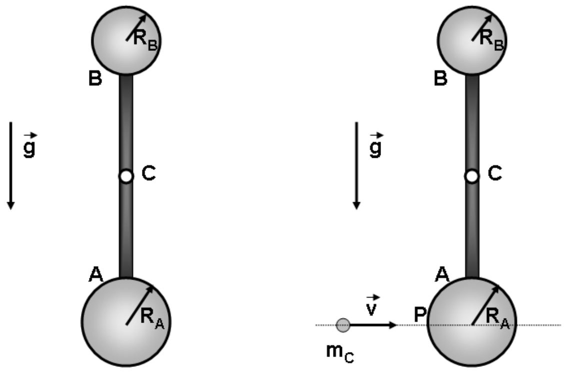
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 22/09/2014
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un manubrio è formato da un'asta rigida di lunghezza $l = 1$m e massa $m = 1$kg ai cui estremi A e B sono saldati due dischi rispettivamente di raggio $R_A = 20$cm e $R_B = 10$cm. Il disco di raggio R_A ha massa $m_A = 1$kg mentre il disco di ragio R_B ha massa $m_B = 0.3$kg.



L'asta è incernierata nel suo punto centrale C e il manubrio può ruotare senza attrito nel piano verticale. Si calcoli:

a) Il periodo delle piccole oscillazioni del manubrio (asta con i due dischi):

$$T = ...$$

Ad un certo istante, un corpo puntiforme di massa $m_C = 0.1$kg e velocità di modulo $v = 10$m/s urta il disco di raggio R_A nel punto P (come in figura). L'urto è perfettamente anelastico. La velocità del corpo di massa m_C prima dell'urto è perpendicolare all'asta AB.
Trascurando la variazione del centro di massa del sistema, dovuto alla nuova massa m_C, si calcoli:

b) L'impulso assorbito dal vincolo in C durante l'urto:

$$p_C = ...$$

c) L'altezza massima raggiunta dal punto P nel moto oscillatorio successivo all'urto :

$$h_{max}(P) = ...$$

Soluzione

a) Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto C:

$$d_{cm} = \frac{m_A(R_A + l/2) - m_B(R_B + l/2)}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = m_A + m_B + m$

Si calcola quindi il momento d'inerzia del manubrio (asta con i due dischi) riferito al punto C:

$$I_C = \frac{1}{2}m_A R_A^2 + m_A(R_A + l/2)^2 + \frac{1}{2}m_B R_B^2 + m_B(R_B + l/2)^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_C\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con Θ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_C\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

b) Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema. Sfruttando tale conservazione si può ricavare la velocità angolare del sistema dopo l'urto. Si ha pertanto:

$$m_C v(R_A + \frac{l}{2}) = I_{C1}\omega$$

con $I_{C1} = I_C + m_C((\frac{l}{2} + R_A)^2 + R_A^2)$ da cui si ottiene:

$$\omega = \frac{m_C v(R_A + \frac{l}{2})}{I_{C1}}$$

La quantità di moto non si conserva, c'è, infatti, un impulso nel vincolo C, durante l'urto. Per valutare il modulo di tale impulso si calcola la differenza tra la quantità di moto del sistema prima dell'urto ($p_{iniziale}$) e quella dopo l'urto(p_{finale}) evitando di ricalcolare la posizione del nuovo centro di massa (come specificato nel testo dell'esercizio):

$$p_{iniziale} = m_C v$$

$$p_{finale} = (m_C + M_{tot})\omega d_{cm}$$

Da queste relazioni si ricava:

$$p_C = p_{finale} - p_{iniziale} = m_C v - (m_C + M_{tot})\omega d_{cm}$$

c) Per valutare l'altezza massima raggiunta dal punto P nel moto oscillatorio successivo all'urto si sfrutta la conservazione dell'energia tra l'istante successivo all'urto e quello in cui il punto P raggiunge la sua massima altezza. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I_{C1}\omega^2$$

Nel momento in cui P ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M_{tot} + m_C)g(d_{cm} - d_{cm}cos(\theta_{max}))$$

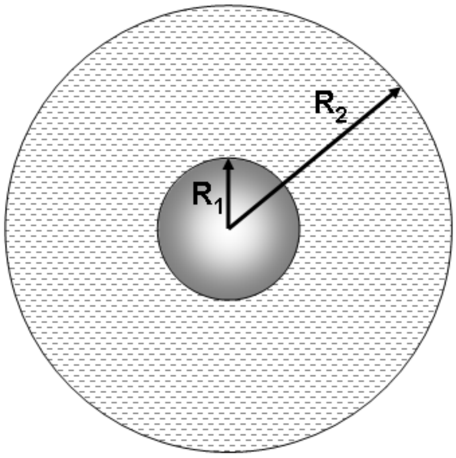
Uguagliando queste due espressioni si ricava:

$$h_{cm} = (d_{cm} - d_{cm}cos(\theta_{max})) = \frac{\frac{1}{2}I_{C1}\omega^2}{(M_{tot} + m_C)g}$$

Sfruttando i triangoli simili si ottiene:

$$h_{max}(P) = \frac{(\frac{l}{2} + R_A)h_{cm}}{d_{cm}}$$

Esercizio 2



Una carica $Q = 2 \cdot 10^{-8}$C è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R_1 = 10$cm. Tale sfera si trova al centro di una sfera più grande di raggio $R_2 = 1$m che contiene una carica negativa distribuita uniformemente con una densità di carica $\rho = -4 \cdot 10^{-8}$C/m^3.

Si calcoli:

a) il modulo della forza che agisce su un elettrone che si trova a distanza $R_1/2$ dal centro della sfera:

$F_e =$ ....

b) La distanza R dal centro della sfera in cui si annulla il campo elettrostatico (si escludano le soluzioni $R = 0$ e $R = \infty$):

$R =$ ....

c) Il lavoro necessario per spostare un elettrone da $R_1/2$ a R:

$L =$ ....

Soluzione

a) All'interno della sfera il campo elettrico è, per motivi di simmetria, radiale e dipendente solamente dal raggio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} \tag{1}$$

Il campo elettrico si può ottenere applicando il teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

dove il volume è quello di una sfera di raggio r e $\rho_{pos} = \frac{3Q}{4\pi R_1^3}$.

Sulla superficie della sfera di raggio r il flusso vale:

$$\oint_{ext} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S = 4\pi r^2 E(r)$$

dove è stata utilizzata la proprietà (1).

Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} V = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Longrightarrow E(r) = \frac{\rho_{pos}}{3\epsilon_0} r$$

Il modulo della forza che agisce su un elettrone che si trova a distanza $R_1/2$ dal centro della sfera è:

$$F_e = q_{elettrone} E(R_1/2) = q_{elettrone} \frac{\rho_{pos} R_1}{6\epsilon_0} = q_{elettrone} \frac{3Q}{24\epsilon_0 \pi R_1^2}$$

b) Sfruttando sempre il teorema di Gauss e il principio di sovrapposizione si cerca la distanza dal centro della sfera in cui il campo elettrico si annulla. All'interno della sfera carica positivamente il campo elettrico dovuto alla sola carica positiva cresce, all'esterno di questa sfera e, nella parte carica negativamente si ha, invece, il campo elettrico dovuto alla carica positiva che decresce mentre il campo elettrico prodotto dalla carica negativa aumenta. Proprio in questa regione va cercato il punto in cui il campo elettrico totale è nullo.

All'esterno della sfera carica positivamente si ha un campo elettrico dovuto alla sola carica positiva pari a:

$$E_+(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo elettrico generato da una carica puntiforme

All'interno del guscio sferico carico negativamente il campo elettrico (dovuto alla sola carica negativa) vale:

$$E_-(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

Ottenuto sempre applicando il teorema di Gauss.

Il campo totale si annulla ad una distanza R tale da rendere uguali i due contributi:

$$E_+(R) = -E_-(R) \Longrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3 - R_1^3}{R^2}$$

Da cui si ottiene:

$$R = \sqrt[3]{-\frac{3Q}{4\pi\rho} + R_1^3}$$

c) Si calcola la differenza di potenziale tra i punti a distanza $R_1/2$ e R dal centro della sfera. Si considerano i contributi della sfera carica positivamente e del guscio sferico carico negativamente separatamente. Il potenziale viene posto uguale a 0 al centro della sfera.

Sfera carica positivamente:

$$V_+(r) = -\frac{r^2 Q}{8\pi R_1^3 \epsilon_0}$$

per $0 < r < R_1$ e

$$V_+(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{8\pi R_1 \epsilon_0}$$

per $r > R_1$

Da cui si ottiene (per la sfera carica positivamente):

$$V_+(R_1/2) = -\frac{Q}{32\pi R_1 \epsilon_0}$$

e

$$V_+(R) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi R_1 \epsilon_0}$$

Sfera carica negativamente:

$$V_-(r) = 0$$

per $0 < r < R_1$.

Per ottenere il poteziale all'interno del guscio sferico ($R_1 < r < R_2$), si calcola:

$$V(r) = \int_r^{R_1} E(\tilde{r})d\tilde{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_r^{R_1} \frac{\tilde{r}^3 - R_1^3}{\tilde{r}^2} d\tilde{r}$$

L'integrale si può svolgere come:

$$\int_r^{R_1} \frac{\tilde{r}^3 - R_1^3}{\tilde{r}^2} d\tilde{r} = \left(\frac{\tilde{r}^2}{2} + \frac{R_1^3}{\tilde{r}}\right)_r^{R_1} = \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}$$

da cui

$$V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right)$$

Da cui si ottiene (per la sfera carica negativamente):

$$V_-(R_1/2) = 0$$

e

$$V_-(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{R_1^3}{R}\right)$$

Il lavoro necessario per spostare un elettrone da $R_1/2$ a R si calcola nel seguente modo:

$$L = q_{elettrone}(V_+(R_1/2) + V_-(R_1/2) - V_+(R) - V_-(R)) =$$
$$= q_{elettrone}\left(-\frac{5Q}{32\pi R_1 \epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{R_1^3}{R}\right)\right)$$