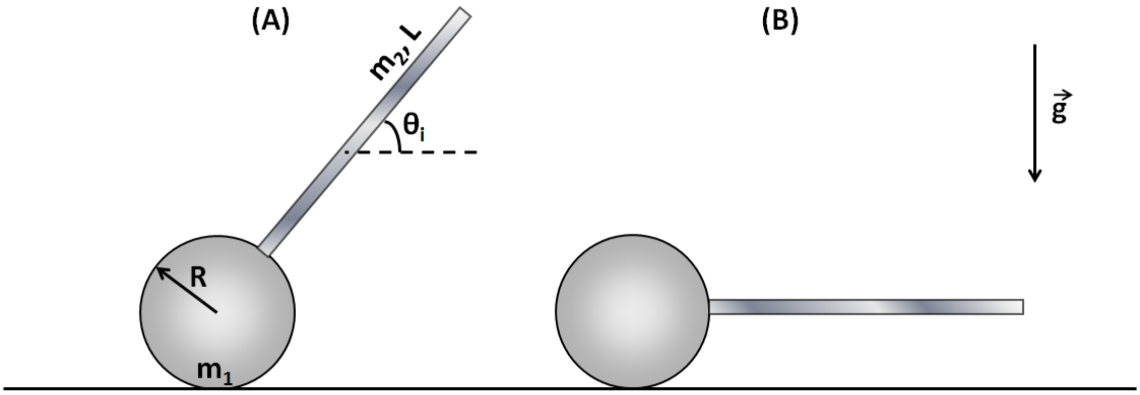
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 14/09/2016
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un disco di massa $m_1 = 3$kg ha raggio $R = 10$cm è saldato all'estremo di un'asta lunga $L = 40$cm di massa $m_2 = 5$kg. Inizialmente il disco poggia su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo $\theta_i = \pi/3$rad con l'orizzontale. A un certo istante si elimina il vincolo che tiene il sistema in equilibrio, questo sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.



Si calcoli:

a) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando il piano orizzontale privo di attrito

$$\omega_a = \text{.................}$$

b) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\omega_b = \text{.................}$$

c) il modulo dell'accelerazione angolare quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\alpha = \text{.................}$$

Soluzione

a)
La componente orizzontale della quantità di moto si conserva perchè il piano non presenta attrito. Il centro di massa si muove solo verticalente, dato che inizialmente è fermo. La posizione iniziale del centro di massa lungo l'asse y, in funzione dell'angolo θ è:

$$y_{cm} = \frac{m_2(R + L/2)sin(\theta)}{M_{tot}}$$

dove si è posto $M_{tot} = m_1 + m_2$ e lo zero a un'altezza R dal piano.
La velocità lungo y del centro di massa (V_y) è data da:

$$V_y = \frac{dy_{cm}}{dt} = \frac{m_2}{M_{tot}}(R + L/2)cos(\theta)\dot{\theta}$$

La distanza del centro di massa dal centro del disco quando l'asta è orizzontale è:

$$d_{cm} = \frac{m_2(R + L/2)}{M_{tot}}$$

Il momento d'inerzia rispetto al centro di massa è:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1d_{cm}^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2(R + L/2 - d_{cm})^2$$

Utilizzando la conservazione dell'energia si ottiene:

$$\frac{1}{2}M_{tot}V_{yf}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta_{af}}^2 = M_{tot}gy_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(m_2(R + L/2)\dot{\theta_a f})^2}{M_{tot}} + I_{cm}\dot{\theta_{af}}^2 = 2M_{tot}gy_{cm}$$

Da cui si ottiene:

$$\omega_a = \dot{\theta_{af}} = \sqrt{\frac{2M_{tot}^2gy_{cm}}{m_2^2(R + L/2)^2 + I_{cm}M_{tot}}} = 6.92s^{-1}$$

b)
Si può considerare il moto del sistema come puro rotolamento attorno al punto di contatto. Il momento d'inerzia rispetto al punto di contatto, quando l'asta è orizzontale vale:

$$I_O = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2((R + L/2)^2 + R^2)$$

Quindi per la conservazione dell'energia abbiamo:

$$\frac{1}{2}I_O\dot{\theta_{bf}}^2 = M_{tot}gy_{cm}$$

Da cui si ottiene:

$$\omega_b = \dot{\theta_{bf}} = \sqrt{\frac{2M_{tot}gy_{cm}}{I_O}} = 6.45s^{-1}$$

c)
Sfruttando la seconda equazione cardinale si ha:

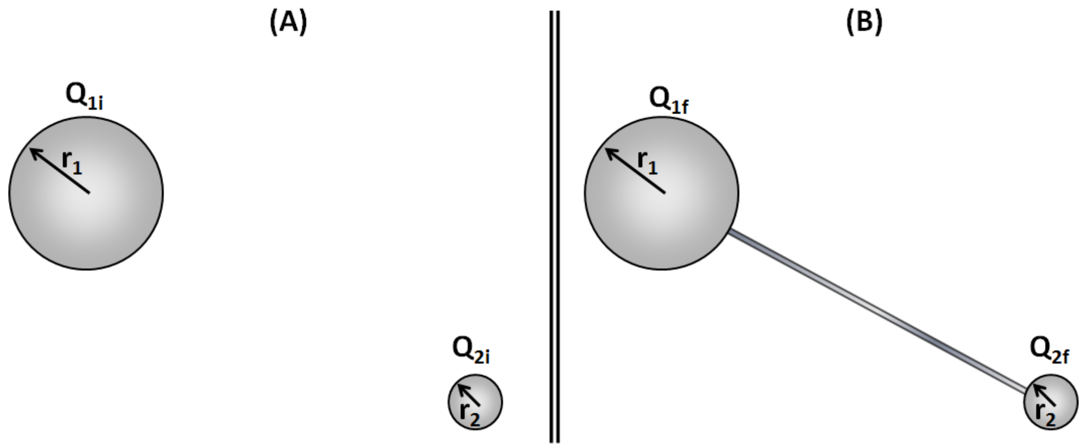
$$I_O\alpha = M_e$$

con $M_e = M_{tot}gd_{cm}$ momento delle forze esterne. Si ottiene quindi:

$$\alpha = \frac{M_e}{I_O} = 24.03s^{-2}$$

Esercizio 2

Su una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 20\text{cm}$ è depositata la carica $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5}\text{C}$; un'altra sfera conduttrice di raggio $r_2 = 5\text{cm}$ presenta la carica $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5}\text{C}$. Le sfere, inizialmente isolate, vengono poste in contatto attraverso un filo conduttore. Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$).



Si calcoli:

a) la carica Q_{1f} e Q_{2f} presente sulle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie)

$Q_{1f} =$ .... $\qquad$ $Q_{2f} =$ ....

b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{................}$$

c) La variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula $U = 1/2CV^2$ considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita)

$$U_{diss} = \text{................}$$

Soluzione

a)
La carica totale presente nei due conduttori isolati è:

$$Q_{tot} = Q_{1i} + Q_{2i}$$

Una volta che le sfere sono messe a contatto attraverso un filo conduttore, il potenziale su di esse assume lo stesso valore. Si ha pertanto:

$$\frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q_{1f}}{r_1} = \frac{Q_{2f}}{r_1}$$

Poichè la carica si conserva si può scrivere:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{tot}$$

Mettendo a sistema le ultime due relazioni si ottiene:

$$Q_{2f} = Q_{tot}\frac{r_2}{r_1 + r_2} = 10 \cdot 10^{-5}\mathrm{C} \qquad\qquad Q_{1f} = Q_{tot}\frac{r_1}{r_1 + r_2} = 40 \cdot 10^{-5}\mathrm{C}$$

b) Applicando il teorema di Gauss si ha

$$E_1 = \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \qquad\qquad E_2 = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

da cui si ricava:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_{1f}}{r_1^2}\frac{r_2^2}{Q_{2f}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{Q_{1f}}{Q_{2f}} = \frac{r_2}{r_1} = 0.25$$

c)
Inizialmente, quando le sfere sono isolate, l'energia del sistema è:

$$U_{in} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Quando le sfere sono collegate dal cavo conduttore l'energia del sistema è:

$$U_{fin} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Dalle precedenti relazioni si ricava:

$$U_{diss} = U_{in} - U_{fin} = 4500\mathrm{J}$$