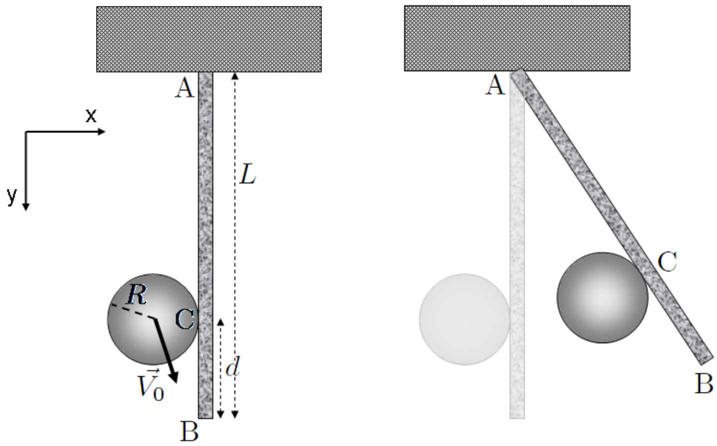
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 16/06/2014
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1$Kg e lunghezza $L = 1$m è incernierata nel suo estremo A ed è libera di oscillare nel piano verticale. L'asta è inizialmente in equilibrio.



Ad un certo istante l'asta viene colpita nel punto C da una sfera di raggio $R = 0.5$m e massa $m = 0.5$Kg. Il punto C dista $d = 0.3$m dall'estremo B dell'asta. Un attimo prima dell'urto la velocità della sfera vale $\vec{V_0} = (5; 10)\frac{\text{m}}{\text{s}}$ e l'urto è completamente anelastico (la sfera resta attaccata all'asta).

Si calcoli:

a) Quanto dista dall'estremo A il centro di massa del sistema subito dopo l'urto:

$$D = ...$$

b) Il valore della velocità angolare ω subito dopo l'urto:

$$\omega = ...$$

c) Qual è la massima variazione di altezza raggiunta dal centro di massa del sistema nel moto successivo all'urto:

$$\Delta H_{max} = ...$$

Soluzione

a) Scegliamo il punto A come origine degli assi. Le coordinate del centro di massa sono allora:

$$x_{CM} = \frac{-Rm}{m+M}$$

$$y_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + M(L-d)}{m+M}$$

da cui si ottiene:

$$D = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}$$

b) La velocità angolare dopo l'urto si può calcolare imponendo la conservazione del momento angolare $\vec{L_i} = \vec{L_f}$. Il momento angolare iniziale è diretto lungo $\hat{z}$ e vale:

$$\vec{L_i} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

questo prodotto vettoriale può essere calcolato in coordinate cartesiane.
Infatti, dati $\vec{r} = (r_x, r_y) = (-R, L-d)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ il momento angolare vale:

$$|\vec{L_i}| = L_i^{(z)} = m(r_x v_y - r_y v_x) = m(-Rv_y - (L-d)v_x)$$

Infine la velocità angolare dopo l'urto si ottiene da:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f} \Longrightarrow |\vec{L_i}| = |\vec{L_f}| = I\omega \Longrightarrow \omega = \frac{|\vec{L_i}|}{I}$$

dove il momento di inerzia vale:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m\left(r_x^2 + r_y^2\right)$$

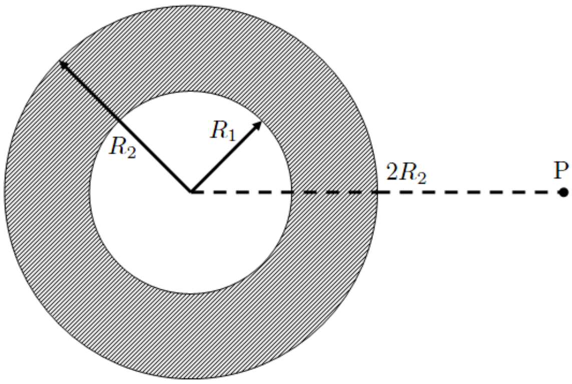
c) Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia:

$$E_i = E_f \Longrightarrow (m+M)gh_{CM}^{(i)} + \frac{1}{2}I\omega^2 = (m+M)gh_{CM}^{(f)} \Longrightarrow (m+M)g\Delta h_{CM} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

da cui:

$$\Delta h_{CM} = \frac{I\omega^2}{2(m+M)g}$$

Esercizio 2



Una carica negativa Q è distribuita omogeneamente nel guscio sferico di raggio interno $R_1 = 0.1$m e raggio esterno $R_2 = 0.2$m. La differenza di potenziale tra i punti a distanza R_2 e quelli a distanza R_1 è $|V_2 - V_1| = 200$V.

Si calcoli:

a) Quanto vale la carica Q :

$$Q = \text{...........................}$$

b) Il potenziale dei punti distanti R_1 dal centro (si assuma $V_\infty = 0$):

$$V_1 = \text{...........................}$$

c) La densità di energia elettrostatica di un punto P distante $2R_2$ dal centro della sfera:

$$u_e = \text{...........................}$$

Soluzione

a) All'interno della sfera, dove non è presente alcuna carica elettrica, il campo elettrico è nullo per motivi di simmetria e per il teorema di Gauss. Per gli stessi motivi possiamo affermare che il campo elettrico è radiale e dipende solamente dal raggio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} \tag{1}$$

Nella zona dove è presente la carica ($R_1 < r < R_2$) il campo elettrico si può ottenere dal teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

dove il volume è quello di un guscio sferico di raggio interno R_1 e raggio estero r. Il flusso di campo elettrico che attraversa la superficie interna è nullo, perchè non è presente alcun campo elettrico. Sulla superficie esterna invece il flusso vale invece:

$$\oint_{ext} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S = 4\pi r^2 E(r)$$

dove è stata utilizzata la proprietà (1).

Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} V_{guscio} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - R_1^3\right)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - R_1^3\right) \Longrightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

Per ottenere la differenza di poteziale ai capi del guscio sferico, si calcola:

$$\Delta V = V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_2}^{R_1} E(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_1} E(r) dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr$$

L'integrale si può svolgere come:

$$\int_{R_2}^{R_1} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr = \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right)_{R_2}^{R_1} = \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}$$

da cui

$$\Delta V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2} \right)$$

e quindi:

$$\rho = 3\epsilon_0 \Delta V \left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2} \right)^{-1}$$

da cui si trova la carica totale Q:

$$Q = \frac{4}{3}\pi \left(R_2^3 - R_1^3 \right) \rho$$

b) All'esterno della sfera il campo elettrico è quello di una carica puntiforme. Pertanto a $r = R_2$ il potenziale vale:

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

da cui:

$$V_1 = V_2 - \Delta V$$

c) il campo elettrico alla distanza $2R_2$ è pari a:

$$E(2R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4R_2^2}$$

$$u_e(2R_2) = \epsilon_0 \frac{E^2(2R_2)}{2}$$