Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 04/02/2013

Soluzione esercizio 1

a) Per la conservazione dell'energia abbiamo che:

$$E_{iniziale} = E(t)$$

$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + E_b^i = \frac{1}{2}m|v(t)|^2 + E_b(t)f$$

$$|v^f(t)| = \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{E_b^i - E_b(t)}{m}}$$

Considerando che per l'energia della batteria vale la relazione $\frac{dE_b(t)}{dt} = -P$, abbiamo che $E_b(t) = E_b^i - P \cdot t$. Quindi la velocità è data da:

$$|v^f(t)| = \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}$$

b) L'accelerazione $a(t)$ è la derivata rispetto al tempo della velocità $v(t)$. Sostituendo $v(t)$ si ottiene:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}} = \frac{1}{2\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}} \cdot 2\frac{P}{m} = \frac{P/m}{\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}}$$

La legge oraria $x(t)$ è invece data dall'integrale di $v(t)$:

$$x(t) = \int_0^t v(T)dT = \int_0^t \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot T}{m}}dT$$

per risolvere l'integrale basta cambiare la variabile nel seguente modo:

$$\begin{cases} T' = v_i^2 + 2\frac{P \cdot T}{m} \\ dT' = 2\frac{P}{m}dT \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$x(t) = \int_{v_i^2}^{v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}} \sqrt{T'} \cdot \frac{m}{2P}dT' = \frac{m}{2P}\left[\frac{T'^{3/2}}{3/2}\right]_{v_i^2}^{v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}} = \frac{m}{3P}\left[\left(v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}\right)^{3/2} - \left(v_i^2\right)^{3/2}\right]$$

c) Se la macchina avesse un recupero totale dell'energia sarebbe valida la relazione:

$$E^f = E^i$$

$$E^i_{cinetica} + E^i_{gravitazionale} + E^i_b = E^f_{cinetica} + E^f_{gravitazionale} + E^f_b$$

$$\Delta E_b = E_b^f - E_b^i = E^f_{gravitazionale} - E^i_{gravitazionale} = mg(h^f - h^i) = mg\Delta h$$

dove $E^i_{cinetica} = E^f_{cinetica}$, perchè la velocità rimane costante. La macchina recupera soltanto il 40% dell'energia disponibile per cui l'energia recuperata è pari a:

$$E_{rec} = 40\% \cdot mg\Delta h$$

Per procedere a velocità costante la macchina applicherà una forza F_a tale da annullare la componente della forza peso parallela al piano inclinato: $F + mg\sin\alpha = 0$, per cui:

$$F = -mg\frac{\Delta h}{l}$$

perchè $\sin\alpha = \frac{\Delta h}{l}$. Considerando che il 40% dell'energia viene assorbita dal sistema di recupero, la forza applicata dai normali freni sarà pari a:

$$F_a = 60\% \cdot \left(-mg\frac{\Delta h}{l}\right)$$

d) La potenza fornita dalla macchina è pari al lavoro fatto nell'unità di tempo: $P = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{FdS(t)}{dt} = Fv$. La forza applicata dalla macchina per mantenere la velocità costante è, in modulo, pari alla componente della forza peso parallela al piano inclinato: $F_{CD} = mg\sin\theta$, per cui:

$$P_{CD} = F_{CD} \cdot v = mg\sin\theta \cdot v$$

Il tempo impiegato per raggiungere il punto D sarà pari a: $t_{CD} = d_{CD}/v$. L'energia consumata dalla macchina è quindi pari a: $\Delta E_b^{CD} = P_{CD} \cdot t = P_{CD} \cdot d_{CD}/v$.

L'energia finale contenuta nella batteria sarà pari a:

$$E_b^f = E_b^i - P \cdot t_{AB} + E_{rec}^{BC} - \Delta E_b^{CD}$$

dove $P \cdot t_{AB}$ corrisponde all'energia utilizzata nel primo tratto.

Soluzione esercizio 2

a) Per definizione il flusso del campo magnetico è dato da:

$$\Phi_B = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Dove $\vec{S}$ è un vettore diretto perpendicolarmente alla superficie ABCD e ha modulo pari a $|\vec{S}| = l \cdot d$, dove l è la distanza tra i punti AD. L'angolo compreso fra i vettori $\vec{S}$ e $\vec{B}$ è pari a $90° - \alpha$, pertanto abbiamo che:

$$|\Phi_B| = ld\cos(90° - \alpha) = ld\sin\alpha.$$

La forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico si può calcolare come:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dl}{dt}dB\sin\alpha = -vdB\sin\alpha.$$

Sostituendo questa relazione in $I = \frac{\epsilon}{R}$ si ottiene:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{vdB\sin\alpha}{R}$$

da cui si ricava:

$$|v(I)| = \frac{IR}{dB\sin\alpha}$$

b) Derivando $|v(I)|$ si ottiene:

$$|a(I)| = \frac{dv}{dt} = \frac{R}{dB\sin\alpha}\frac{dI}{dt}$$

c) Le forze che agiscono sul cilindretto sono: la forza di Lorentz, la forza peso e la reazione delle rotaie.

La forza di Lorentz si può calcolare dalla relazione $\vec{F_B} = I\ \vec{d} \times \vec{B}$ e, dato che i vettori $\vec{d}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro, la forza ha modulo $F_B = IdB$ ed è diretta verso l'alto. Si noti che il verso della corrente indotta è tale da opporsi alla variazione del flusso del campo magnetico.

La forza peso è pari a $\vec{F_g} = m\vec{g}$, mentre la reazione $\vec{N}$ delle rotaie è perpendicolare al piano ed è tale da annullare la forza totale che agisce in questa direzione.

La forza totale è quindi parallela al piano ed è pari a:

$$F_{tot} = mg\sin\theta - IdB\sin\theta$$

dove è stato scelto come verso positivo il verso di $\vec{AD}$.

d) Sostituendo alla relazione $F = ma$ la forza ottenuta al punto c) e l'accelerazione del punto d) si ottiene:

$$F = m \cdot a$$

$$mg\sin\theta - IdB\sin\theta = m \cdot \frac{R}{dB\sin\alpha}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dgB\sin^2\theta}{R} - \frac{d^2B^2\sin^2\theta}{Rm}I$$

La soluzione di questa equazione differenziale è data da:

$$I(t) = \left(I(0) - \frac{mg}{Bd}\right)e^{-\frac{d^2B^2\sin^2\theta}{Rm}\cdot t} + \frac{mg}{Bd}.$$

dove $I(0) = 0$.

La corrente limite è data da $I(t \to \infty) = \frac{mg}{Bd}$. La velocità limite è parallela al piano e ha modulo pari ha:

$$|v(t \to \infty)| = \frac{mg}{Bd} \cdot \frac{R}{dB \sin \alpha} = \frac{mgR}{d^2 B^2 \sin \alpha}$$

e) Se si invertisse la direzione del campo B anche la corrente indotta risulterebbe invertita. Questo fa si che la forza di Lorentz non cambierebbe e il problema avrebbe quindi gli stessi risultiati.