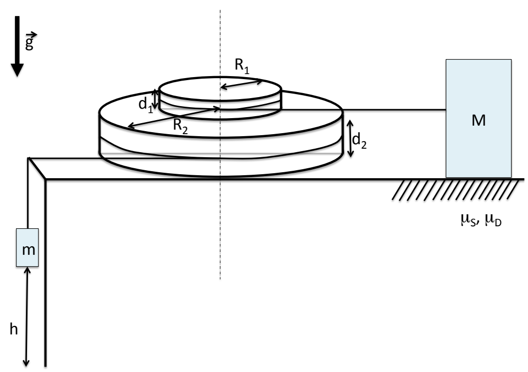
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 30/06/2017
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un corpo rigido è costituito da due dischi di alluminio (densità $\rho = 2.7\ g/cm^3$) sovrapposti, rispettivamente di raggio $R_1 = 20\ cm$, spessore $d_1 = 5\ cm$ ed $R_2 = 40\ cm$, $d_2 = 10\ cm$ (si veda la figura).
Il corpo rigido può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale fisso passante per i centri dei due dischi. Un filo ideale è arrotolato attorno al disco inferiore e, mediante un passante senza attrito, ha un estremo collegato ad una massa m. Un secondo filo ideale è arrotolato attorno al disco superiore, con un estremo collegato ad una massa $M = 1.0\ kg$, posta sul piano orizzontale scabro (con coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente $\mu_S = 0.6$ e $\mu_D = 0.4$). Si noti che, se il filo collegato a m si srotola dal cilindro inferiore il filo collegato a M si arrotola al clindro superiore, o viceversa (i fili non strisciano sui dischi). L'accelerazione di gravità vale $|\vec{g}| = 9.8\ m/s^2$.



1. Si calcoli il momento d'inerzia I del corpo rigido rispetto all'asse passante per i centri dei due dischi e si trovi il massimo valore della massa m, m_{max}, affinché il sistema rimanga in equilibrio:

   $I =$ ....
   $m_{max} =$ ....

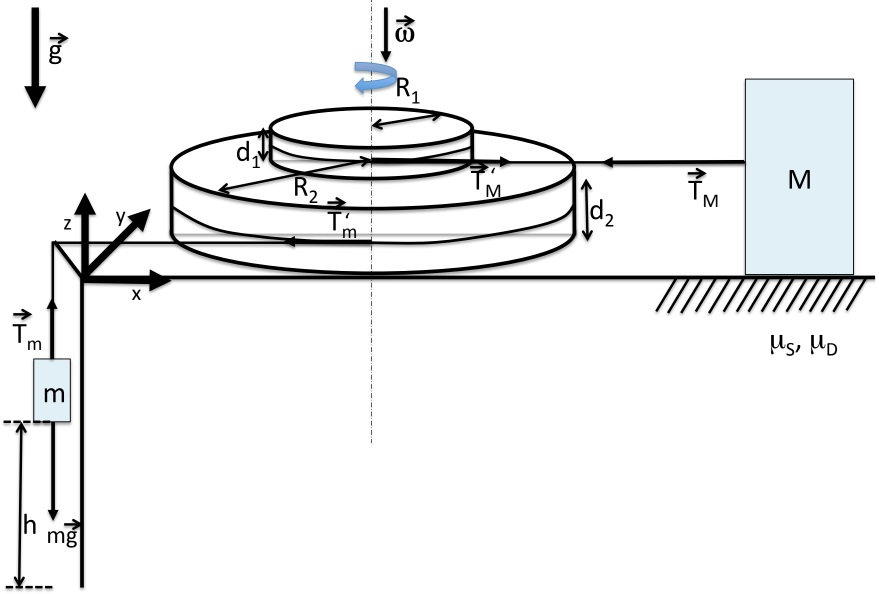
2. Si scelga ora una massa m di valore $10\ kg$ (maggiore di m_{max}). Trovare il lavoro totale (con il relativo segno) compiuto dalla forza di attrito $L_{F_{attr}}$ dall'istante iniziale a quando la massa m è scesa di una quota $h = 2\ m$:

   $L_{F_{attr}} =$ ....

3. Calcolare il modulo della velocità angolare finale del corpo rigido, quando la massa m è scesa della quota h:

   $|\vec{\omega_f}| =$ ....

Soluzione Esercizio 1

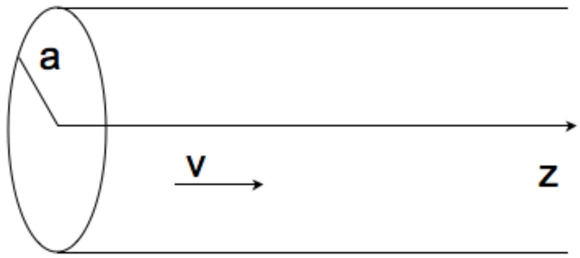


1. La massa del cilindro 1(2) vale a $m_1 = \rho\pi R_1^2 d_1$ ($m_2 = \rho\pi R_2^2 d_2$). Quindi il momento d'inerzia è:
$$I = \frac{1}{2}m_1 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2 R_2^2 = 11.2\ kg\ m^2$$
Siano T_m e T_M i moduli delle tensioni dei fili ideali collegati rispettivamente ad m ed M. Risulta $|\overrightarrow{T_m}| = |\overrightarrow{T_m'}|$ e $|\overrightarrow{T_M}| = |\overrightarrow{T_M'}|$ (vedi figura). In condizioni di equilibrio del sistema:
$$ma_z = T_m - mg = 0$$
$$MA_x = F_{attr_S} - T_M = 0$$
$$M_z = R_1 \cdot T_M - R_2 \cdot T_m = 0$$
nell'ultima relazione il polo scelto è un punto qualsiasi lungo l'asse di rotazione del corpo rigido.
Il valore della forza di attrito statico risulta $|\overrightarrow{F}_{attr_S}| \leq \mu_S R^N$, dove R^N è il modulo della reazione del piano alla forza peso, con $R^N = Mg$, per cui $R_2 m_{max} g = R_1 \mu_S M g$, ottenendo:
$$m_{max} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \mu_S M = 0.30\ kg$$

2. Quando $m = 10\ kg$ ($m > m_{max}$ implica $M_z = \frac{d\omega_z}{dt} < 0$) il filo collegato a m si srotola dal disco inferiore, mentre l'altro collegato ad M si arrotola al disco superiore. Se il corpo m scende di una quota h, il corpo rigido ruota di un angolo $\Delta\theta = -\frac{h}{R_2}$ ed il corpo M si sposta (verso sinistra) di $\Delta X = R_1 \cdot \Delta\theta$. Il lavoro della forza di attrito risulta:
$$L_{F_{attr}} = \mu_D M g \Delta X = \mu_D M g R_1 \cdot (-\frac{h}{R_2}) = -3.9\ J$$

3. Tale lavoro è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema costituito da m, M e corpo rigido: $L_{F_{attr}} = \Delta E_{mecc} = E_{cin}^f - mgh$. Per la inestensibilità dei fili (non strisciano sui dischi), tra le velocità di m, M e la velocità angolare del corpo rigido valgono le seguenti relazioni: $v_{m_z} = R_2 \cdot \omega_z$ e $v_{M_x} = R_1 \cdot \omega_z$. Sostituendo nell'energia cinetica finale:
$$E_{cin}^f = \frac{1}{2}mv_{m_z}^2 + \frac{1}{2}Mv_{M_x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(mR_2^2 + MR_1^2 + I)\omega_z^2 = mgh + L_{F_{attr}}$$
si ottiene:
$$|\overrightarrow{\omega}_f| = |\omega_z| = \sqrt{\frac{2(m - \mu_D M \frac{R_1}{R_2})gh}{mR_2^2 + MR_1^2 + I}} = 5.5\ rad/s$$

Esercizio 2



Un fascio di protoni di forma cilindrica con raggio $a = 1\ mm$ è costituito da $n = 10^{13}\ protoni/m^3$ con carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ che viaggiano lungo l'asse z del cilindro (vedi figura), con velocità $v = 3000\ m/s$.

1. Si calcoli la carica elettrica presente per unità di lunghezza, λ:

   $\lambda =$ ....

2. Si calcoli in un punto a distanza $a/2$ dall'asse del fascio il modulo del campo elettrico, $E(a/2)$, e si dia la sua espressione, $\overrightarrow{E}(a/2)$, in forma vettoriale:

   $E(a/2) =$ ....

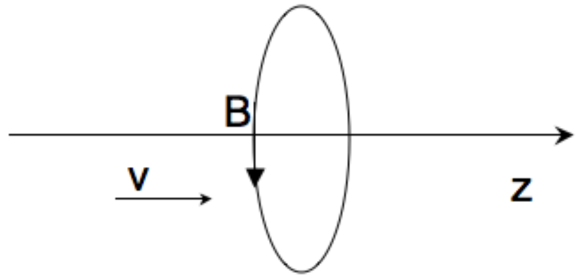
   $\overrightarrow{E}(a/2) =$ ....

3. Si calcoli il modulo del campo magnetico in un punto a distanza $a/2$ dall'asse del fascio, $B(a/2)$, e all'esterno del fascio in un punto a distanza $2a$ dall'asse del fascio, $B(2a)$:

   $B(a/2) =$ ....

   $B(2a) =$ ....

Soluzione Esercizio 2



1. La carica per unità di lunghezza è la carica presente in una parte del fascio di lunghezza l pari a 1 m. Ma tale carica è la carica contenuta in un cilindro di sezione πa^2 e lunghezza 1 m, quindi di volume $V = \pi a^2 l$. Poichè la densità di carica presente nel fascio è $\rho = nq$, la carica contenuta in tale cilindro è $Q = \rho V$, di conseguenza:
   $\lambda = nq\pi a^2 = 5.0 \times 10^{-12}\ C/m$.

2. La distribuzione di carica ha simmetria cilindrica, di conseguenza il campo elettrico è diretto radialmente rispetto all'asse di simmetria z e in verso uscente essendo la carica positiva. Il campo è inoltre costante su delle superfici cilindriche concentriche con l'asse z. Il valore del campo si ottiene applicando il Teorema di Gauss ad una superficie di Gauss cilindrica chiusa di lunghezza h con asse coincidente con z e di raggio $r = a/2$. Per cui:
   $E(r)2\pi rh = Q_{int}/\epsilon_0$ dove $Q_{int} = nq\pi r^2 h$ è la carica interna alla superfice cilindrica chiusa. Per cui: $E(r) = nqr/2\epsilon_0$. Per $r = a/2$, $E(a/2) = nqa/4\epsilon_0 = 45\ \ V/m$.
   Essendo il campo radiale possiamo scrivere $\overrightarrow{E}(a/2) = (nqa/4\epsilon_0)\,\hat{r}$.

3. Il problema ha simmetria cilindrica (la simmetria del filo indefinito), dunque le linee del campo di induzione magnetica sono linee circolari con centro sull'asse z. Poichè le cariche in moto sono positive (protoni), la corrente associata al moto delle cariche è nello stesso verso della velocità e quindi, per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse z come indicato in figura.
   L'espressione del modulo del campo interno si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio $r < a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$ dove i_{conc} è la corrente concatenata con la linea circolare. Ma la densità di corrente elettrica associata con il moto delle cariche è $J = nqv$ Dunque, la corrente concatenata con la linea circolare di raggio r è $i_{conc} = J\pi r^2 = nqv\pi r^2$. Per cui $B(r) = \mu_0 nqvr/2$, che per $r = a/2$ vale $B(a/2) = \mu_0 nqva/4 = 1.5 \times 10^{-12}\ T$.
   L'espressione del modulo del campo nel caso in cui $r = 2a$ si ottiene anche in questo caso applicando il Teorema di Ampere ma ad una linea di campo circolare di raggio $r \geq a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$ dove i_{conc} è la corrente concatenata con la linea circolare dovuta al fascio di protoni $i_{conc} = J\pi a^2 = nqv\pi a^2$. $B(r) = \mu_0 nqva^2/2r$, che per $r = 2a$ fornisce $B(2a) = \mu_0 nqva/4 = 1.5 \times 10^{-12}\ T$.