Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 15/01/2013
Soluzioni

Soluzione esercizio 1

a) Per la conservazione dell'energia abbiamo che:

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$
$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + mgh^i = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + mgh^f$$
$$mg(h^i - h^f) = \frac{1}{2}m|v^f|^2$$
$$|v^f| = \sqrt{2g(h^i - h^f)} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

dove sono state utilizzate le relazioni: $|v^i| = 0$ e $h^i - h^f = R - R\cos\theta$.

Finchè il cilindro non si staccherà dalla guida, la velocità è tangenziale alla guida stessa. Ovvero:

$$v_x^f = |v^f|\cdot\cos\theta = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\cdot\cos\theta$$
$$v_y^f = -|v^f|\cdot\sin\theta = -\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\cdot\sin\theta$$

b) La forza F che la guida esercita sul cilindro è radiale. La somma delle forze lungo questa direzione è tale da mantenere il cilindro in una traiettoria circolare:

$$\Sigma F_{rad} = ma_{centripeta}$$
$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{v^2}{R}$$
$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{2gR(1-\cos\theta)}{R})$$
$$F = mg(3\cos\theta - 2)$$

c) Il cilindro si stacca dalla guida quando la forza F esercitata dalla guida si annulla:

$$F = 0$$
$$mg(3\cos\theta_{max} - 2) = 0$$
$$\cos\theta_{max} = \frac{2}{3}$$
$$\theta_{max} = \arccos\frac{2}{3}$$

d) Dopo il distacco l'unica forza a cui è sottoposto il cilindro è la forza peso. Si avrà quindi un moto uniforme lungo l'asse x e un moto uniformente accelerato lungo l'asse y. Per questo avremo che:

$$v_x^f = v_x^{dist} = v(\theta_{max})\cdot\cos\theta_{max} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_{max})}\cdot\cos\theta_{max} = \sqrt{2gR(1-\frac{2}{3})}\cdot\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}\cdot\frac{2}{3} = 2.9m/s$$

dove v_x^{dist} indica la componente x della velocità nel momento di distacco dalla guida.

Dalla conservazione dell'energia si ottiene che il cilindro toccherà terra con una velocità:

$$|v^f| = \sqrt{2gR}$$

e quindi, usando il teorema di Pitagora, abbiamo che:

$$|v_y^f| = \sqrt{|v^f|^2 - |v_x^f|^2} = \sqrt{2gR - \frac{2gR}{3}\cdot\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{46}{27}gR} = 6.9m/s$$

Il tempo Δt di caduta del cilindro sarà dato dalla relazione:

$$\Delta t = \frac{|v_x^f| - |v_y^{dist}|}{g} = 0.38s$$

dove v_y^{dist}, la velocità lungo l'asse y del cilindro al momento del distacco dalla guida, si può calcolare come:

$$|v_y^{dist}| = -\sqrt{2gR(1-\cos\theta_{max})}\cdot\sin\theta_max = -\sqrt{2gR(1-\frac{2}{3})}\cdot\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2} = -\sqrt{\frac{10}{27}gR}$$

e) Nel caso in cui il cilindro rotoli senza strisciare dalla conservazione dell'energia, analogamente al punto a), si ottiene che:

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$
$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + \frac{1}{2}I|\omega^i|^2 + mgh^i = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + \frac{1}{2}I|\omega^f|^2 + mgh^f$$
$$mg(h^i - h^f) = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{|v^f|^2}{R^2} = \frac{3}{2}mR^2\cdot\frac{|v^f|^2}{R^2}$$
$$|v^f| = \sqrt{\frac{4}{3}g(h^i - h^f)} = \sqrt{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}$$

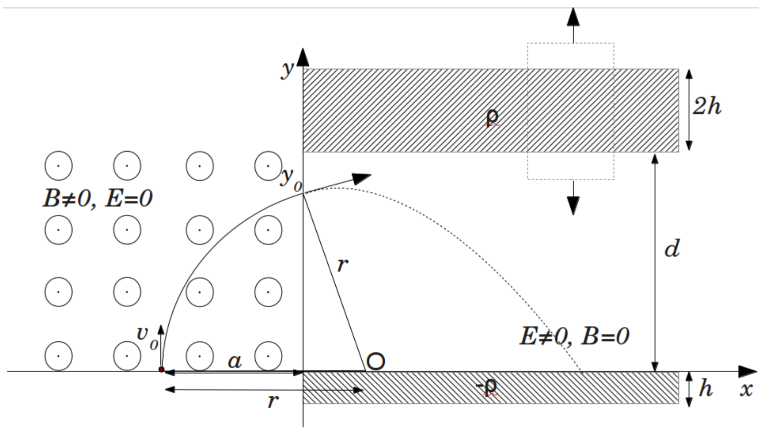
f) Analogamente al punto b), la forza vincolare F delle guida sarà data da:

$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{v^2}{R}$$
$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}{R})$$
$$F = \frac{mg}{3}(7\cos\theta - 4)$$

Imponendo $F = 0$ si ottiene

$$7\cos\theta_{max} - 4 = 0$$
$$\cos\theta_{max} = \frac{4}{7}$$
$$\theta_{max} = \arccos\frac{4}{7}$$

Soluzione Esercizio 2



Il campo magnetico generato dal solenoide è

$$|B| = \mu_o \cdot n \cdot I = 0.1T$$

Il campo elettrico generato da una lastra per le simmetrie del problema deve essere diretto ortogonalmente alla lastra e deve avere la stessa intensità sopra e sotto la lastra.Per calcolarne il modulo si consideri un superficie cilindrica indicata in figura con una linea tratteggiata, questa contiene una carica $Q = A\cdot 2h\cdot\rho$. Utilizzando il teorema di Gauss si ottiene che $2 * E * A = Q/\epsilon_0$ da cui segue che $E = \frac{2h\rho}{2\epsilon_0}$. Similmente per l'altra lastra si ottiene $E = \frac{h\rho}{2\epsilon_0}$. Considerando il segno delle densità di carica delle due lastre il risultante campo è:

$$E_x, E_y, E_z = (0, \frac{3h\rho}{2\epsilon_0}, 0) = (0, 170V/m, 0)$$

Il moto nella prima regione è circolare uniforme in quanto la forza, e quindi l'accelerazione, è sempre ortogonale alla velocità e costante in modulo.
Il moto nella seconda regione è uniformemente accelerato lungo y in quanto il campo elettrico è uniforme (e quindi anche $F = Eq$ e $a = F/m = Eq/m$). Lungo x è uniforme in quanto non ci sono forze lungo x. La risultante traiettoria è una parabola.

Il raggio di curvatura nella prima regione si calcola da

$$|F| = qVB, F = ma = mV^2/R \Rightarrow qVB = mV^2/R$$

da cui

$$R = \frac{qB}{mV} = 0.01m$$

La traiettoria è come detto circolare, in particolare sarà una circonferenza di raggio R, centrata sul punto **O** mostrato in figura. Considerando che la velocità iniziale nel punto $(-a, 0)$, e quindi la tangente alla traiettoria, hanno direzione verticale, si può ricavare che il centro della circonferenza si trova sull'asse delle x ad una distanza R dal punto $(-a, 0)$ quindi in posizione $O = (-a + R, 0)$.

Il punto in cui si passa da una regione all'altra, y_0, si può ricavare, applicando il teorema di pitagora allo schema in figura, come

$$y_0 = \sqrt{R^2 - (R-a)^2} = 0.005m$$

L'angolo percorso si può scrivere come $cos(\theta) = \frac{r-a}{r} = 1 - a/r$, da cui segue che il vettore velocità sarà:

$$v(x = 0) = (v_0 cos(\theta), v_0 sin(\theta)) = (4900, 8700)m/s$$

Il seguente moto parabolico raggiunge un massimo,y_{max}, in direzione della lastra caricata positivamente, per poi scendere verso la lastra caricata negativamente. Per capire quale lastra colpisce bisogna vedere se $y_{max} < d$. Nel punto di massimo $v_y = 0$, quindi da $v_y(t) = v_y(x = 0) + at$ si ricava

$$t_{max} = -\frac{v_y(x=0)}{a} = \frac{v_y(x=0)}{Eq/m} = 5 \cdot 10^{-7}s$$

e l'altezza raggiunta

$$y(t_{max}) = y(x = 0) + v_y(x = 0)t_{max} + \frac{1}{2}at_{max}^2 = 0.007m < 0.01m$$

quindi non arriva a colpire la lastra superiore.

Il tempo t_f a cui raggiunge la lastra inferiore si ricava prendendo la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado ottenuta da

$$y(t_f) = y(x = 0) + v_y(x = 0)t_f + \frac{1}{2}at_f^2 = 0$$

e risulta essere $t_f = 1.4 \cdot 10^{-6}$s.
Poiche il moto lungo x è uniforme, la posizione finale sarà

$$(v_0(x = 0) \cdot t_f, 0) = (0.007m, 0)$$