Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 01/07/2016
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1.2$m e massa $M = 3$kg ha i due estremi vincolati (vincolo bilatero) a una guida circolare di raggio $r = 1$m (Fig.1). La guida è montata verticalmente, in presenza di gravità. Non esiste nessun tipo di attrito.

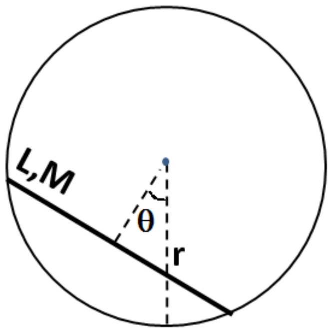

Fig.1

Inizialmente $\theta = 0$. Si calcoli:

a) il minimo valore di $\dot{\theta}(t=0)$ che permette alla sbarra di percorrere un giro completo sulla guida

$$\dot{\theta}(t=0) = \text{.................}$$

b) il valore dell'energia e del momento angolare per $\theta = \frac{\pi}{4}$, assumendo come condizioni iniziali quelle del punto precedente

$E_{\pi/4} =$ .... $L_{\pi/4} =$ ....

c) il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile

$$T = \text{.................}$$

Soluzione

a)
Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al centro della guida circolare è:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

dove $d = \sqrt{r^2 - (L/2)^2}$ è la distanza tra il centro di massa dell'asta e il centro della guida. L'energia si conserva, quindi, il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sbarra di fare un giro completo, è quello che le permette di raggiungere il massimo dell'energia potenziale. Si ha pertanto:

$$Mg2d = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}(t = 0) = \sqrt{\frac{4Mgd}{I}} = 9.13s^{-1}$$

b)
L'energia si conserva quindi

$$E_{\pi/4} = Mg2d = ...J$$

la velocità angolare della sbarretta ($\dot{\theta}_1$) quando si trova a $\pi/4$ è:

$$2Mgd(1 - cos(\pi/4)) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2Mgd(1 - cos(\pi/4))}{I}}$$

il momento angolare della sbarretta è dato pertanto da:

$$L = I\dot{\theta}_1 = \sqrt{I2Mgd(1 - cos(\pi/4))} = 6.12Kgm^2/s$$

c)
Il periodo delle piccole oscillazioni si calcola come il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 1.38s$$

Esercizio 2

Un condensatore cilindrico è costituito da un'armatura interna di raggio a e una esterna di raggio $b = 3$mm. Entrambe le armature hanno lunghezza $L = 40$mm e vengono mantenute a una differenza di potenziale costante $V = 27$V da una pila (Fig.2.A).

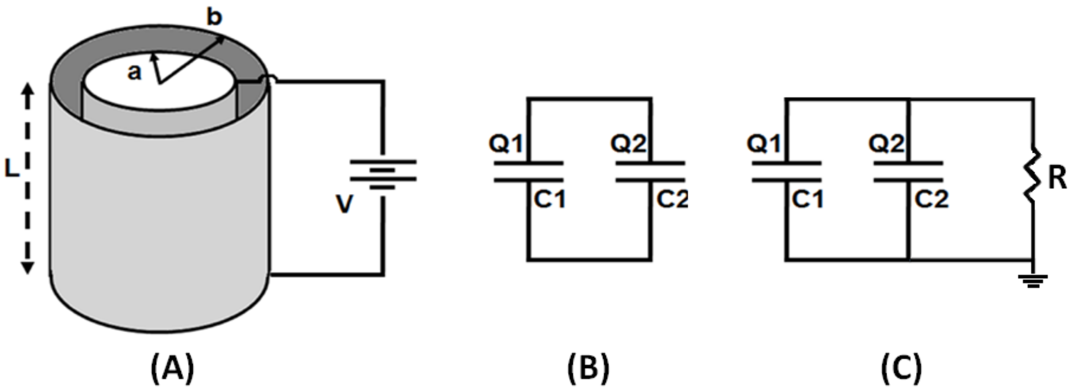

Fig.2

Si calcoli:

a) il raggio a dell'armatura interna affinchè su di essa il campo elettrico sia minimo e la risultante carica sul condensatore ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$F/m).

$a =$ .... $Q =$ ....

Si consideri il condensatore con la solita carica Q sulle armature e lo si colleghi a un altro condensatore cilindrico di capacità $C_2 = 3 \cdot 10^{-12}$F (Fig.2.B). Si calcoli:

b) Le cariche Q_1 e Q_2 contenute rispettivamente nel primo e nel secondo condensatore dopo che sono stati collegati.

$Q_1 =$ .... $Q_2 =$ ....

Il sistema visto nel punto precedente viene connesso a una resistenza $R = 7 \cdot 10^6\Omega$ collegata a terra (Fig.2.C). Si calcoli:

c) La potenza dissipata nella resistenza a $t_1 = 2 \cdot 10^{-6}$s

$P(t_1) =$ ....

Soluzione

a)
La capacità del condensatore cilindrico è:

$$C_1 = \frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La carica contenuta nel condensatore, in funzione di a, è:

$$Q = C_1 V = V\frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Il campo elettrico all'interno di un condensatore cilindrico, a distanza r dall'asse del condensatore, può essere ricavato tramite la legge di gauss e risulta:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Lr}$$

Il campo elettrico sulla superficie dell'armatura interna del condensatore è dato pertanto da:

$$E = \frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)a}$$

Per valutare il minimo del campo elettrico sulla superficie interna del condensatore in funzione del raggio interno a bisogna derivare l'espressione del campo elettrico rispetto ad a e porla uguale a zero.

$$\frac{dE}{da} = \frac{V - Vln\left(\frac{b}{a}\right)}{a^2 ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{b}{e} = 1.1\cdot 10^{-3}m$$

La carica contenuta nel condensatore vale pertanto:

$$Q = V\frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 6\cdot 10^{-11}C$$

b) I condensatori di capacità C_1 e C_2 sono collegati in parallelo. Le cariche Q_1 e Q_2 rispettivamente sul condensatore di capacità C_1 e C_2 possono essere valutate considerando la conservazione della carica

$$Q = Q_1 + Q_2$$

e imponendo la stessa differenza di potenziale ai capi dei due condensatori.

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Mettendo a sistema queste due relazioni si ricava:

$$Q_1 = \frac{QC_1}{C_1 + C_2} = 2.55\cdot 10^{-11}C \qquad \Rightarrow \qquad Q_2 = \frac{QC_2}{C_1 + C_2} = 3.45\cdot 10^{-11}C$$

c)
Il circuito dell'esercizio è un circuito RC che si sta scaricando. La capacità equivalente è data da:

$$C_e = C_1 + C_2$$

la differenza di potenziale ai capi dei condensatori inizialmente vale $V_0 = \frac{Q_1}{C_1}$ la corrente che circola nel circuito in funzione del tempo è

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}$$

La potenza dissipata nella resistenza a un tempo t_1 è:

$$P(t_1) = Ri^2(t_1) = V_0^2 e^{-2t_1/RC_e} = 102W$$