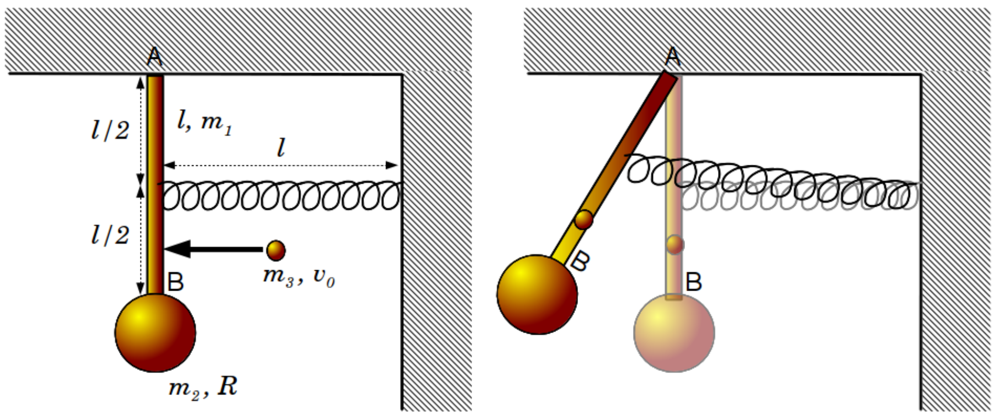
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 18/06/2013
Soluzioni

Esercizio 1



Un'asta omogenea di lunghezza $l = 1$ m e massa $m_1 = 1$ Kg è appesa al soffitto nel punto A e può oscillare senza attrito nel piano verticale. All'altro estremo dell'asta, B, è saldata una sfera di massa $m_2 = 500$ g e raggio $R = 10$ cm. Nel punto medio dell'asta, a distanza $l/2$ da A e B, è collegata una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo l uguale a quella dell'asta) che, all' altro estremo e' fissata alla parete verticale. La distanza iniziale fra asta e parete verticale e' l ed il sistema e' inizialmente in quiete. Ad un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m_3 = 10$ g e velocità $v_0 = 100$ m/s orizzontale colpisce l'asta nel punto distante $3/4l$ dal soffitto e rimane conficcato nell'asta.

Calcolare:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto

$$\omega = \mathbf{0.79\ rad/s}$$

La quantià di moto del sistema asta, sfera e proiettile non è conservata in quanto il vincolo che incerniera l'asta in A esercita una forza impulsiva durante l'urto. Il momento angolare rispetto al polo in A è invece conservato in quanto la forza impulsiva di cui sopra ha braccio nullo.

In particolare possiamo scrivere la componente assiale del momento angolare L_Z^i prima dell'urto come

$$L_Z^i = m_3 v_0 \frac{3}{4} l$$

Il momento angolare dopo l'urto si può scrivere come

$$L_Z^f = I\omega$$

dove I e' il momento di inerzia totale del sistema che si può scrivere come

$$I = I_{proiettile} + I_{pendolo} = I_{proiettile} + I_{sfera} + I_{asta} =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + I_{sfera}^{CM} + I_{CM\ sfera} + I_{asta}^{CM} + I_{CM\ asta} =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{2}{5}m_2R^2 + m_2(l+R)^2 + \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1l^2/4 =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{2}{5}m_2R^2 + m_2(l+R)^2 + \frac{1}{3}m_1l^2 = 0.946\ Kg\ m^2$$

Si può quindi ricavare ω imponendo la conservazione del momento angolare assiale $L_Z^i = L_Z^f$:

$$\omega = \frac{m_3 v_0 3l}{4I}$$

b) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto del proiettile

$$P = \mathbf{0.16\ N\ s}$$

L'impulso assorbito dal vincolo equivale alla differenza di quantità di moto del sistema subito dopo l'urto rispetto a prima dell'urto.

$$P = m_3 v_0 - (m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3)$$

dove le velocità v_i possono essere calcolate date ω (trovata al punto precedente) e le distanze dei centri di massa dei tre corpi dal polo A, quindi

$$P = m_3 v_0 - (m_1 \omega \frac{l}{2} + m_2 \omega (l+R) + m_3 \omega \frac{3}{4} l)$$

c) la velocità del proiettile v_0 necessaria affinchè la sfera raggiunga un'altezza pari a $l/2$ rispetto alla sua altezza iniziale, i.e. $h_2 = l/2$

$$v_0^{min} = \mathbf{436\ m/s}$$

Considerando che il vincolo in A non può compiere lavoro e che le rimanenti forze in gioco sono la forza di gravità e la forza elastica della molla, entrambe conservative, possiamo scrivere un'energia potenziale

$$U = U_k + U_g = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + g(m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3).$$

Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica e sapendo che per arrivare all'altezza indicata e' necessaria un'energia cinetica minima (e quindi una velocità iniziale minima) tale che

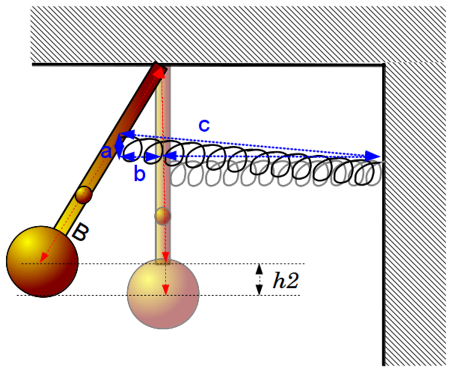
$$U(h_2 = \frac{l}{2}) + 0 = 0 + E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} = \frac{m_3 v_0 3l}{4I}$$

quindi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} \frac{4I}{m_3 3l}$$

dobbiamo solo calcolare $U(h_2 = \frac{l}{2})$, ovvero l'energia potenziale per l'altezza indicata.
Si tratta quindi di esprimere Δx, h_1 e h_3 in funzione di h_2 visto che ci viene dato il valore di h_2.

Le relazioni geometriche in questione si possono ricavare dalle costruzioni in figura:



In particolare è utile ricavare l'angolo θ compiuto dalla sbarretta in funzione di h_2 :

$$h_2 = (l+R)(1 - cos\theta) \Rightarrow (1 - cos\theta) = \frac{h_2}{l+R} \Rightarrow \theta = arccos(1 - \frac{h_2}{l+R})$$

inserendo i valori numerici otteniamo $\theta = 0.99$.

$$\Delta x = c - l = \sqrt{a^2 + (b+l)^2} - l$$

con a, b e c indicati in figura e che possiamo scrivere come

$$a = \frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

$$b = \frac{l}{2} sin\theta$$

da cui $\Delta x = 44$ cm.
Per finire h_1 e h_3 risultano essere

$$h_1 = \frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

$$h_3 = \frac{3l}{4}(1 - cos\theta).$$

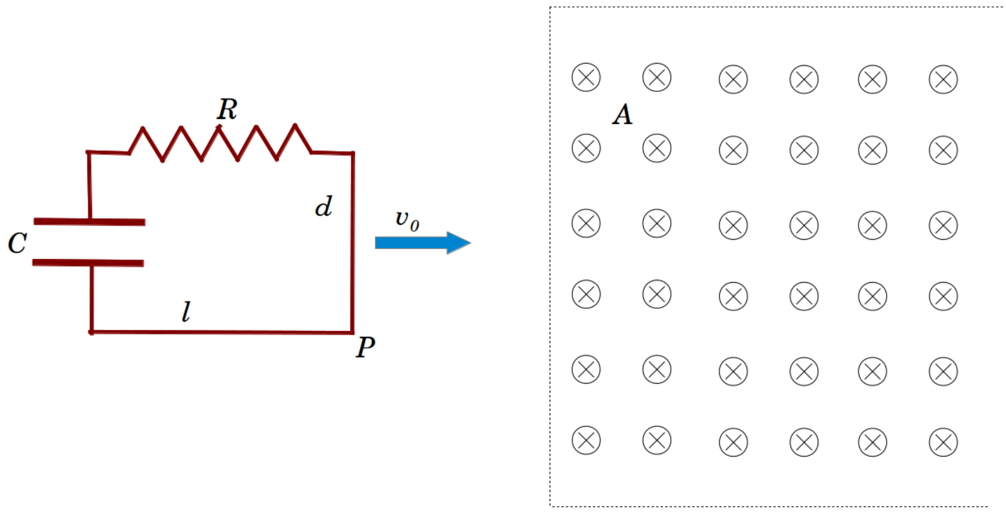
Possiamo quindi calcolare il valore di U all'altezza h_2 data, che risulta essere $U = 5.67$ J

La velocità minima del proiettile si ottiene sostituendo U nella formula precedentemente ricavata

$$v_0^{min} = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} \frac{4I}{m_3 3l}$$

(punteggio: 1.a-c = 5 punti)

Esercizio 2



Un circuito rettangolare di lati $l = 20$ cm e $d = 10$ cm si muove con velocità costante $v_0 = 10$ m/s nel piano e raggiunge una zona A nella quale è presente un campo magnetico costante B di 5 Tesla perpendicolare al piano . Una forza opportuna viene applicata al circuito quando entra nella zona interessata dal campo magnetico per cui il circuito continua a spostarsi con velocità costante v_0 anche nella zona A. Nel circuito è presente una resistenza R di 10 $K\Omega$ ed un condensatore cilindrico di altezza d con armatura interna di raggio 1 cm ed armatura esterna distante 10μm da quella interna (ovvero $r_{ext} = r_{int} + 10\mu$m) inizialmente scarico. Tra le armature del condensatore è presente un dielettrico con costante relativa $\epsilon_R = 80$

Calcolare:

a) Il potenziale ai capi del condensatore quando l'estremo P del circuito ha percorso un tratto $l/2$ nella zona interessata dal campo magnetico

$$\Delta V = \mathbf{4.47V}$$

La f.e.m. indotta sul circuito dalla variazione del flusso di campo magnetico risulta essere

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

poiché v_0 è costante e dato che mentre il circuito entra nella zona A si può scrivere il flusso come

$$\Phi_B = Bdv_0t$$

la f.e.m. risulta essere costante e uguale a

$$\epsilon = -Bdv_0$$

Il condensatore si caricherà quindi attraverso la resistenza R secondo la soluzione dell'equazione differenziale ottenuta dalla legge di Kirkhoff per le tensioni e dalla definizione di capacità di un condensatore:

$$0 = I(t)R + \Delta V(t) - \epsilon = I(t)R + \frac{Q}{C} - \epsilon$$

ovvero

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\epsilon}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = \epsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Il tempo necessario al circuito a precorrere un tratto $\frac{l}{2}$ è

$$t_{l/2} = \frac{l}{2v_0}.$$

Quindi la tensione ai capi del condensatore sarà

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = -Bdv_0(1 - e^{-\frac{l}{2v_0RC}})$$

b) La potenza istantanea dissipata in quell' istante dalla resistenza.

$$P = \mathbf{27}\ \mu\mathbf{W}$$

Questa si può calcolare da $I(t)R + \Delta V(t) - \epsilon = 0$ sapendo che la potenza dissipata da una resistenza per effetto Joule è $P = I^2 R$, quindi

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V(t) - \epsilon)^2}{R}$$

c) Il lavoro compiuto dalla forza fino a quel momento.

$$L = \mathbf{9.9}\ \mu\mathbf{J}$$

Il lavoro compiuto dalla forza sarà uguale alla somma dell'energia potenziale del condensatore in quel momento e dell'energia dissipata dalla resistenza fino a quel momento

$$L = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \int_0^t R I(t)^2 dt$$

Derivando l'espressione temporale per $Q(t)$ si ricava $I(t)$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

andando a sostituire nell'integrale

$$L = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \int_0^t \frac{\epsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{\epsilon^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} \int_0^t e^{\frac{2t}{RC}} d(\frac{2t}{RC}) =$$

$$= \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$$

(punteggio: 2.a-c = 5 punti)