Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 16/06/2015
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Si consideri il manubrio costituito da un'asta omogenea rigida di lunghezza $l = 1$m e massa $M_1 = 2$kg alle cui estremità A e B sono saldate due sfere omogenee di massa $M_2 = 1$kg e raggio $r = 0.1$m.

16062015me.png

Il manubrio è vincolato nel punto C distante $d = 0.2$m dall'estremo A dell'asta e può ruotare intorno a C nel piano verticale. Supponendo che il manubrio si trovi inizialmente nella sua posizione di equilibrio stabile (fig. 1.A).
Si calcoli:

a) il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

$$T = \text{................}$$

Ad un dato istante le due sfere vengono colpite contemporaneamente da due proiettili puntiformi di massa $m = 0.1$kg e velocità di modulo $v = 10$m/s . La velocità dei due proiettili è perpendicolare all'asta. I due proiettili si conficcano nelle sfere in superficie, a distanza r dal centro. (fig. 1.B). Si calcoli:

b) la velocità del centro di massa del sistema subito dopo l'urto.

$$v_{cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) l'angolo massimo Θ_{max} raggiunto dal manubrio nel moto successivo all'urto (fig. 1.C).

$$\Theta_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soluzione

a)
Il centro di massa del sistema è al centro dell'asta. Si calcola quindi il momento d'inerzia del manubrio (asta con le due sfere) riferito al punto C:

$$I_C = \frac{1}{12}M_1 l^2 + M_1 d_{cm}^2 + \frac{4}{5}M_2 r^2 + M_2(d+r)^2 + M_2(l-d+r)^2$$

Con $d_{cm} = l/2 - d$. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_C\dot{\Theta}^2) = 0$$

Dove $M_{tot} = M_1 + 2M_2$. Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con Θ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_C\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{M_{tot}gd_{cm}}} = 2s$$

b)
Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema. Sfruttando tale conservazione si può ricavare la velocità angolare del sistema dopo l'urto. Si ha pertanto:

$$mv(l+r-d) - mv(d+r) = I'_C\omega \;\Rightarrow\; mv(l-2d) = I'_C\omega$$

Dove $I'_C = I_C + m((d+r)^2 + r^2) + m((l-d+r)^2 + r^2)$ Si ricava quindi la velocità angolare del sistema dopo l'urto:

$$\omega = \frac{mv(l-2d)}{I'_C}$$

Si deve trovare quindi la posizione del centro di massa del sistema (in questo caso rispetto al centro dell'asta)

$$x_{cm} = \frac{2mr}{2m + M_{tot}}$$

La velocità del centro di massa del sistema subito dopo l'urto è pertanto:

$$v_{cm} = \omega R_{cm} = 0.13m/s$$

Dove $R_{cm} = \sqrt{(x_{cm}^2 + d_{cm}^2)}$
c)
Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I'_C\omega^2$$

Nel momento in cui il centro di massa ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M_{tot} + 2m)gh_{finale}$$

Da cui:

$$h_{finale} = \frac{E_{iniziale}}{(M_{tot} + 2m)g}$$

Per ottenere l'angolo massimo Θ_{max} raggiunto dal manubrio nel moto successivo all'urto basta valutare l'angolo di cui si è mosso il centro di massa:

$$\Theta_{max} = arcos\left(\frac{d_{cm}}{R_{cm}}\right) + arcos\left(\frac{d_{cm} - h_{finale}}{R_{cm}}\right) = 0.16rad$$

Esercizio 2

Un circuito circolare di raggio $r_1 = 1\text{m}$ e resistenza $R_{circ} = 10\Omega$ è posizionato al centro di un solenoide di raggio $r_2 = 3\text{m}$ e lunghezza $l_s = 10\text{m}$. Per realizzare il solenoide si è utilizzato un cavo di sezione $S = 1\text{cm}^2$ resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$ e lunghezza $l_f = 10\text{km}$.

16062015em.png

Supponendo di collegare il solenoide ad un generatore di tensione costante $V_0 = 100\text{V}$ e trascurando gli effetti sul solenoide dovuti alla corrente che circola in r_1
Si calcoli:

a) il campo magnetico del solenoide in condizioni stazionarie (quando cioè la corrente che circola nel solenoide si può considerare continua)

$$B_{staz} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) l'energia immagazzinata nel solenoide ad un istante $t_1 = 0.2\text{s}$ (durante la carica del circuito RL)

$$E = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) la corrente che circola nel circuito di raggio r_1 nell'istante $t_2 = 0.5\text{s}$

$$I_{circ} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soluzione

a)
Si valuta la densità di spire per unità di lunghezza (n) del solenoide . Il numero totale di spire è dato da:

$$N = \frac{l}{2\pi r_2}$$

Dividendo il numero totale di spire per la lunghezza del solenoide si trova il numero di spire per unità di lunghezza:

$$n = \frac{N}{l_s} = 53m^{-1}$$

La resistenza del filo si ricava dalla seguente relazione:

$$R = \frac{\rho l_f}{S} = 1.7\Omega$$

Considerando la corrente che circola nel solenoide continua si ha:

$$I_{staz} = \frac{V_0}{R} = 59A$$

Si può quindi ricavare il campo magnetico che si genera al centro del solenoide:

$$B_{staz} = \mu_0 n I_{staz} = 0.39 \cdot 10^{-2}T$$

b)
L'induttanza del solenoide si ricava dalla seguente relazione:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_s} \pi r_2^2$$

Si valuta quindi la corrente che circola nel circuito RL all'istante t_1:

$$I(t_1) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt_1/L}) = 17A$$

Pertanto l'energia immagazzinata dal solenoide all'istante t_1 è:

$$E = \frac{1}{2} L I(t_1)^2 = 144J$$

c)
Il flusso del campo magnetico attraverso il circuito è dato da:

$$\Phi_B = \mu_0 n I(t) \pi r_1^2$$

La forza elettromotrice indotta nel circuito è:

$$\epsilon(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \pi r_1^2 \frac{dI(t)}{dt} = -\mu_0 n \pi r_1^2 \frac{V_0}{L} e^{-Rt/L}$$

Da cui si ricava la corrente che circola nel circuito nell'istante $t_2 = 0.5$s:

$$I_{circ} = \frac{|\epsilon(t_2)|}{R_{circ}} = 0.9mA$$