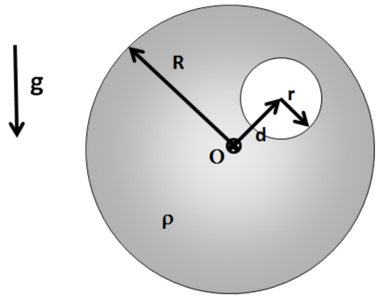
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 09/09/2015
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un cilindro di raggio $R = 0.9$m e spessore $s = 0.15$m è costituito da un materiale di densità $\rho = 8000$kg/m^3. Il cilindro presenta, a distanza $d = 0.45$m dal centro, un foro sempre cilindrico di raggio $r = 0.2$m. Il cilindro è immerso in un campo gravitazionale di intensità $g = 9.8$m/s^2, è vincolato al centro (nel punto O) e può ruotare intorno al proprio asse centrale (come in figura). La velocità angolare del cilindro, quando il foro è in basso, è $\omega = 5$rad/s.



Si calcoli:

a) la frequenza delle piccole oscillazioni

$\nu =$ ....

b) la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto

$\omega_{alt} =$ ....

Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli:

c) il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa.

$L =$ ....

Soluzione

a)
Il cilindro forato può essere scomposto in un cilindro pieno di raggio R e massa $M = \pi R^2 s\rho$ e un cilindretto, anch'esso pieno, di raggio r e massa "negativa" $m = \pi r^2 s(-\rho)$.
Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto O:

$$d_{cm} = \frac{md}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = M + m$
Si calcola quindi il momento d'inerzia del cilindro forato riferito al punto O:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_O\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con Θ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_O\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è:

$$\nu = \frac{1}{T} = 0.12s^{-1}$$

b)
La differenza di energia potenziale tra il cilindro con foro in basso e quello con foro in alto è:

$$E_p = 2M_{tot}gd_{cm}$$

Questa energia potenziale si trasforma in energia cinetica. Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_{alt}^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + E_p \;\Rightarrow\; \omega_{alt} = \sqrt{\frac{I_O\omega^2 + 2E_p}{I_O}} = 5.22\frac{rad}{s}$$

c)
Si applica sempre la conservazione dell'energia. Per compiere un giro completo il cilindro forato deve avere inizialmente un'energia cinetica tale da poter passare dalla configurazione con foro in alto a quella con foro in basso. Si ha pertanto:

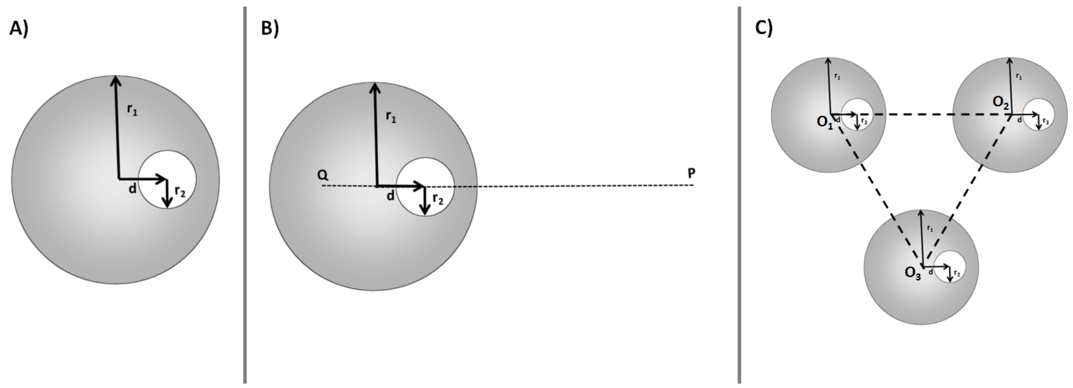
$$\frac{1}{2}I_O\omega_{ini}^2 = E_p \;\Rightarrow\; \omega_{ini} = \sqrt{\frac{2E_p}{I_O}}$$

Il momento angolare minimo iniziale che deve essere trasferito al cilindro per permettergli di compiere una rotazione completa è quindi:

$$L = I_O\omega_{ini} = 1788J$$

Esercizio 2

Un cavo composito multipolare (si consideri il cavo composito multipolare come un conduttore di corrente omogeneo con densità di corrente costante su tutta la superficie occupata dal cavo) di raggio $r_1 = 20$cm contiene una cavità asimmetrica rispetto all'asse di raggio $r_2 = 5$cm posizionata a distanza $d = 10$cm dall'asse del conduttore (fig.A).



Supponendo che nel conduttore circoli una corrente $I = 200$A, si calcoli:

a) Il modulo del campo magnetico nel punto P a distanza $r_{ext} = 60$cm dall'asse del cavo nell'ipotesi di cavo indefinito. Il punto P è esterno al cavo (fig.B)

$$B_P = ...$$

b) Il modulo del campo magnetico nel punto Q a distanza $r_{int} = 10$cm dall'asse del cavo nell'ipotesi di cavo indefinito. Il punto Q è interno al cavo (fig.B)

$$B_Q = ...$$

Si considerino tre cavi composti identici, impacchettati, con i centri O_1, O_2, O_3, ai vertici di un triangolo equilatero di lato $L = 50$cm (fig.C). Il verso della corrente che scorre nei cavi è lo stesso. Se il filo elementare che passa per O_3 ha diametro $D = 2$mm, si calcoli:

c) il modulo della forza per unità di lunghezza che agisce sul filo elementare:

$$f = ...$$

Soluzione

a)
La densità di corrente che scorre nel conduttore è data da:

$$J = \frac{I}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}$$

Per calcolare il modulo del campo magnetico nel punto P nell'ipotesi di cavo indefinito si usa il principio di sovrapposizione. Il campo creato sarà la somma del campo generato da un conduttore di raggio r_1 in cui scorre la corrente uniforme J, più quello di un conduttore di raggio r_2 (spazialmente coincidente con la cavità) dove scorre la corrente -J. Per trovare il campo di un singolo cilindro conduttore si usa il teorema di Ampere. Le linee di forza sono circolari e concentriche; la circuitazione sulle linee di forza è uguale a μ_0 volte la corrente che scorre attraverso la superficie racchiusa. Si ha quindi:

$$2\pi r_{ext} B_{1P} = \mu_0 \pi r_1^2 J \;\Rightarrow\; B_{1P} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2 r_{ext}}$$

$$2\pi(r_{ext} - d) B_{2P} = -\mu_0 \pi r_2^2 J \;\Rightarrow\; B_{2P} = \frac{-\mu_0 r_2^2 J}{2(r_{ext} - d)}$$

Il modulo del campo magnetico nel punto P vale:

$$B_P = B_{1P} + B_{2P} = 66.0 \cdot 10^{-6} T$$

b)
Lo svolgimento è simile a quello precedente facendo attenzione a quale corrente considerare nell'applicare il teorema di Ampere. Si ha quindi:

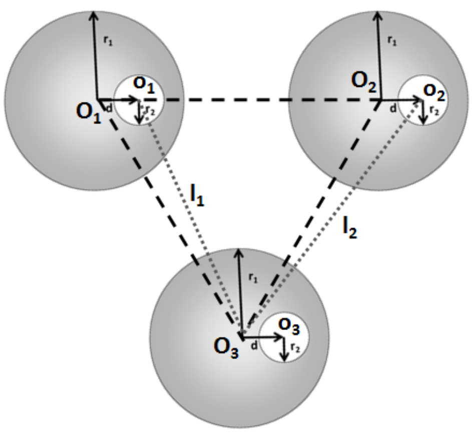
$$2\pi r_{int} B_{1Q} = \mu_0 \pi r_{int}^2 J \;\Rightarrow\; B_{1Q} = \frac{\mu_0 r_{int}^2 J}{2 r_{int}}$$

$$2\pi(r_{int} + d) B_{2Q} = -\mu_0 \pi r_2^2 J \;\Rightarrow\; B_{2Q} = \frac{-\mu_0 r_2^2 J}{2(r_{int} + d)}$$

Il modulo del campo magnetico nel punto Q vale:

$$B_Q = B_{1Q} + B_{2Q} = 93.6 \cdot 10^{-6} T$$

c)
Nel filo elementare che passa per O_3 scorre la corrente $I_3 = J\pi(D/2)^2$.



Per calcolare il campo magnetico che agisce sul filo bisogna tenere in considerazione il contributo di tutti i conduttori (i vari campi si calcolano sempre applicando il teorema di Ampere). A tal proposito è conveniente scomporre i campi magnetici generati dalle correnti che scorrono nei conduttori nelle componenti lungo gli assi x e y di un sistema di riferimento centrato in O_3.

$$B_{11} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2L} \;\Rightarrow\; B_{11X} = B_{11}cos(\pi/6) \;\;;\;\; B_{11Y} = B_{11}sin(\pi/6)$$

Campo generato in O_3 dal cilindro conduttore (pieno) di raggio r_1 centrato in O_1.

$$B_{12} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2L} \;\Rightarrow\; B_{12X} = B_{12}cos(\pi/6) \;\;;\;\; B_{12Y} = -B_{12}sin(\pi/6)$$

Campo generato in O_3 dal cilindro conduttore (pieno) di raggio r_1 centrato in O_2.
Con riferimento alla figura e sfruttando, ad esempio, il teorema dei coseni si ha:

$$l_1 = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ldcos(\pi/3)} \;\;;\;\; l_2 = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ldcos(2\pi/3)}$$

Sfruttando il teorema dei seni si ricavano gli angoli $\alpha = O_1\hat{O}_3 o_1$ e $\beta = O_2\hat{O}_3 o_2$:

$$sin(\alpha) = \frac{dsin(\pi/3)}{l_1} \;\Rightarrow\; \alpha = arcsin\left(\frac{dsin(\pi/3)}{l_1}\right)$$

$$sin(\beta) = \frac{dsin(2\pi/3)}{l_2} \;\Rightarrow\; \beta = arcsin\left(\frac{dsin(2\pi/3)}{l_2}\right)$$

da cui si ottiene:

$$B_{21} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2l_1} \;\Rightarrow\; B_{21X} = -B_{21}cos(\pi/6 - \alpha) \;\;;\;\; B_{21Y} = -B_{21}sin(\pi/6 - \alpha)$$

$$B_{22} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2l_2} \;\Rightarrow\; B_{22X} = -B_{22}cos(\pi/6 + \beta) \;\;;\;\; B_{22Y} = +B_{22}sin(\pi/6 + \beta)$$

Per finire va considerato il campo creato dal foro cilindrico di centro o_3:

$$B_{23} = B_{23Y} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2d}$$

Le componenti X e Y del campo magnetico totale sono:

$$B_{totX} = B_{11X} + B_{12X} + B_{21X} + B_{22X} \;\;;\;\; B_{totY} = B_{11Y} + B_{12Y} + B_{21Y} + B_{22Y} + B_{23Y}$$

Il modulo del campo magnetico totale è

$$B_{tot} = \sqrt{B_{totX}^2 + B_{totY}^2}$$

Quindi il modulo della forza per unità di lunghezza che agisce sul filo elementare è:

$$f = B_{tot} I_3 = 0.8 \cdot 10^{-6} N/m$$