Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 17/09/2013
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Un carrello è costituito da un blocco di massa $M = 500$ g e da 2 coppie di ruote aventi raggi $r_1 = 10$ cm e $r_2 = 20$ cm e masse rispettivamente $m_1 = 100$ g e $m_2 = 400$ g.
Sapendo che il carrello si muove inizialmente ad una velocità di $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale, e che il moto delle ruote è di puro rotolamento, si calcolino

a) le velocità angolari delle due ruote e l'energia cinetica totale del carrello.

Le ruote girano senza scivalare e quindi vale:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v_0/r_1 = 100\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2 &= v_0/r_2 = 50\,\mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{1}$$

l'energia cinetica, traslazionale e rotazionale, è invece data da:

$$\begin{aligned} E_i^{kin} &= \tfrac{1}{2}(M + 2m_1 + 2m_2)v_0^2 + 2\tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + 2\tfrac{1}{2}I_2\omega_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(M + 2m_1 + 2m_2)v_0^2 + 2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_1r_1^2)(\tfrac{v_0}{r_1})^2 + 2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_2r_2^2)(\tfrac{v_0}{r_2})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(M + 3m_1 + 3m_2)v_0^2 \\ &= 100\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{2}$$

Dopo aver percorso il tratto orizzontale, il carrello si trova su un piano inclinato di altezza $h = 1$ m alla fine del quale, su un piano orizzontale, incontra una molla orizzontale di costante elastica $k = 500$ N/m, inizialmente con lunghezza pari alla sua lunghezza a riposo $l_0 = 2$ m, bloccata ad un estremo come mostrato in figura.
Si calcoli:

b) le velocità angolari delle due ruote alla fine del piano inclinato.

Durante la discesa non agiscono forze dissipative e pertanto vale la conservazione dell'energia. L'energia totale sarà quindi $E = E_i^{cinetica} + (M + 2m_1 + 2m_2)gh = 114\,\mathrm{J}$

Al termine della discesa si avrà solo energia cinetica e pertanto dalla (2) si può ottenere la velocità dopo la discesa:

$$v_f = \sqrt{\frac{2E}{M + 3m_1 + 3m_2}} = 10.7\,\mathrm{m/s}$$

e quindi si può calcolare:

$$\begin{aligned} \omega_1^f &= v_f/r_1 = 107.1\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2^f &= v_f/r_2 = 53.5\,\mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{3}$$

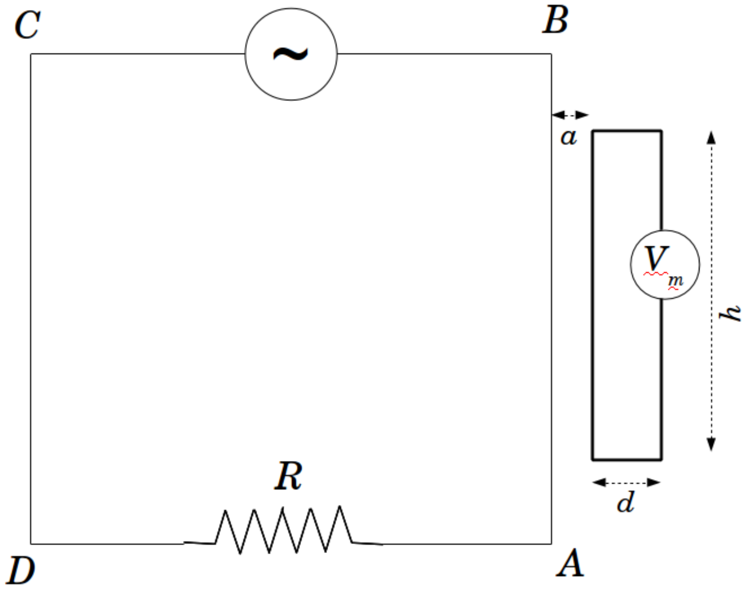
c) la compressione massima della molla.

Durante la compressione della molla non agiscono forze dissipative. La compressione della molla si può quindi ottenere dalla conservazione dell'energia:

$$E = E_{finale} = \frac{1}{2}k\Delta X^2 \Longrightarrow \Delta X = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 0.677\,\mathrm{m}$$

$l_{min} =$ ....

Esercizio 2



Il circuito ABCD è costituito da un generatore di tensione alternata ($V(t) = V_0 sin(\omega t)$) di semi-ampiezza $V_0 = 220$ V e una frequenza $\nu = 50$ Hz.
A fianco del tratto AB, ad una distanza $a = 1$ mm, viene posta una spira rettangolare di altezza $h = 50$ cm e larghezza $d = 20$ cm come mostrato in figura sulla quale è possibile misurare la fem indotta grazie ad un voltmetro inicato in figura con V_m.
Nel tratto DA del circuito dato è inserita una resistenza R.
Si chiedeva di calcolare:

a) La pulsazione ω corrispondente alla frequenza data e la corrente che percorre il circuito ABCD in funzione di R. Dalla definizione di pulsazione e dalla legge di Ohm segue che

$$\omega = 2\pi\nu = 314\ rad/s \qquad I(t, R) = \frac{V_0}{R} sin(2\pi\nu t)$$

b) Il campo magnetico generato dal tratto di filo AB in funzione del tempo, della resistenza R e della distanza r dall'asse del filo. Considerando il tratto di filo AB come infinito possiamo scrivere

$$B(t, r, R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t)}{2\pi R r}$$

c) Il valore misurato dal voltmetro in funzione del tempo e della resistenza R (si può trascurare il campo prodotto dai tratti BC,CD e DA del circuito).

La fem indotta sulla spira rettangolare sarà

$$V_m = f.e.m. = -\frac{d\phi_B}{t}$$

Bisogna pertanto trovare ϕ_B in funzione del tempo. Poichè B non è uniforme sarà necessario integrare lungo la distanza radiale dal filo tra gli estremi della spira, ovvero

$$\phi_B = h\int_a^{a+d} B(t, r, R)dr = h\int_a^{a+d} \frac{\mu_0 V_0 sin(\omega t)}{2\pi R r}dr = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t)}{2\pi R} h \int_a^{a+d} \frac{1}{r}dr$$

da cui

$$\phi_B = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t) h}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})$$

definendo ϕ_B^{max} come

$$\phi_B^{max} = \frac{\mu_0 V_0 h}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})$$

possiamo scrivere $\frac{d\phi_B}{dt}$ come

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(\phi_B^{max} sin(\omega t))}{dt} = \omega cos(\omega t)\phi_B^{max}$$

e quindi

$$V_m(t, R) = -\omega cos(\omega t)\phi_B^{max}$$

Sapendo che la tensione massima letta sul voltmetro è pari a $V_m^{max} = 10\ \mu$V,

d) si calcoli il valore della resitenza R e l'energia dissipata in un periodo

Il valore massimo di V_m si otterrà quando $cos(\omega t) = 1$ e sarà quindi

$$V_m^{max} = \omega B_{max}$$

da cui, ponendo uguale a 10 μV ed esplicitando ϕ_B^{max} si ottiene

$$\frac{\mu_0 V_0}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})\omega = 10\ \mu V$$

da cui

$$R = \frac{\mu_0 V_0 h}{2\pi 10\ \mu V} ln(\frac{a+d}{a})\omega = 3.7 K\Omega$$

Per trovare l'energia dissipata in un periodo possiamo scrivere la potenza istantanea

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} sin^2(\omega t) = 0.13\ J$$

l'energia dissipata in un periodo sarà quindi

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} P(t)dt = \frac{V_0^2}{R} \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(\omega t)dt$$

sfruttando il suggerimento dato possiamo riscrivere l'equazione come

$$E = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P(t)dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t)dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{1}{2\omega}\int_{-\pi}^{\pi} 1dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{\pi}{\omega}$$

La potenza media sarà dunque

$$< P >= \frac{E}{T} = \frac{E\omega}{2\pi} = \frac{V_0^2}{2R} = 6.6\ W$$