esame di Fisica Generale del 3/02/2015
Cognome : .... Nome : ....

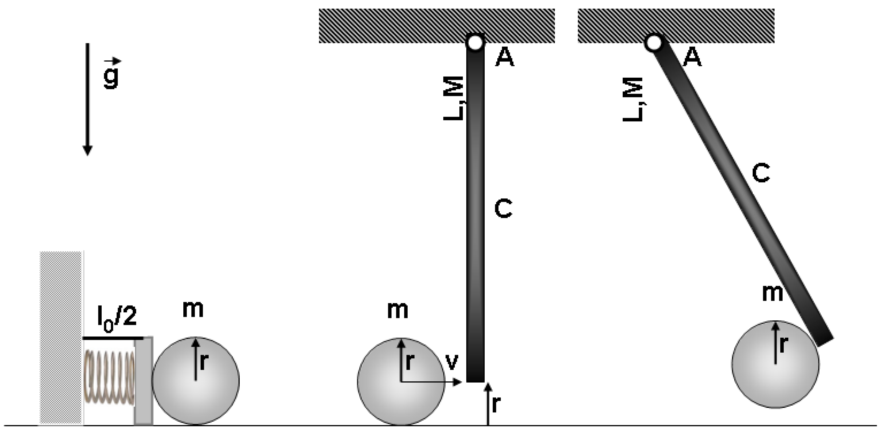
Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Una sferetta rigida di massa $m = 0.3\text{kg}$ e raggio $r = 0.2\text{m}$ è inizialmente ferma nei pressi di una molla di costante elastica $k = 50\text{Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.40\text{m}$. La sferetta poggia su un piano orizzontale con attrito mentre la molla è tenuta compressa per un tratto $\Delta x = l_0/2$ da un filo. Ad un certo istante il filo si spezza e la molla scatta accelerando la sferetta. Si faccia l'ipotesi che l'attrito del piano orizzontale sia tale da avere sempre rotolamento puro.
Si calcoli:

a) La velocità angolare ω della sferetta sul piano orizzontale :

$$\omega = \text{..........................}$$



Si supponga quindi che, nel moto sul piano orizzontale, la sferetta urti anelasticamente un'asta rigida omogenea di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $M = 1\text{kg}$ (l'asta è inizialmente ferma ed è libera di ruotare nel piano verticale intorno al vincolo liscio in A). Trascurando la componente lungo x della posizione del centro di massa, si calcoli :

b) Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$$\Delta p_A = \text{..........................}$$

c) l'altezza massima raggiunta dal centro dell'asta C nel moto successivo all'urto:

$$h_{max}(C) = \text{..........................}$$

Soluzione

a) La forza di attrito presente è necessaria per avere un moto di puro rotolamento ma, siccome la sfera, da subito, si muove senza strisciare, il lavoro fatto dalla forza di attrito è nullo e l'energia si conserva. Si ottiene quindi:

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

con I momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto con il piano ($I = 2mr^2/5 + mr^2$). Dalla precedente relazione si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{I}\left(K\Delta x^2\right)} = 10.9s^{-1}$$

b) Scegliamo il punto A come origine degli assi. il centro di massa dista allora:

$$D_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{m + M}$$

La velocitá angolare del sistema (asta + sferetta) dopo l'urto si puó calcolare imponendo la conservazione del momento angolare $\vec{L_i} = \vec{L_f}$. Il momento angolare iniziale vale:

$$\vec{L_i} = m\vec{d} \times \vec{v}$$

da cui:

$$|\vec{L_i}| = mL\omega r$$

La velocitá angolare del sistema (ω_s) dopo l'urto si ottiene da:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f} \Longrightarrow |\vec{L_i}| = |\vec{L_f}| = I_{tot}\omega_s \Longrightarrow \omega_s = \frac{|\vec{L_i}|}{I_{tot}}$$

dove il momento di inerzia totale é dato da:

$$I_{tot} = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m\left(r^2 + L^2\right)$$

La velocitá del centro di massa del sistema dopo l'urto si ricava dalla seguente relazione:

$$v_{cm} = \omega_s D_{cm}$$

Per valutare il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo A durante l'urto si calcola la differenza tra la quantitá di moto finale e iniziale del sistema:

$$\Delta p_A = p_f - pi = (m + M)v_{cm} - m\omega r = 0.15kgms^{-1}$$

c) Per valutare l'altezza massima raggiunta dal punto C nel moto del sistema successivo all'urto si sfrutta la conservazione dell'energia tra l'istante successivo all'urto e quello in cui il punto C raggiunge la sua massima altezza. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_s^2$$

Nel momento in cui C ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M + m)gh_{cm}$$

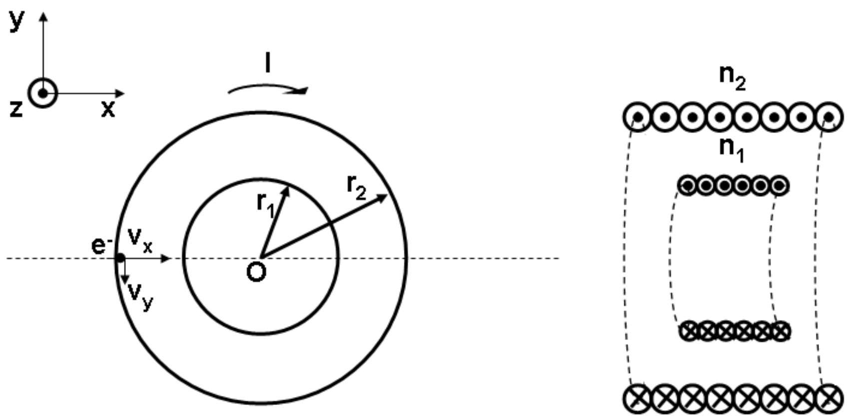
Uguagliando queste due espressioni si ricava:

$$h_{cm} = \frac{\frac{1}{2}I_{tot}\omega_s^2}{(M + m)g}$$

Sfruttando i triangoli simili si ottiene:

$$h_{max}(C) = \frac{\frac{l}{2}h_{cm}}{D_{cm}} = 0.02m$$

Esercizio 2



Due solenoidi concentrici hanno raggio $r_1 = 10$cm e $r_2 = 20$cm. Questi solenoidi sono caratterizzati da due valori diversi di n definito come numero di spire per unità di lunghezza: $n_1 = 2\text{cm}^{-1}$, $n_2 = 1.1\text{cm}^{-1}$. All'interno dei due solenoidi circola la stessa corrente $I = 2$mA. Un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C penetra nel campo magnetico prodotto dal sistema dei due solenoidi nel punto di coordinate (-r_2;0) con velocità $v = (5 \cdot 10^4; 1 \cdot 10^4)$m/s. Si calcoli:

a) il modulo della forza di Lorentz sull'elettrone nell'istante in cui entra nel solenoide più largo:

$F =$ ....

b) il punto in cui penetra nel solenoide più piccolo:

$x_P =$ .... $y_P =$ ....

c) La forza di Lorentz nell'istante in cui l'elettrone entra nel solenoide di raggio r_1 e la componente x della velocità dell'elettrone sempre nello stesso istante:

$F' =$ .... $v_x(P) =$ ....

Soluzione

a) Il campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente I è nullo all'esterno e uniforme all'interno, con modulo $B = \mu_0 n I$, direzione parallela all'asse del solenoide e verso dato dalla regola della mano destra. Si ottiene quindi:

$$B_2 = \mu_0 n_2 I$$

nella regione di spazio compresa tra i due solenoidi ($r_1 < r < r_2$).

La velocità dell'elettrone è data da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Poichè il campo magnetico e la velocità dell'elettrone sono due vettori ortogonali, il modulo della forza di Lorentz nella regione di spazio tra i due solenoidi è:

$$F = q_e v B_2 = 0.23 \cdot 10^{-20}$$

b) Per trovare il punto in cui l'elettrone entra nel solenoide più interno è necessario calcolare l'equazione della circonferenza su cui si muove l'elettrone e trovando i punti di intersezione con la circonferenza di raggio r_1 e centro O(0;0).

Per scrivere l'equazione della circonferenza, che rappresenta la traiettoria dell'elettrone, se ne calcolano il centro e il raggio.

Il raggio della circonferenza R si ottiene uguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

mentre per trovare le coordinate del centro C si calcola l'angolo rispetto all'asse delle x che forma la velocità dell'elettrone:

$$\Theta = arcos(v_x/v)$$

Da cui si ottiene:

$$y_C = -R \cdot cos(\Theta)$$
$$x_C = -R \cdot sen(\Theta) - r_2$$

L'equazione della circonferenza che descrive la traiettoria dell'elettrone nel suo primo passaggio tra i due solenoidi è:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \implies x^2 + y^2 - ax - by = K$$

con $a = 2x_C$, $b = 2y_C$ e $K = R^2 - x_C^2 - y_C^2$.

Mettendo a sistema l'equazione appena trovata con l'equazione della circonferenza che descrive la sezione del solenoide più interno, si vanno a cercare i punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ x^2 + y^2 - ax - by = K \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ ax + by = r_1^2 - K \end{cases}$$

Rinominando $K^* = r_1^2 - K$ e facendo le dovute sostituzioni si ricava:

$$\begin{cases} (K^* - by)^2 + (ay)^2 = (ar_1)^2 \\ ax + by = K^* \end{cases}$$

Concentrandosi solo sulla prima equazione si ottiene:

$$K^{*2} + b^2y^2 - 2K^*by + a^2y^2 - a^2r_1^2 = 0$$

da cui:
$$A^2y^2 - By + K' = 0$$
con $A = a^2 + b^2$, $B = 2K^*b$ e $K' = K^{*2} - a^2r_1^2$

La soluzione è pertanto:

$$y = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AK'}}{2A} \implies y_P = -0.0262m$$

$$x_P = \frac{K^* - by_P}{a} = -0.0965m$$

Per calcolare la y_P si è scelta la soluzione più vicina all'origine (quella con il "+" davanti alla radice)

c) All'interno del solenoide più piccolo il campo magnetico vale:

$$B_1 = B_2 + \mu_0 n_1 I$$

Poichè, anche in questo caso, il campo magnetico e la velocità dell'elettrone sono ortogonali, il modulo della forza di Lorentz nella regione di spazio interna al solenoide di raggio r_1 è:

$$F' = q_e v B_1$$

L'angolo che la velocità v forma con l'asse delle x nel punto P è uguale all'angolo $H\hat{P}C$ (con riferimento alla figura sottostante) quindi:

$$v_x(P) = \frac{v\bar{PH}}{\bar{CP}}$$

Il segmento PH corrisponde alla coordinata y del punto C meno la coordinata y del punto P. Il segmento CP è, invece, il raggio della circonferenza (il precedente R).