Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 22/07/2016
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio $R = 1$m e massa $M = 3$kg e può muoversi su un piano orizzontale liberamente (tra il piano e la guida non c'è attrito). Un punto materiale di massa $m = 1.6$kg è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza $h = 1.3$m all'interno della guida (Fig.1). Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.

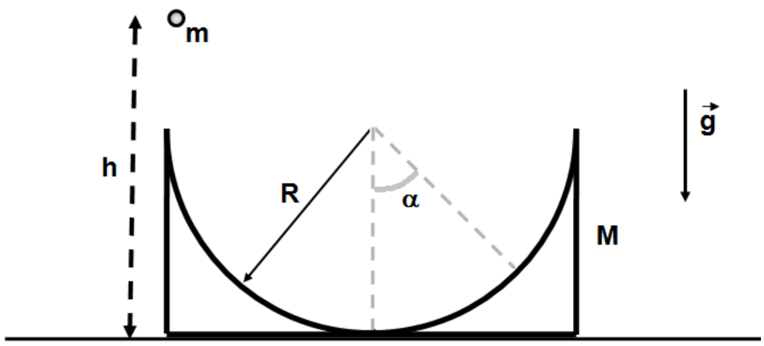

Fig.1

Si calcoli:

a) lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

b) il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

$v_M =$ ....

c) la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \frac{1}{4}\pi$

$p =$ ....

Soluzione

a)
La quantità di moto lungo l'asse orizzontale del sistema si conserva poichè non vi sono forze esterne al sistema che agiscono in quella direzione. La velocità orizzontale del centro di massa del sistema risulta, pertanto, nulla. Si calcola la posizione del centro di massa del sistema (lungo l'asse orizzontale) da un punto fisso che, per comodità, prendiamo nel punto di incontro tra il lato sinistro della guida e il piano.

$$X_{cm,i} = \frac{RM}{M+m}$$

$X_{cm,i}$ rappresenta la posizione iniziale del centro di massa che lungo l'asse orizzontale ha velocità nulla. Per trovare lo spostamento della guida nel momento in cui la massa m esce dalla guida stessa si ricalcola la posizione del centro di massa del sistema

$$X_{cm,f} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{M+m}$$

Imponendo l'uguaglianza tra $X_{cm,i}$ e $X_{cm,f}$ si ricava

$$d = -\frac{2mR}{m+M} = -0.7\text{m}$$

b)
Per trovare la velocità della guida quando la massa m passa nel punto più basso della guida stessa si utilizza sia la conservazione dell'energia sia la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto Usando la conservazione dell'energia si può scrivere:

$$mgh = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

Dalla conservazione della componente orizzontale della quantità di moto si ha:

$$mv_m + Mv_M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_m = -\frac{Mv_M}{m}$$

Si può quindi ricavare il modulo della velocità della guida che risulta essere:

$$v_M = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}} = 2.17\text{m/s}$$

c)
Si conserva l'energia totale del sistema:

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\omega cos(\alpha)\right)^2 + (R\omega sin(\alpha))^2\right]$$

Lungo l'asse orizzontale si conserva anche la quantità di moto del sistema poichè, le uniche forze esterne che agiscono sul sitema, sono dirette verticalmente. Si ha allora:

$$M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\omega cos(\alpha)\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{X} = -\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}$$

Si può pertanto eliminare $\dot{X}$ e scrivere l'energia in funzione della velocità angolare ω:

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{X}R\omega cos(\alpha) + R^2\omega^2\right]$$

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[2\left(-\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}\right)R\omega cos(\alpha) + R^2\omega^2\right]$$

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\left(1 - \frac{m}{m+M}cos^2(\alpha)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g[h-R(1-cos(\alpha))](m+M)}{R^2(m+M-mcos^2(\alpha))}}$$

La quantità di moto totale del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ risulta essere:

$$p = mR\omega sin(\alpha) = 5.53\text{kgm/s}$$

Esercizio 2

Un disco isolante di raggio $a = 1.5$cm presenta una carica uniforme $Q = 20 \cdot 10^{-5}$C. Il disco ruota a una velocità angolare $\omega = 7 \cdot 10^2$Hz intorno a un asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco (Fig.2.A).

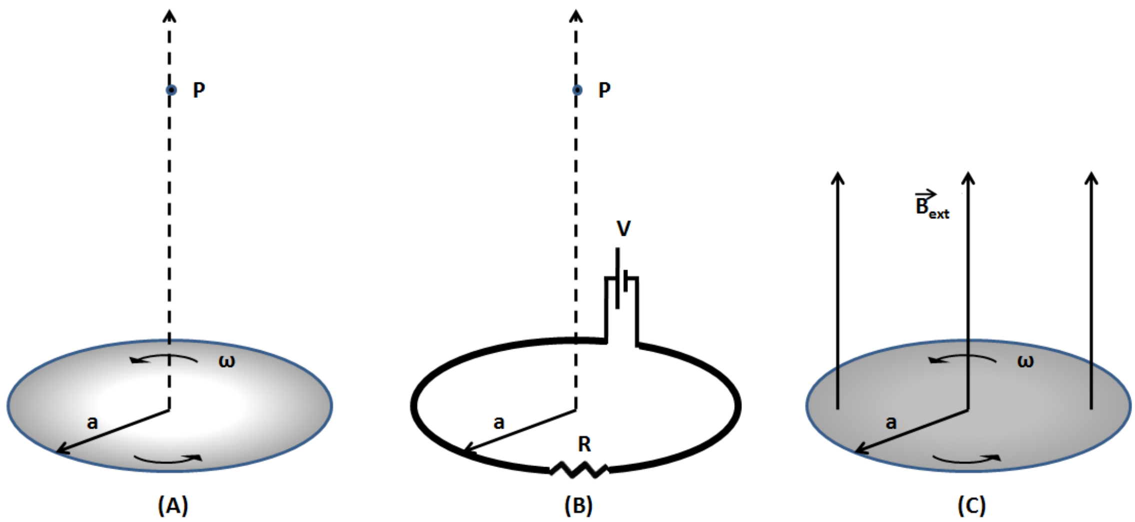

Fig.2

Si calcoli:

a) il modulo del campo magnetico lungo l'asse di rotazione nel punto P distante $d = 20$cm dal centro del disco (si consideri d>>a e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$H/m).

$$B_P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il disco viene ora sostituito da una spira di ragggio a e resistenza $R = 7 \cdot 10^6 \Omega$ collegata a un generatore di tensione. Si calcoli:

b) La corrente I che deve scorrere nella spira per avere lo stesso campo magnetico trovato in precedenza (nel punto P) e l'energia dissipata dalla resistenza in un tempo $t_1 = 0.2$s (Fig.2.B)

$$I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E_{diss}(t_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si consideri ora il disco iniziale conduttore e scarico. Il disco ruota con la stessa ω in un campo magnetico esterno $B_{ext} = 5 \cdot 10^{-5}$T costante e uniforme parallelo a ω stessa (Fig.2.C). Si calcoli:

c) il campo elettrico nel disco in condizioni stazionarie, a distanza a/2 dal centro; il valore del campo magnetico B_{ext} che si dovrebbe avere per annullare la differenza di potenziale tra il centro e la periferia del disco ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg)

$$E_{int} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad B_{ext} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soluzione

a)
Il disco carico che ruota può essere visto come una serie di spire di spessore dr in cui circola una corrente dI. Per calcolare il campo magnetico totale si considera, quindi, il campo magnetico generato da una spira sul suo asse

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dI\ r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Se si considera z molto maggiore di r si ha:

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dI\ r^2}{2z^3}$$

La densità superficiale di carica è:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

da cui:

$$dI = 2\pi r dr \sigma \frac{\omega}{2\pi} = r\sigma\omega dr$$

Il campo magnetico B generato sull'asse del disco dalla singola spira di spessore dr è:

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dIr^2}{2z^3} = \mu_0 \frac{r^3\sigma\omega dr}{2z^3}$$

Il campo sull'asse del disco a distanza molto maggiore di a è dato da:

$$B_{asse} = \int_0^a \mu_0 \frac{r^3\sigma\omega}{2z^3} dr = \mu_0 \frac{a^4\sigma\omega}{8z^3}$$

Quindi il campo magnetico nel punto P è:

$$B_P = \mu_0 \frac{a^2 Q\omega}{8\pi d^3} = 1.97 \cdot 10^{-10}\text{T}$$

b) Lo stesso campo magnetico nel punto P è prodotto da una spira di raggio a in cui circola la corrente:

$$I = \frac{2d^3 B_P}{\mu_0 a^2}$$

La potenza dissipata dalla resistenza R è quindi:

$$P = RI^2$$

e l'energia dissipata dopo un tempo t_1 è:

$$E_{diss}(t_1) = Pt_1 = 174\text{J}$$

c)
In condizioni stazionarie, cioè quando non vi è più un flusso di elettroni verso il centro del disco, la somma vettoriale della forza dovuta al campo elettrico e della forza magnetica devono essere pari alla forza centripeta che si esercita su ogni elettrone di conduzione. Per quanto riguarda i moduli delle forze si ottiene:

$$m_e\omega^2 r = |e|\left(\omega r B_{ext} - E_i\right)$$

Da cui si ricava:

$$E_i = \frac{|e|\,\omega r B_{ext} - m_e\omega^2 r}{|e|}$$

alla distanza a/2 il modulo del campo elettrico vale:

$$E_{int} = \left(B_{ext} - \frac{m_e}{|e|}\omega\right)\omega\frac{a}{2} = 2.62 \cdot 10^{-4}\text{N/C}$$

Il valore del campo magnetico B_{ext} che si dovrebbe avere per annullare la differenza di potenziale tra il centro e la periferia del disco è:

$$B_{ext} = \frac{m_e}{|e|}\omega = 3.98 \cdot 10^{-9}\text{T}$$