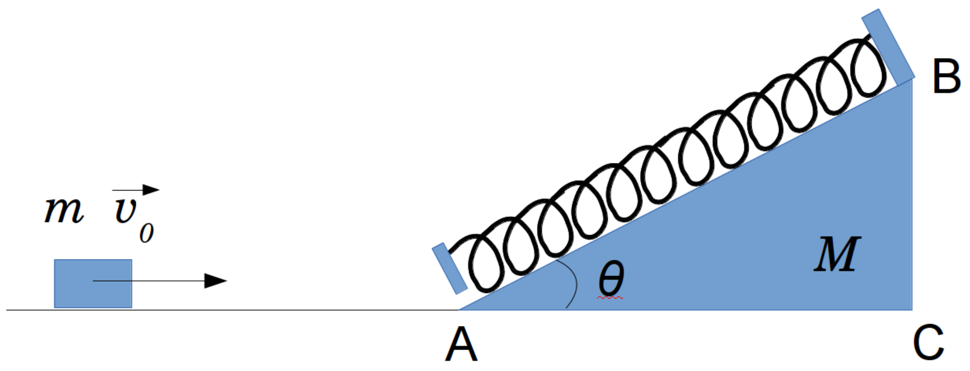
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 26/07/2013
SOLUZIONI

Esercizio 1



Un corpo di massa $m = 500$ g si muove scivolando senza attrito con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale fino a quando incontra un piano inclinato di massa $M = 10$ kg, angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$, libero anche esso di muoversi senza attrito sul piano orizzontale. Il piano inclinato è inizialmente fermo.
All'estremo B del piano inclinato, come mostrato in figura, è fissata una molla di costante elastica $K = 15\ N/m$ e lunghezza a riposo pari ad $\overline{AB}$. La superficie di AB è scabra ed esercita una forza d'attrito tra i due corpi.

Calcolare:

a) L'altezza massima raggiunta dal corpo m sul piano inclinato supponendo di conoscere l'energia disspiata dalla forza di attrito $E_{diss} = 10$ J

La variazione di energia meccanica del sistema è uguale all'energia dissipata dall'attrito. Quando il corpo di massa m giunge all'altezza massima esso sarà fermo rispetto al piano inclinato, ovvero i due corpi si muoveranno entrambi con la stessa velocità che indichiamo v_f.
Inoltre visto che l'unica forza esterna al sistema è la forza di gravità che ha solo componente verticale, la quantità di moto lungo l'asse orizzontale sarà conservata. Da questo possiamo ricavare che

$$mv_0 = (m + M)v_f$$

ovvero

$$v_f = \frac{m}{m + M}v_0$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$-E_{diss} = \Delta E_{mecc} = E_f - E_i = mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}(m + M)v_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

sostituendo v_f, $h = \Delta x \cdot sin\theta$ si ottiene

$$-E_{diss} = mg\Delta x\ sin\theta + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v_o^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

riscrivendo

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 + (mg\ sin\theta)\Delta x + \frac{1}{2}m(\frac{m}{m + M}v_o^2 - v_0^2) + E_{diss} = 0$$

si può risolvere per Δx

$$\Delta x = \frac{-mg\ sin\theta \pm \sqrt{(mg\ sin\theta)^2 - km(\frac{m}{m+M}v_o^2 - v_0^2 + 2E_{diss}/m)}}{k}$$

scegliamo l'unica soluzione positiva visto che avevamo posto $h = \Delta x \cdot sin\theta$ e che h deve essere positiva. Ovvero $\Delta x = 1.2m$, da cui

$$h_{max} = \Delta x sin\theta = 0.6\ m$$

c) La velocità del piano inclinato quando il corpo di massa m ritorna a muoversi sul piano orizzontale

Quello che succede tra la condizione iniziale e quella finale può essere visto come un urto anaelastico in cui viene dissipata un energia $2E_{diss}$. Si può quindi risolvere imponendo le condizioni sulla variazione dell'energia e sulla conservazione della quantità di moto. Indicando con v_1 e v_2 le velocità finali dei due corpi possiamo scrivere

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$$

e

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + 2E_{diss}$$

mettendo a sistema e risolvendo si ottiene

$$\frac{M+m}{M}v_1^2 - 2v_0\frac{m}{M}v_1 - v_0^2 + \frac{m}{M}v_0^2 + 4E_{diss}/m = 0$$

da cui risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$v_1 = (4.28, -3.33)\ m/s$$

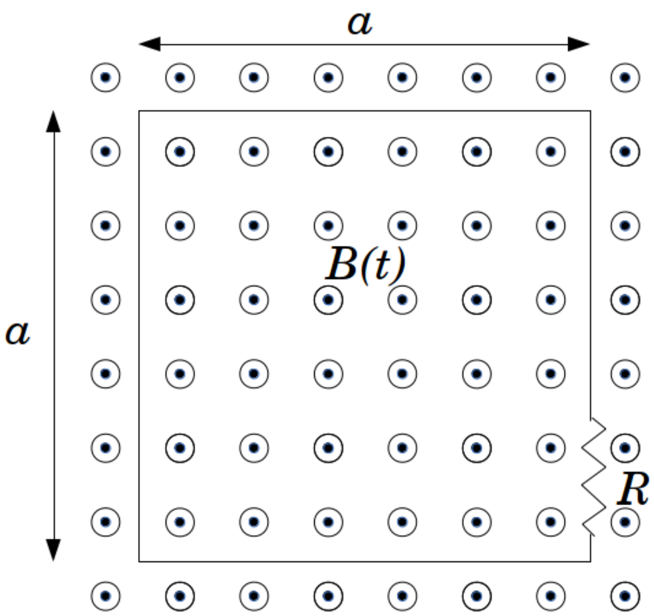
in questo caso scegliamo la soluzione tale per cui il blocco di massa m si allontana verso sinistra rispetto al piano inclinato, ovvero la soluzione per cui si ottiene $v_1 < v2$, considerando che v_2 vale rispettivamente, a seconda del valore di v_1 usato:

$$v_2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1) = (0.28, 0.67)\ m/s$$

la coppia che verifica $v_1 < v_2$ è

$$v_1 = -3.5\ m/s \qquad v_2 = 0.67\ m/s$$

Esercizio 2



Una spira conduttrice quadrata di lato $a = 10$ cm si trova immersa in una regione nella quale il campo magnetico è inizialmente nullo. Un tratto della spira di lunghezza $d = 2$ cm ha una resistività $\rho = 10^{-2}\Omega m$ e sezione $S = 1\ mm^2$ mentre il resto della spira ha resistività trascurabile.
Ad un dato istante $t = 0$ l'intera regione viene interessata da un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla spira, come mostrato in figura. Il campo $B(t)$ aumenta nel tempo secondo la relazione $\frac{dB}{dt} = Kt$. Sapendo che all'istante $t_1 = 10$ s nella spira circola una corrente di 0.15 mA e trascurando i fenomeni di autoinduzione, si calcoli:

a) Il valore di $B(t)$ per $t = t_1$ e il valore di K

La variazione di B crea una forza elettro motrice nel circuito

$$\epsilon = \frac{d\phi_B}{dt} = a^2 Kt$$

All'istante t_1 nel circuito fluisce una corrente $I = 1.5 \cdot 10^{-3}A$ e deve essere soddisfatta l'equazione

$$\epsilon = IR = I\frac{\rho d}{S}$$

da cui si ricava

$$a^2 K t_1 = I\frac{\rho d}{S} \Rightarrow K = I\frac{\rho d}{a^2 S t_1} = 0.3T/s^2$$

Il valore di B si ricava integrando la sua derivata e ponendo la condizione che $B(0) = 0$, ovvero

$$B(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{dB}{dt}dt = \int_0^{t_1} Ktdt = \frac{1}{2}Kt_1^2 = 15T$$

b) La carica complessiva circolata nella spira nei primi 10 s La carica circolata si può calcolare integrando la corrente nel dato intervallo di tempo. Visto che

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} = \frac{a^2 Kt}{R}$$

la carica sarà

$$Q = \int_0^{t_1} I(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{a^2 Kt}{R}dt = \frac{a^2 K}{2R}t_1^2 = 750\ \mu C$$

c) L'energia dissipata per effetto joule nello stesso intervallo di tempo La potenza istantanea dissipata al tempo t è

$$P(t) = \frac{\epsilon(t)^2}{R} = \frac{a^4 K^2 t^2}{R}$$

integrando sull'intervallo dato

$$E = \int_0^{t_1} P(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{a^4 K^2 t^2}{R}dt = \frac{1}{3}\frac{a^4 K^2}{R}t_1^3 = 15\ \mu J$$

(punteggio: 2.a-c = 5 punti)