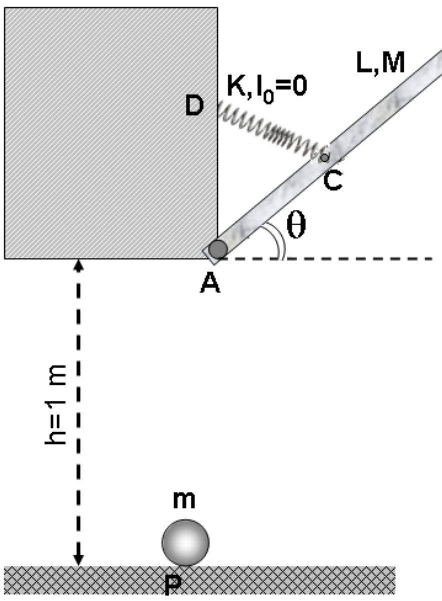
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

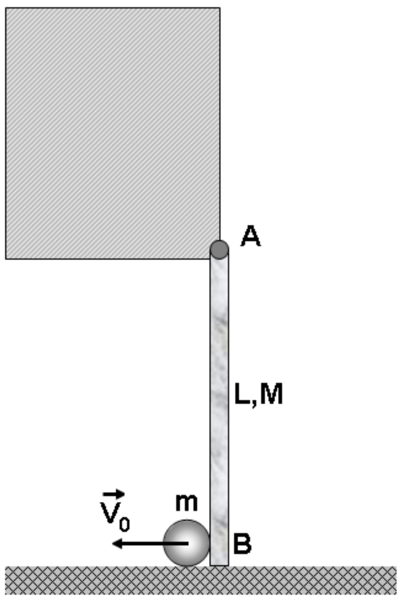
Esame di Fisica Generale del 07/07/2014
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1$Kg e lunghezza $L = 1$m è incernierata ad una parete nel suo estremo A ed è libera di ruotare nel piano verticale. L'asta è collegata alla parete anche per mezzo di una molla di costante elastica K sconosciuta e lunghezza a riposo nulla. La molla è fissata alla parete nel punto D distante $L/2$ da A ed è fissata all'asta nel suo punto centrale C. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'angolo θ vale $\pi/6$.





a) Determinare la costante elastica della molla:

$$K = ...$$

Ad un certo istante la molla si spezza e l'asta ruota nel piano verticale fino a che il suo estremo B non colpisce il punto materiale libero di massa $m = 1$kg situato in P. L'urto può essere considerato perfettamente elastico.

Si calcoli:

b) Il modulo della velocità $\overline{v_0}$ acquistata dal punto materiale dopo l'urto:

$$v_0 = ...$$

c) Il modulo dell' impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$$p_A = ...$$

Soluzione

a) Il sistema è in equilibrio stabile e quindi è in un minimo dell'energia potenziale. L'energia potenziale totale del sistema è data dalla somma dell'energia gravitazionale con quella elastica:

$$E_p(\Theta^*) = Mg\frac{L}{2}sen(\Theta^*) + \frac{1}{2}K\left(\left(\frac{L}{2}cos(\Theta^*)\right)^2 + \left(\frac{L}{2}(1 - sen(\Theta^*))\right)^2\right) =$$

$$= Mg\frac{L}{2}sen(\Theta^*) + \frac{1}{2}K\left(\frac{L}{2}\right)^2(2 - 2sen(\Theta^*))$$

Si impone il minimo dell'energia potenziale in $\Theta^* = \Theta$:

$$\left.\frac{dE_p(\Theta^*)}{d\Theta^*}\right|_{\Theta^*=\Theta} = Mg\frac{L}{2}cos(\Theta) - K\left(\frac{L}{2}\right)^2 cos(\Theta) = 0$$

Si ricava quindi K:

$$K = \frac{2Mg}{L} = 19.6\frac{N}{m}$$

Modo alternativo:

Si può uguagliare il momento della forza peso a quello della forza elastica (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto A). Si ottiene:

$$M_p = M_e \Rightarrow Mg\frac{L}{2}cos(\Theta) = K\left(\frac{L}{2}\right)^2 cos(\Theta) \Rightarrow K = \frac{2Mg}{L}$$

b) L'energia meccanica del sistema, dopo la rottura della molla, si conserva sempre, anche in seguito all'urto dell'asta con la massa m (urto elastico). Si scrive, quindi, l'energia meccanica del sistema in tre situazioni particolari: I) subito dopo la rottura della molla; II) un istante prima dell'urto tra l'asta e la massa m; III) subito dopo l'urto elastico. In ognuno dei tre casi, lo zero dell'energia potenziale viene posto sul piano di appoggio della massa m.

I) In seguito alla rottura della molla l'energia meccanica del sistema è solo l'energia potenziale gravitazionale dell'asta:

$$E_1 = Mg\left(L + \frac{L}{4}\right) = Mg\frac{5L}{4}$$

II) Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al polo A è dato da:

$$I_{asta} = \frac{ML^2}{3}$$

Pertanto, appena prima che avvenga l'urto elastico, l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2}$$

III) Dopo l'urto tra l'asta e la massa m l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_3 = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Uguagliando l'energia del caso I a quella del caso II si ottiene:

$$Mg\frac{5L}{4} = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_1 = 3\sqrt{\frac{g}{2L}}$$

Uguagliando l'energia del caso II a quella del caso III si ottiene:

$$\frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow I_{asta}\omega_1^2 = I_{asta}\omega_2^2 + mv_0^2 \tag{1}$$

Un'altra quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare, non si conserva la quantità di moto perchè c'è una forza impulsiva in A che però ha momento nullo se si sceglie A come polo.

Si può scrivere, dunque:

$$I_{asta}\omega_1 = I_{asta}\omega_2 + mv_0L$$

Mettendo a sistema quest'ultima uguaglianza con la relazione 1 si ottiene:

$$I_{asta}\omega_1^2 = I_{asta}\omega_1^2 + \frac{(mv_0L)^2}{I_{asta}} - 2\omega_1 mv_0L + mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \frac{2\omega_1 LM}{M + 3m} = \frac{3M\sqrt{2Lg}}{M + 3m} = 3.32\frac{m}{s}$$

ed anche:

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_1 \frac{6mL^2M}{(M+3m)ML^2} = \omega_1 \left(1 + \frac{6m}{M+3m}\right) = 3\sqrt{\frac{g}{2L}} \left(\frac{M+9m}{M+3m}\right)$$

c) La quantità di moto non si conserva, c'è, infatti, un impulso nel vincolo A, durante l'urto. Per valutare il modulo di tale impulso si calcola la differenza tra la quantità di moto del sistema prima dell'urto e quella dopo l'urto.

$$p_{prima} = M\omega_1 \frac{L}{2}$$

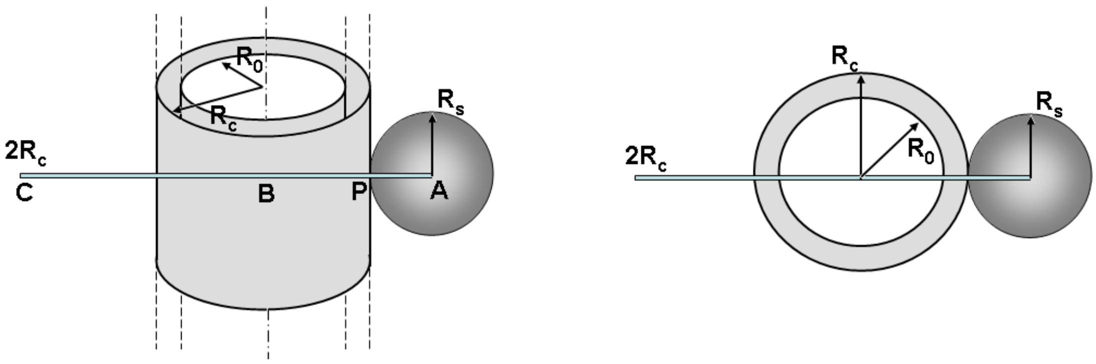
$$p_{dopo} = M\omega_2 \frac{L}{2} + mv_0$$

Il modulo dell'impulso in A è dato dalla differenza di questi due valori:

$$p_A = M\omega_1 \frac{L}{2} - M\omega_2 \frac{L}{2} - mv_0 = M\frac{L}{2}(\omega_1 - \omega_2) - mv_0 = 3M\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\frac{6m}{M+3m} - m\frac{3M\sqrt{2Lg}}{M+3m} =$$

$$= \frac{1}{M+3m}\left(\frac{3M6m\sqrt{Lg}}{2\sqrt{2}} - 3mM\sqrt{2Lg}\right) = \frac{3mM\sqrt{Lg}}{M+3m}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) = \frac{3mM\sqrt{Lg}}{\sqrt{2}(M+3m)} = 1.66kg\frac{m}{s}$$

Esercizio 2



Un cilindro isolante, infinito, di raggio $R_c = 20$cm è cavo al suo interno fino ad $R_0 = 15$cm. Una sfera,piena, isolante di raggio $R_s = 10$cm è incollata alla superficie esterna del cilindro nel punto P. Cilindro e sfera sono entrambi carichi: la densità di carica del cilindro è $\rho_c = 0.5 \cdot 10^{-9}$C/m^3 mentre quella della sfera è $\rho_s = 1 \cdot 10^{-9}$C/m^3.

Si calcoli:

a) Il modulo del campo elettrico nel punto C distante $2R_c$ dal centro B del cilindro cavo:

$$E(C) = \text{.........................}$$

b) Il potenziale nel punto C (si assuma $V_P = 0$):

$$V(C) = \text{.........................}$$

Supponiamo ora di realizzare un microscopico canale nel cilindro e nella sfera per unire i punti A e C. Le dimensioni del canale sono talmente piccole da non perturbare il campo elettrico di sfera e cilindro.

c) Calcolare con quale velocità arriverebbe nel punto A un elettrone di massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$kg e di carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C che si trovasse in C a riposo.

$$v_e(A) = \text{.........................}$$

Soluzione

a) Il campo elettrico all'esterno di un cilindro cavo è diretto in ogni punto ortogonalmente all'asse del cilindro ed è costante su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio r.

Applicando il teorema di Gauss

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho_c}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

ad una scatola cilindrica di raggio $r_c > R_c$ e altezza h si ottiene:

$$\oint_{ext} \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = E_c(r_c) S_{laterale} = 2\pi r_c h E_c(r_c)$$

Il flusso di E_c attraverso le basi della scatola cilindrica è nullo in quanto il campo è parallelo alle basi. Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho_c}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} V_{guscio} = \frac{\rho_c \pi h \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$2\pi r_c h E_c(r_c) = \frac{\rho_c \pi h \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_c(r_c) = \frac{\rho_c \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0 r_c}$$

All'esterno di una sfera il campo elettrico è quello di una carica puntiforme.

$$E_s(r_s) = \frac{\rho_s \frac{4}{3}\pi R_s^3}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_s^2} = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0 r_s^2}$$

Il campo elettrico nel punto C è dato dalla somma dei campi elettrici generati dal guscio cilindrico e dalla sfera in quel punto e, poichè sono diretti nello stesso modo e hanno lo stesso verso si possono sommare algebricamente:

$$E(C) = E_c(C) + E_s(C) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0 2R_c} + \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(R_s + 3R_c)^2} = 1.31\frac{N}{C}$$

b) In un punto all'esterno del guscio cilindrico, distante r_1 dall'asse, il potenziale è:

$$V(r_1) - V(R_c) = \int_{r_1}^{R_c} E_c(r)dr = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}\int_{r_1}^{R_c}\frac{dr}{r} = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}ln\left(\frac{R_c}{r_1}\right)$$

All'esterno della sfera, in un generico punto distante r_2 dal centro, il campo elettrico è quello di una carica puntiforme e, pertanto, il potenziale vale:

$$V(r_2) - V(R_s) = \int_{r_2}^{R_s} E_s(r)dr = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(R_s)} - \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(r_2)} = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Il potenziale nel punto C vale:

$$V(C) = V_c(C) + V_s(C) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}ln\left(\frac{R_c}{2R_c}\right) + \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{3R_c + R_s}\right) =$$

$$= \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\rho_s R_s^2}{3\epsilon_0}\left(\frac{3R_c}{3R_c + R_s}\right) = -0.0198V$$

c) Il potenziale generato dalle due distribuzioni di carica in A è:

$$V(A) = V_c(A) + V_s(A) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}ln\left(\frac{R_c}{R_c + R_s}\right) + \int_0^{R_s} E_s(r)dr =$$

$$= \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}ln\left(\frac{R_c}{R_c + R_s}\right) + \frac{\rho_s R_s^2}{6\epsilon_0}$$

La differenza di energia potenziale dell'elettrone tra quando è in C e quando si trova in A è data da:

$$\Delta U = q_e V(C) - q_e V(A)$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha pertanto:

$$\Delta U = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\Delta U}{m_e}} = 5.2\cdot 10^4\frac{m}{s}$$