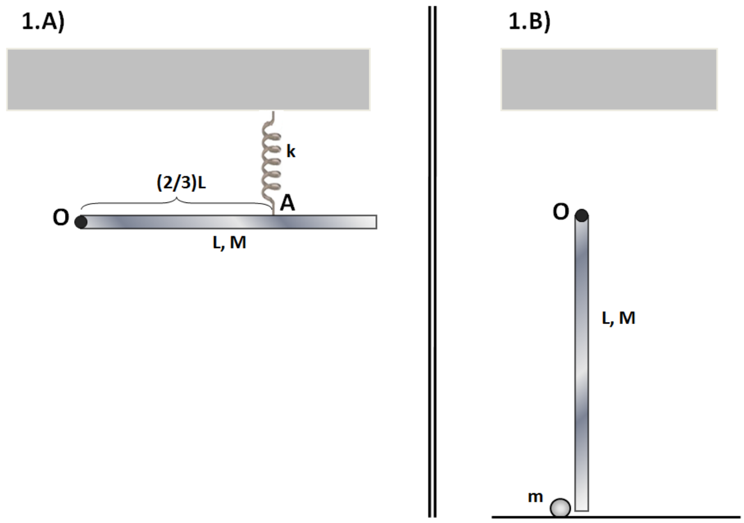
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 10/06/2016
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 0.2$m e massa $M = 0.3$kg è incernierata senza attrito a un estremo O. La sbarretta è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla verticale, di costante elastica $k = 20$N/m e lunghezza a riposo nulla, fissata alla sbarra nel punto A distante $\frac{2}{3}L$ dall'estremo O (Fig.1.A).



Si calcoli:

a) l'allungamento d della molla quando il sistema si trova in equilibrio e il modulo della reazione vincolare in O:

$d =$ .... $R =$ ....

b) il periodo delle piccole oscillazioni della sbarretta (suggerimento: Data l'equazione differenziale $\ddot{x} = -\omega^2 x + cost$ il periodo delle piccole oscillazioni si ricava trascurando il termine costante)

$T =$ ....

Si supponga ora che la molla si spezzi e che la sbarretta, ruotando intorno all'estremo O, faccia un urto perfettamente elastico con il punto materiale di massa $m = 1$kg (Fig.1.B).
Si calcoli:

c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo:

$p =$ ....

Soluzione

a)
Per valutare il modulo della forza esercitata dalla molla si uguaglia il momento della forza peso (P) a quello della forza elastica (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto O). Si ottiene:

$$M_P = M_e \Rightarrow \frac{MgL}{2} = \frac{2kLd}{3} \Rightarrow d = \frac{3Mg}{4k} = 0.11m$$

La reazione vincolare in O sarà tale da annullare la somma vettoriale della forza elastica ($\vec{F_e}$) e della forza peso ($\vec{P}$) :

$$\vec{R} + \vec{F_e} + \vec{P} = 0$$

dove $F_e = kd$ è il modulo della forza elastica e $P = Mg$ quello della forza peso. Si ricava, pertanto, che il modulo di R è:

$$R = |F_e - P| = 0.74N$$

b)
Preliminarmente si calcola il momento d'inerzia del sistema rispetto al punto O:

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(Mg\frac{L}{2}sen(\Theta) + \frac{1}{2}I_O\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}k(d - \frac{2L}{3}sen(\Theta))^2) = 0$$

Derivando e approssimando per piccole oscillazioni si ottiene:

$$\frac{4kL^2}{9}\Theta = -I_O\ddot{\Theta} + C$$

Con C costante ($C = kd\frac{2L}{3} - mg\frac{L}{2}$) Il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9I_O}{4kL^2}} = 0.67s$$

c)
Applica la conservazione dell'energia, prima dell'urto si ha che la variazione di energia potenziale del sistema si trasforma in energia cinetica. Si può pertanto ricavare la velocità angolare del sistema quando la sbarra è verticale:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega_{in}^2 \Rightarrow \omega_{in} = \sqrt{\frac{MgL}{I_O}}$$

Quindi la quantità di moto della sbarra quando è verticale è:

$$p_{in} = M\omega_{in}\frac{L}{2}$$

Durante l'urto si conserva sia l'energia che il momento angolare. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_{in}^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Scrivendo la conservazione del momento angolare rispetto al polo O si ha:

$$I_O\omega_{in} = I_O\omega_1 + mv_2L$$

Risolvendo il sistema composto da queste ultime due equazioni si ottiene:

$$v_2 = \frac{2\omega_{in}I_OL}{mL^2 + I_O} \qquad ; \qquad \omega_1 = \omega_{in}\frac{I_O - mL^2}{I_O + mL^2}$$

La quantità di moto finale del sistema è:

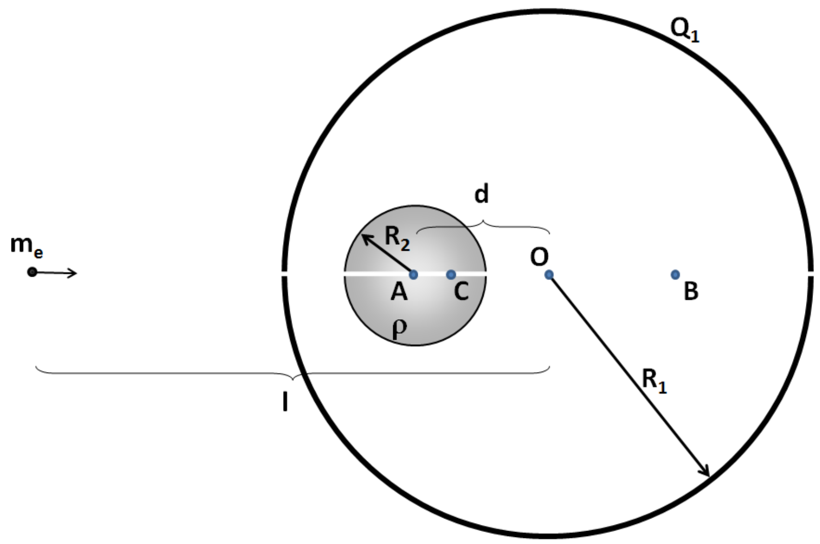
$$p_{fi} = M\omega_1\frac{L}{2} + mv_2$$

Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo è:

$$p = p_{in} - p_{fi} = 0.2kg\frac{m}{s}$$

Esercizio 2

Una carica $Q_1 = +10^{-9}$C è distribuita su un guscio sferico di raggio $R_1 = 0.2$m. All'interno del guscio sferico è posizionata una sfera isolante, di raggio $R_2 = 0.05$m il cui centro è collocato nel punto A, distante $d = 0.1$m dal centro del guscio di raggio R_1. La carica distribuita sulla sfera isolante è anch'essa positiva e la densità di carica non è uniforme ma segue la legge $\rho = kr$ con $k = 3 \cdot 10^{-6}$C/m^4



Si calcoli:

a) La carica totale Q_2 contenuta nella sferetta e il modulo del campo elettrico nel punto B simmetrico di A rispetto al centro del guscio sferico ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m)

$Q_2 =$ .... $E_B =$ ....

b) il potenziale all'interno della sfera piccola nel punto C distante $R_2/2$ da A

$V_C =$ ....

Si supponga che un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C si trovi, fermo, a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O, e che sull'asse delle x sia praticato un piccolo foro che permetta il passaggio attraverso guscio e sfera.
Si calcoli:

c) con quale velocità l'elettrone passa per il punto O

$v_O =$ ....

Soluzione

a)
Per calcolare la carica Q_2 contenuta nella sferetta bisogna integrare la densità di carica sul volume, si ha:

$$Q_2 = \int_0^{R_2} \rho dV = \int_0^{R_2} kr4\pi r^2 dr = \pi k R_2^4 = 5.9 \cdot 10^{-11} C$$

Il modulo del campo elettrico nel punto B può essere valutato applicando il teorema di Gauss e risulta essere:

$$E_B = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = 13.2\frac{N}{C}$$

b) Il modulo del campo all'interno della sfera piccola varia con la distanza r dal centro della sfera e si trova applicando il teorema di Gauss. Si ha pertanto:

$$E_{int}(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}$$

All'esterno della sfera il campo elettrico segue l'andamento del campo generato da una carica puntiforme. All'interno del guscio sferico il campo elettrico generato dalla carica presente nel guscio è nullo mentre all'esterno ha lo stesso andamento del campo prodotto da una carica puntiforme.
Fissato il potenziale a zero all'infinito, il potenziale nel punto C (all'interno della sfera piccola) generato dalle due distribuzioni di carica è:

$$V_C = \int_{R_2/2}^{R_2} \frac{kr^2}{4\epsilon_0} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_1}^{\infty} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

Svolgendo l'integrale si ottiene:

$$V_C = \frac{7kR_2^3}{96\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 58.6V$$

c)
Inizialmente si calcolano i potenziali nel punto di partenza dell'elettrone (a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O) e nel centro del guscio sferico (in O) dovuti alle due cariche.

$$V_e = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(2R_1)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(2R_1 - d)}$$

$$V_O = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(R_1)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(d)}$$

Si valuta quindi la variazione di energia potenziale dell'elettrone tra il punto di partenza e il centro del guscio sferico O

$$\Delta U = (V_e - V_O)q_e$$

In questo sistema l'energia totale si conserva (le forze presenti sono conservative), pertanto, la variazione di energia potenziale può essere uguagliata all'energia cinetica acquisita dall'elettrone. Si ottiene:

$$\Delta U = \frac{1}{2} m_e v_O^2$$

da cui:

$$v_O = \sqrt{\frac{2\Delta U}{m_e}} = 3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$