Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 5/07/2013
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

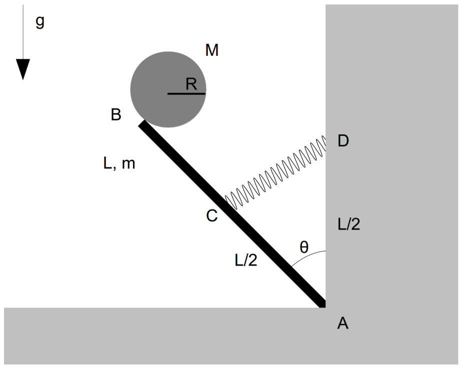

Figura 1:

a) Fissando l'asse x lungo l'asta, e l'origine degli assi nel punto A, otteniamo che il centro di massa ha coordinate:

$$\begin{cases} x_{CM} & = \frac{M\cdot L + m\cdot L/2}{M+m} = 0.875\,\mathrm{m} \\ y_{CM} & = \frac{M\cdot R + m\cdot 0}{M+m} = 0.188\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Pertanto la distanza $\overline{OA}$ è pari a:

$$\overline{OA} = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2} = 0.895\,\mathrm{m}$$

L'angolo compreso tra il segmento $\overline{OA}$ e l'asta è:

$$\theta_0 = \arctan\frac{y_{CM}}{x_{CM}} = 0.211\,\mathrm{rad}$$

b) Il sistema è in equilibrio stabile e quindi è in un minimo dell'energia potenziale. L'energia potenziale gravitazionale del sistema è data da:

$$E_{gravit}(\theta) = (M+m)\cdot g\cdot h_{CM} = (M+m)\cdot g\cdot \overline{OA}\cdot\cos(\theta-\theta_0)$$

L'energia potenziale elastica è invece determinata da:

$$E_{molla}(\theta) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\big((L/2\cdot\sin\theta)^2 + (L/2\cdot(1-\cos\theta))^2\big) = \frac{1}{2}k(L/2)^2(2-2\cos\theta)$$

Imponiamo il minimo dell'energia potenziale:

$$\frac{d\,(E_{gravit}(\theta)+E_{molla}(\theta))}{d\,\theta} = -(M+m)\cdot g\cdot\overline{OA}\cdot\sin(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}k(L/2)^2 2\sin\theta = 0$$

Da cui si ottiene la relazione:

$$k = \frac{(M+m)\cdot g\cdot\overline{OA}\cdot\sin(\theta-\theta_0)}{(L/2)^2(\sin\theta)} = 86.3\,\mathrm{N/m}$$

c) L'energia potenziale dell'asta, subito dopo la rottura della molla e quando tocca terra, è pari a:

$$\begin{aligned} E_{gravit}^{iniz} &= (M+m)\cdot g\cdot h_{CM} = (M+m)\cdot g\cdot\overline{OA}\cdot\cos(\theta-\theta_0) = 33.4\,\mathrm{J} \\ E_{gravit}^{fin} &= (M+m)\cdot g\cdot h_{CM} = (M+m)\cdot g\cdot\overline{OA}\cdot\cos(\pi/2-\theta_0) = 7.36\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Per la conservazione dell'energia, l'energia cinetica finale è pari alla variazione di energia potenziale (inizialmente l'asta è ferma):

$$E^{fin}_{gravit} - E^{iniz}_{gravit} = E^{fin}_{cinetica} = \frac{1}{2} I \omega^2_{fin} \Longrightarrow \omega_{fin} = \sqrt{\frac{2E^{fin}_{gravit} - 2E^{iniz}_{gravit}}{I}} = 3.81\,\mathrm{rad/s}$$

Dove I è stato calcolato come:

$$I = \frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M(L^2 + R^2) = 3.60\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Quindi la velocità del punto B si può calcolare come:

$$v_B = \omega_{fin} \cdot L = 3.81\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio 2

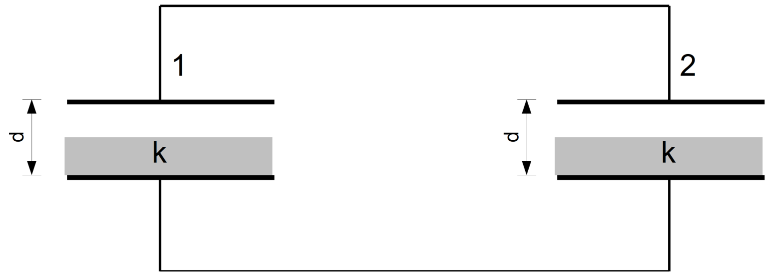

Figura 2:

a) Ogni singolo condensatore è schematizzabile come due condensatori, il primo con dielettrico e il secondo senza, disposti in serie e di spessore $d/2$. La capacità totale dei singoli condensatori è quindi data da:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{dielettrico}} + \frac{1}{C_{vuoto}} = \frac{d/2}{\epsilon_0 A}\left(\frac{1}{\epsilon_r} + 1\right) \Longrightarrow C_1 = C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d/2}\frac{1}{\frac{1}{\epsilon_r} + 1} = 47.2\,\mathrm{pF}$$

Dove è stata utilizzata la relazione $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$. I due condensatori, essendo in parallelo, hanno la stessa differenza di potenziale:

$$\Delta V_{armature} = \frac{q_{iniziale}}{C_1} = \frac{q_{iniziale}}{C_2} = 127\,\mathrm{MV}$$

b) .

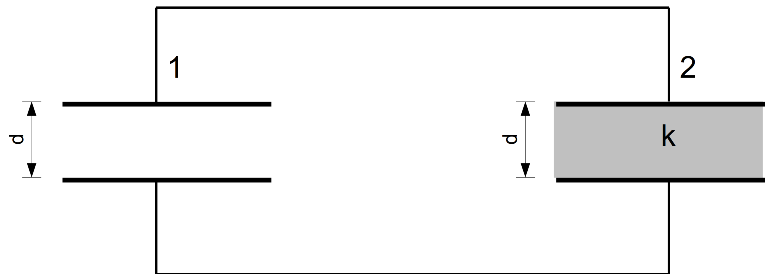

Figura 3:

I due condensatori in parallelo devono mantenere la condizione $\Delta V_1 = \Delta V_2 \Longrightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$. Per la conservazione di carica deve anche valere $q_1 + q_2 = 2\,q_{iniziale}$, dove $q_{iniziale}$ è la carica iniziale presente nelle armature. Dalle due relazioni è quindi possibile ottenere le cariche finali q_1 e q_2:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C_1} = & \frac{q_2}{C_2} \\ q_1 + q_2 = & 2\,q_{iniziale} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = & \frac{2q_{iniziale}}{1+\frac{C_2}{C_1}} = 4.0\,\mathrm{mC} \\ q_2 = & \frac{2q_{iniziale}}{1+\frac{C_1}{C_2}} = 8.0\,\mathrm{mC} \end{cases}$$

dove $C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 35.4\,\mathrm{pF}$ e $C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 70.8\,\mathrm{pF}$.

b) L'energia elettrostatica di un condensatore è data da: $E_{cond} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$. Pertanto la differenza di energia elettrostatica del sistema è data da:

$$\Delta E_{elettrostatica} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_{finale}^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_{finale}^2 - 2\frac{1}{2} C_{iniziale} \Delta V_{iniziale}^2 = -84\,\mathrm{KJ}$$

dove $C_{iniziale}$, $V_{iniziale}$, C_1, C_2 sono già state calcolate nei punti precedenti; mentre ΔV_{finale} è stata calcolata come: $\Delta V_{finale} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = 113\,\mathrm{MV}$.