Le relazioni trovate finó ad ora per un sistema di punti materiali o per un corpo rigido possono essere riassunte da

1) $\vec{P}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{cm}$

2) $\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{cm}$

deriva da
$$\begin{cases} \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{cm} \\ \dfrac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = v_{cm} \\ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\vec{v}_{cm} \qquad 1) \end{cases}$$

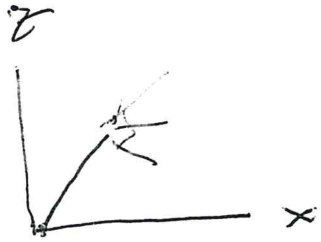
$$\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{cm} \qquad 2)$$

Se $\vec{F}_i(E) = 0 = \vec{P}^{\,i}_{cm} = \text{cost}$

$$\vec{F}_i(E) = \frac{dP^{\,i}_{cm}}{dt}$$

1.1

Se ad esempio abbiamo un proiettile che sparato esplode



$F_z = -Mg$ $\quad F_x = F_y = 0$ $\quad P_x = cost$

$P_y = cost$

Per un sistema di punti materiali o per un corpo rigido esiste un'importante relazione per l'energia cinetica nel sistema del laboratorio e nel sistema del CM.

Teorema di ~~Koenigi~~ dell'energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{K_{CM}}$$

nel sist del lab.

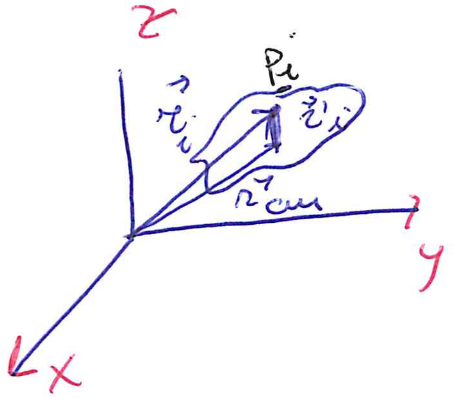
dove $E_K$ è l'energia cinetica nel SRI

e $E_{K_{CM}}$ è l'energia cinetica in SCM.

demostrazione

# Teorema di Koenig dell'energia cinetica

In $S_{lab}$



$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_i$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$ → velocità del punto materiale in SCM

Energia cinetica in $S_{LAB}$ → $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i + v_i'^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i\right) v_{CM}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_i \vec{v}'_i m_i}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

velocità di SCM in SCM!

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{\text{velocità del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v'^2}_{E_K^*}$$

Per il momento angolare di un sistema ④ di punti materiali o un corpo rigido vale

$$\vec{L}_o = \sum_i \underline{\vec{r}_i} \wedge m_i \underline{\vec{v}_i} = \vec{r}^{\,o}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i{}' \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$= \vec{r}^{\,o}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}^{*}_i$$

Teorema di Koenig del momento angolare

Dimostrazione :

$$\underline{\vec{r}_i = \vec{r}^{\,o}_{cm} + \vec{r}\,'_i}$$
$$\underline{\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i}$$

$$\cancel{\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{n} r^{o}_{cm} \wedge m_i}$$

$$\vec{L}_o = \sum_i \left(\underset{1}{\vec{r}^{\,o}_{CM}} + \underset{2}{\vec{r}\,'_i}\right) \wedge m_i \left(\underset{1}{\vec{v}_{CM}} + \underset{2}{\vec{v}\,'_i}\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_o = \left(\sum_i m_i\right) \overset{\vec{r}_{o\,cm} \wedge \vec{P}_{cm}}{\vec{r}^{\,o}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}} + \overset{L^{CM}}{\sum_i \vec{r}\,'_i \wedge m_i \vec{v}\,'_i}}$$

$$+ \left(\sum_i r'_i m_i\right) \wedge \vec{v}_{CM} + \cancel{\sum_i} \vec{r}^{\,o}_{CM} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}\,'_i}_{\vec{P} \text{ del CM in SCM} = 0}$$

$\vec{r}\,'_{cm} = 0$ nel cm ~~è~~ il cm è nell'origine!

In conclusione

$$\vec{L}^{\,o} = r^{o}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'$$

↑ momento angolare nel CM. rispetto al cm.

↓

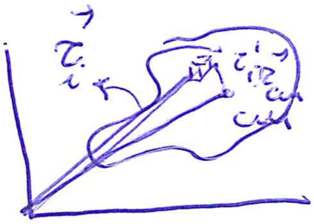
momento angolare del CM rispetto al polo o

- Definizione di corpo rigido

è un corpo indeformabile nel quale la distanza tra tutte le coppie di particelle è inalterata (rimane costante).

$r^{cm}$ –
o per
un
corpo conti
nuo!

→ $r_{cm}$?



dividiamo il corpo in tanti elementini di massa $\Delta m_i$

$$x_c = \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

(idem in $y$ e $z$)

$$x_c = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x \, dm$$

$$\rightarrow \vec{r}_c = \frac{1}{M}\int \vec{r} \, dm$$

esercizi

$dm = \rho \, dV$ se la massa è distribuita su un volume

$\frac{dm}{ds} = \rho_s$ su una sup

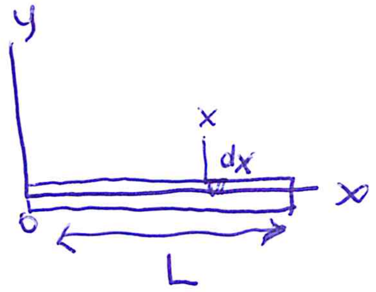
$\frac{dm}{dl} = \rho_l$ su una linea

Centro di massa di una sbarretta omogenea

Serway 9.13 ⑦

per simmetria $y_c = 0$

$z_c = 0$



$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \qquad x_{cm} = \frac{1}{M}\cdot\int_0^L x\,\rho_\ell\,dx = \frac{1}{M}\rho_\ell\frac{L^2}{2}$$

$dm = \rho_\ell\,dx$

~~$\rho$~~ $x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}}\frac{\cancel{M}}{\cancel{L}}\cdot\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{L}{2}$

Sbarretta non omogenea $\rho(x) = \alpha x$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\alpha x\,dx = \frac{1}{M}\frac{L^3}{3}\cdot\alpha =$$

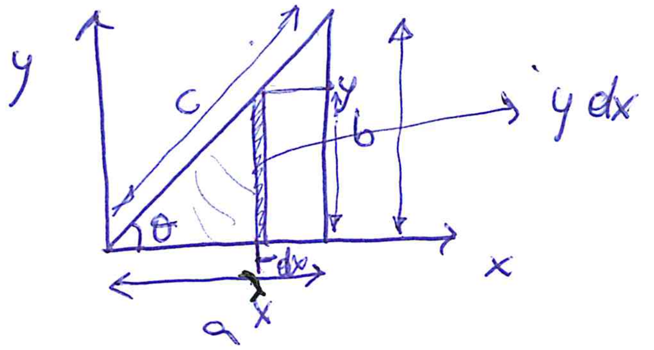
ma $\int_0^L \rho(x)\,dx = M = \alpha\frac{L^2}{2} = M \qquad \alpha = \frac{2M}{L^2}$

$\int_0^L \alpha x\,dx$

per cui $x_{CM} = \frac{1}{\cancel{M}}\cdot\frac{L^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{2\cancel{M}}{\cancel{L^2}} = \frac{2}{3}L$

# Centro di massa di un triangolo rettangolo ⑧

$\varrho = \varrho_S$ !



baricentro in x affetto in ~~x~~

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \varrho_S\, ds \cdot x$

$ds = (\cancel{bx}(y))\, dx$

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a \varrho_S\, y\, dx\, x$

$y = x\, tg\theta$

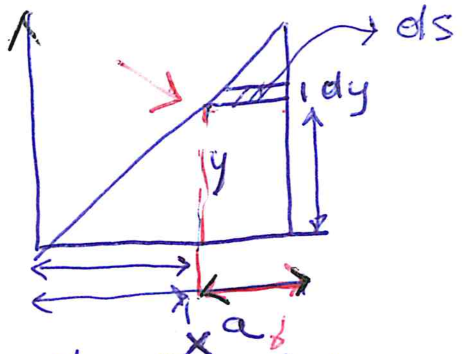
$x_{cm} = \frac{1}{M}\varrho_S \cdot \int_0^a x^2\, tg\theta\, dx$

$tg\theta = \frac{b}{a}$

$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}} \cdot \frac{2\cancel{M}}{\cancel{a}\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^{\cancel{3}}}{3} =$

$x_{cm} = \frac{2}{3}a$

$$\boxed{\varrho_S = \frac{M}{ab}2 = \frac{M}{S}}$$



$ds = (a - x)\, dy$

$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, \varrho_S\, ds$

$y_{cm} = \frac{\varrho_S}{M}\int_0^b y\overbrace{(a - x)\, dy}$

~~ax~~

$x\, tg\theta = y \Rightarrow x = \frac{y}{tg\theta}$

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\varrho_S}{M}\int_0^b y\left(a - \frac{y}{tg\theta}\right) dy}$$

~~$y_{cm} = \frac{\varrho_S}{M}\frac{b^2}{2}\cdot a - \frac{\varrho_S}{M}\frac{1}{tg\theta}$~~

~~$y_{cm} = \frac{2M}{ab}\left[\frac{b^2}{2}a - \frac{a}{b}\cdot\frac{b^3}{3}\right]$~~

$$\rho_S = \frac{2M}{ab}$$

$$y_{cm} = \frac{\rho_S}{M}\int_0^b y\left(a - \frac{y}{tg\theta}\right)dy \quad \textcircled{y}$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a}$$

$$y_{cm} = \frac{2M}{ab}\cdot\frac{1}{M}\left(\frac{ab^2}{2} - \left(\frac{a}{\cancel{b}}\right)\frac{b^{\overset{2}{\cancel{3}}}}{3}\right) = \frac{2}{\cancel{a}\cancel{b}}\left(\frac{1}{6}\cancel{a}\,b^{\cancel{2}}\right) = \frac{b}{3}$$

$$\frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3}$$

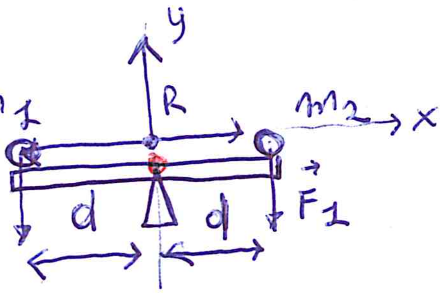
$$\frac{3a^2b^2 - 2ab^2}{6}$$

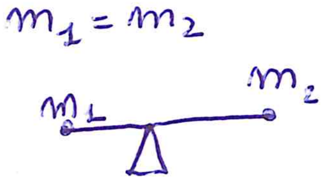
Momento di una Forza rispetto a un polo

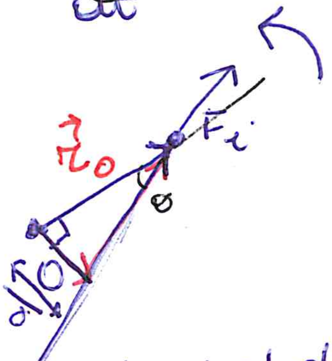
è definito da $\vec{\tau}^{o} = \vec{r}_0 \wedge \vec{F} = \vec{r}_0 \wedge \frac{[illegible]}{dt}$

~~per un corpo rigido~~ ↑ Polo

1) a)







$|r_0 \wedge F| = |F| d$
↓
braccio della F

per un ~~sistema~~ ~~affinché esso~~ sistema affinché esso sia in equilibrio non basta che la somma delle forze sia nulla è anche necessario che il momento della forza risultante sia nullo

$$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0 \qquad e \qquad \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0 \quad !$$

altrimenti il corpo ruota

~~per~~ per l'es. a)

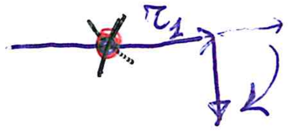
$m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{R} =$

$R = m_1 g - m_2 g$:

$R = m_1 g + m_2 g$

$R = 2mg$

es. 1) $\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$



$-mg r_1 \hat{z} + mg r_2 \hat{z}$

solo se i bracci sono uguali il corpo non ruota attorno a z

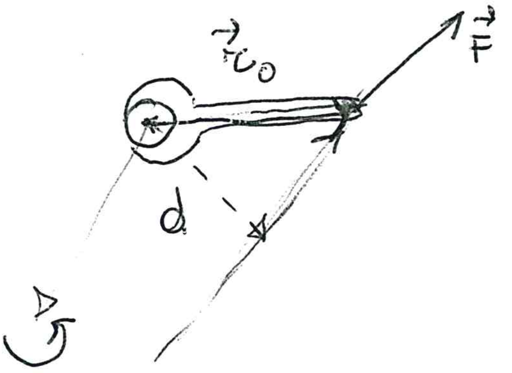
Equilibrio ok

$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0$

$\sum_i \vec{r}_i \wedge F_i$

Quando si applica una forza a un corpo rigido che può ruotare attorno ad un asse fisso questi si mette a ruotare

es.



$$\vec{\tau} = \vec{r}_0 \wedge \vec{F}$$

$\vec{r}_0$ vettore distanza dall'asse di rotazione al punto di applicazione di $\vec{F}$

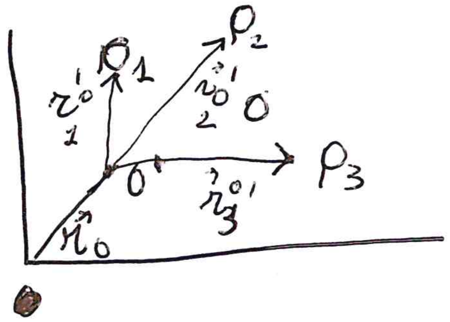
$$\vec{\tau} = |d|\cdot|F| \; \hat{z}$$

d braccio della forza

d = distanza minima tra O e la retta di applicazione di $\vec{F}$

Torniamo alla definizione di momento delle forze rispetto a un polo

$\vec{M}^o = \sum_i r^o_i \wedge \vec{F}_i$ dove in generale



Per un corpo rigido

~~$\vec{F}_i$ sul punto $\vec{P}_i$~~

$M^o$

è dovuto ~~alle~~ | contributo delle sole forze esterne e non alle forze interne

~~forze interne~~ in fatti

es sistema terra luna sole

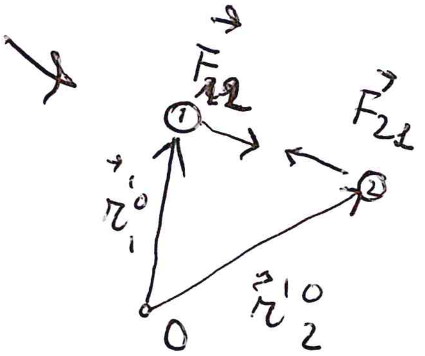
~~quando~~ $\vec{F}_i = \vec{F}_i(E_i) + \vec{F}_i(I)$

$\vec{F}_{sole\,Terra} = -\vec{F}_{T\,sole}$

$\vec{F}_{luna\,Terra} = -\vec{F}_{T\,e}$

ecc.

prendiamo una coppia di punti 1 2 es



il loro contributo a $\vec{M}^o$

$= r^o_1 \wedge \vec{F}_{12} + r^o_2 \wedge \vec{F}_{21}$

$= r^o_1 \wedge \vec{F}_{12} + r^o_2 \wedge (-\vec{F}_{12})$

$= (\vec{r}^o_1 - \vec{r}^o_2) \wedge \vec{F}_{12}$

//

$= 0$

la diff $\vec{r}'^o_1 - \vec{r}'^o_2$ è parallela sia a $\vec{F}_{12}$ e a $\vec{F}_{21}$

Quindi

Dato un sistema di punti materiali

su ciascun punto materiale

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \sum_n \vec{F}_{in}^{(E)} + \sum_{n'} \vec{F}_{in'}^{(I)}$$

$$= \vec{F}_i (E) + \vec{F}_i (I)$$

ma per il sistema totale (N punti materiali

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i (I) + \vec{F}_i (E) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i (E)$$

$$\vec{M}^0 = \vec{M}^0 (\vec{E})$$

Per cui riassumendo le due equazioni cardinali

1) $M \vec{a}_{cm} = \vec{F} (E)$

2) $\vec{M}^0 = \vec{M}^0 (\vec{E}) = \sum_i \vec{r}_i^{\,0} \wedge \vec{F}_i (E)$

$$= \sum_i \vec{r}^{\,0}_i \wedge \vec{F}_i$$

Quindi tornando alle equazioni scritte

per il baricentro

$$\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{CM}$$

la risultante delle forze Esterne

determina il moto del CM

es 3 particelle 12 23 13 $\quad \sum_i \vec{F}^i(I) = 0$

21 32 31 $\quad \sum_i \vec{F}^i(E) = M\vec{a}_{CM}$

mentre

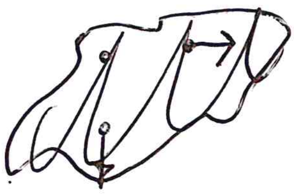
$$\vec{M}^o(E) = \cancel{\sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge (\vec{F}_i(I)) + \ldots_{i \neq j}}$$

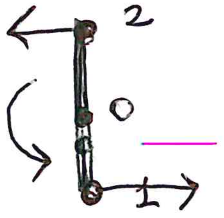
$$\sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \vec{F}^i(E)$$

per cui sebbene $\sum_i F^i(E)$ può essere nullo

può non esserlo $M^o(E)$ !

es.





$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

$\vec{a}_{CM} = 0$

ma

$\vec{M}^o(E) \neq 0$

e le due particelle ruotano intorno a O

$$\vec M^{O}_{(E)} = \sum_i \vec r^{O}_i \wedge \underline{F^i(E)}$$

quindi $I^a$ eq cardinale $\left\{ M \vec a_{CM} = \sum_i \vec F_i(E) \right.$

$\dot M \vec a_{CM} = 0$

$\vec v_{CM}$ cost o nulla

$II^a$ eq. card $\quad \vec M^{O}(E) = \sum_i \vec r^{O}_i \wedge \vec F^{e}(E)$

momento angolare di un sistema di particelle

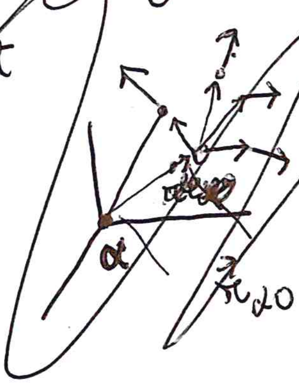
$$\vec L^{O} = \sum_i \vec r^{O}_i \wedge \vec P_i$$

$$\frac{d\vec L^{O}}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{d\vec r^{O}_i}{dt} \wedge \vec P_i}_{\parallel} + \underbrace{\sum_i \vec r^{O}_i \wedge \frac{d\vec P_i}{dt}}_{\parallel = 0}$$

→ per un moto circ unif. $= 0$

→ per un moto circ unif

~~$\frac{d\vec L^{O}}{dt} = \sum_i \vec r_i \wedge \vec P_i$~~



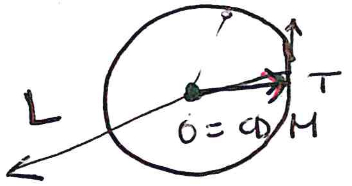
~~Se il polo non è nell'origine del sistema~~

es. Terra che ruota intorno al sole (origine nel S CM del sist)

$$\vec L^{S}_{T} = \vec r_{ST} \wedge m_T \vec v_T$$

$r_{ST}$ = cost

$\frac{d\vec P_i}{dt}$ diretto come $r_{OS}$



orbita circolare

$\omega$ = costante

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \qquad T = \pi \times 10^7 s$$

la Forza è centrale

$$\boxed{\vec M^{S}(E) = 0}$$

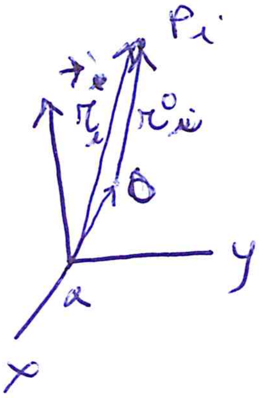
↑ non ci sono Forze esterne al sistema

$\vec M_S(E) \cdot \hat z = 0$ | cost.

$L_z =$ cost ! | $m_T v_T R_{TS}$

→ Relazione tra L e il M(E)

Ora se il polo non coincide con l'origine del sistema



$$\vec{\alpha}_0 + \vec{r}^0_i = \vec{r}_i$$

$$\vec{r}^0_i = \vec{r}_i - \vec{\alpha}_0 \qquad \frac{d\vec{r}^0_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{V}_0$$

$$\vec{L}^0 = \sum_i \vec{r}^0_i \wedge \vec{P}_i \qquad \frac{d\vec{L}^0}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}^0_i}{dt} \wedge \vec{P}_i + \sum_i \vec{r}^0_i \wedge \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}^0}{dt} = \underbrace{\cancel{\sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i}}_{①} \underbrace{- \vec{v}_0 \sum_i \wedge \vec{P}_i}_{②} + \underbrace{\cancel{\sum \vec{r}^0_i \wedge \vec{F}_i(I)}}_{③} + \underbrace{\sum \vec{r}^0_i \wedge \vec{F}_i(E)}_{④}$$

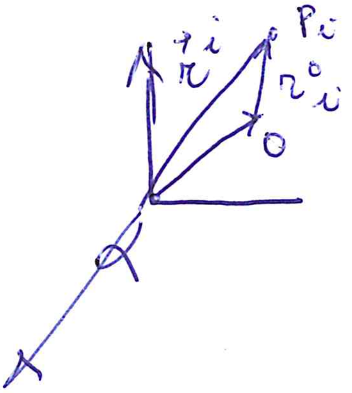
$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i(I) + \vec{F}_i(E)$$

④ = M(E)

① = 0 $\quad \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

③ = 0 $\quad$ coppie ij per un corpo rigido CR
F(I)
non contribuiscono

$$\frac{d\vec{L}^0}{dt} = \vec{M}(E) - \vec{v}_0 \wedge \sum_i \vec{P}_i \Rightarrow$$



$$\vec{\alpha O} + \vec{r}^o_i = \vec{r}_i$$

$$r^o_i = \vec{r}_i - \overrightarrow{\alpha O}$$

$$\frac{dr^o_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{v}_o$$

$$\vec{L}^o = \sum_i \vec{r}^o_i \wedge \vec{P}_i$$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}^o_i}{dt} \wedge \vec{P}_i + \sum_i \vec{r}^o_i \wedge \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i}_{①} \underbrace{- \vec{v}_0 \wedge \sum_i \vec{P}_i}_{2} + \underbrace{\sum_i \vec{r}^o_i \wedge F^i(E)}_{3} + \underbrace{\sum_i \vec{r}^o_i \wedge F^i(I)}_{④}$$

$$\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

//

① nullo

$\boxed{\text{nullo Forze az. reaz}}$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \vec{M}^o(E) - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$$

$$\vec{M}^o(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{P}_{cm}$$

Questa relazione

$$M^{o}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{P}_{cm}$$

~~dto~~

ci dice che ~~se prendiamo un polo fisso~~

1) polo fisso $\vec{v}_o = 0$ → $\vec{M}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt}$

se il polo

2) è il CM $\vec{v}_o = \vec{v}_{CM}$ ma $\vec{v}_{CM} // \vec{P}_{CM}$ $\vec{M}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt}$

3) se il polo è mobile ~~[illegible]~~ e si muove nella direzione del CM $\vec{v}_o // \vec{P}_{cm}$ $\vec{M}^{o}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt}$

Negli esercizi sceglieremo sempre o un polo fisso o il CDM nell'ultimo caso se sceglivamo il CDM per polo

$$\vec{M}^{CM}(E) = \left.\frac{d\vec{L}^{CM}}{dt}\right)_{SRi}$$

Quindi se faremo le scelte 1 o 2 o 3

$$\vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm}$$

$$\vec{M}^{0}(E) = \frac{d\vec{L}^{0}}{dt}$$

Se $\vec{M}^{0}(E) = 0$ $\quad \vec{L}^{0} = \text{cost}$

Se $\vec{M}^{0}(E)$ è nullo in una componente (i)
per quella componente

$\vec{M}^{0}_{i}(E) = 0 \quad \rightarrow \quad L^{0}_{i} = \text{cost}$ !

1) polo fisso $v_0 = 0$

$$\boxed{\vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm} = 0}$$

2) polo = al cm

$$\vec{M}^0(E) = \frac{d\vec{L}^0}{dt} + \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$$

3) $\vec{v}_0 \parallel \vec{P}_{cm}$

$$\vec{M}^0(E) = \frac{d\vec{L}^0}{dt}$$

equazioni cardinali del moto

$$\begin{cases} 1)\ \vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm} \\ 2)\ \vec{M}^0(E) = \left(\frac{d\vec{L}^0}{dt}\right) \end{cases} \Longrightarrow \vec{M}^{0i}(E) = 0$$

$\rightarrow L^{0i}$ è una costante del moto

Per un corpo rigido

→ se sappiamo che sul sist. agiscono solo forze interne

$$\vec{M}(E) = 0\,!$$

e $\vec{L}^0$ è costante cioè conservato

Nota: se sul sistema agissero solo forze interne

$\vec{M}^O(E) = 0 \quad \leftrightarrow$ e $\vec{L}^O$ ~~([illegible])~~ = costante

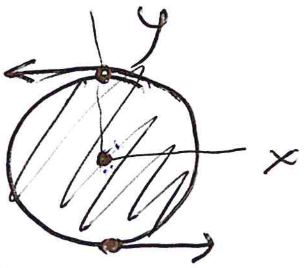
conseguenza del principio di azione e reazione! esse agiscono sulla stessa retta di applicazione

per i casi 1, 2, 3

Se $\vec{M}^O(E) \neq 0$

la $\Sigma F^i_E =$ ~~[illegible]~~ $M\vec{a}_{CM}$ e può anche essere nulla

ma se sul sistema agiscono forze esterne che non hanno la stessa retta di applicazione



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

es. corpo rigido disco vincolato a ruotare su un'asse ~~che~~ passa per il cm

$\Sigma_i (\vec{F}_E)^i_e = 0$

$\rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 \quad v_{cm} = 0$

ma $\quad M^{CM=0}_{(E)} = \alpha \neq 0!$

il corpo ruota!

Abbiamo detto che nelle nostre applicazioni sceglieremo per calcolare $\vec{M}^o(E)$

$$\vec{M}^o_t(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt} - \vec{v}_o \wedge \vec{P}_{cm}$$

① $\vec{v}_o = 0$ polo fisso

② $\vec{v}_o \parallel \vec{v}_{CM}$ polo mobile con $\vec{v}_o \parallel \vec{v}_{cm}$

③ $O = CDM$ il polo coincide con il CDM + è un polo mobile (o meno dipende da $\vec{v}_{cm}$)

In questi casi

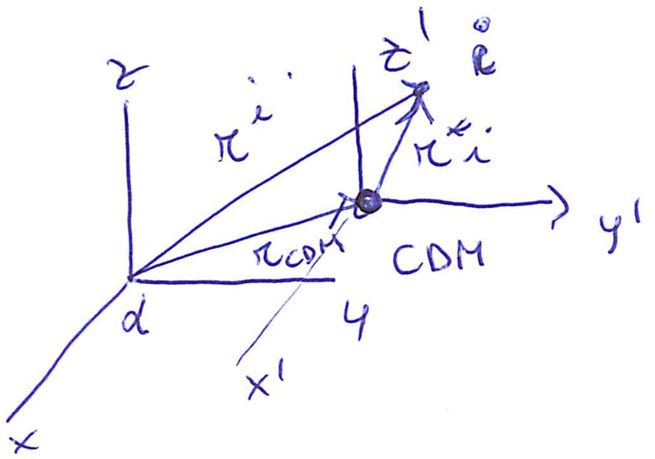
$$\vec{M}^o(E) = \frac{dL^o}{dt}$$

Sistema del CENTRO DI MASSA

~~Il~~ La posizione del CDM è un punto geometrico ben definito nel SRI è spesso utile considerare il moto rispetto al CDM

~~a) Si sceglie un SDRI~~

1) Si sceglie un sistema di riferimento inerziale



2) si piazza l'origine di un sistema cartesiano nel CDM con gli assi paralleli a quello di partenza

in ogni istante

Indichiamo con $\vec{r}^*_i$ ~~la coordinata~~ ~~il raggio~~ il ~~ra.~~ vettore posizione del punto i-esimo in SCDM e con $\vec{r}_i$ quelle in SRI

$\vec{r}_{CDM}$ posizione di CM in SRI

vale: $\vec{r}^*_i + \vec{r}_{CDM} = \vec{r}_i$

$$r^*_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CDM}$$

$$v^*_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CDM}$$

$$a^*_i = \vec{a}_i - \vec{a}_{CDM}$$

Il sistema scelto

a) non ruota

b) esso trasla con la velocità del CM

c) la sua velocità può essere non costante (l'SCDM può essere non inerziale

In esso:

$$\sum_i m_i \vec{r}^{\,*}_i = 0 = \vec{r}^{\,*}_{cm}$$

es. $\sum_i m_i \vec{r}^{\,*}_i =$

$\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_{cm}$

$= \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{} - M\vec{r}_{cm}$

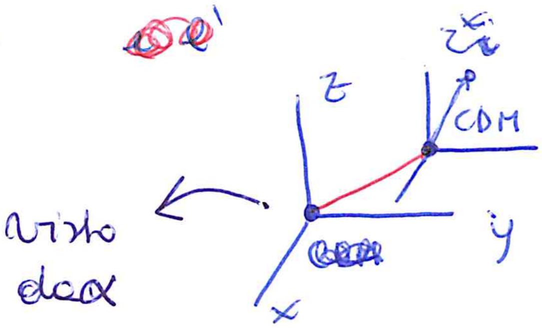
$= M\vec{r}_{cm} - M\vec{r}_{cm}$

$$\boxed{a)\ \vec{v}^{\,*}_{cm} = 0 = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}^{\,*}_i}{dt}}$$

$$\vec{a}^{\,*}_{cm} = 0 = \sum_i m_i \frac{d^2 r^*_i}{dt^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P}_{cm} = 0 = 0}$$

d'altra parte se il polo è il CDM
il polo è mobile



nel laboratorio

$$\vec{L}^{CDM} = ~~\sum_i(\vec{r}_{cm}+\vec{r}_i^*)~~ \sum_i \vec{r}_i^* \wedge (m_i \vec{v}_i)$$

infatti in questo caso la posizione del punto $P_i$ rispetto al polo è $\vec{r}_i^*$ ~~(distanza)~~

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_{i=1}^{n} r_i^* \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^* \wedge m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_{cm})$$

$$v_i^* = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* + \underset{\downarrow}{\sum_i m_i \vec{r}_i^*} \wedge \underset{\downarrow}{\vec{v}_{CM}}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* + \vec{r}^*_{cm} M \wedge \vec{v}_{cm}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} =0 \\ r^*_{CM} \\ \text{nel CDM} = 0 \end{array}}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \vec{L}^{*CMD}$$

ricordiamo che abbiamo detto
che ~~nella maggi~~ negli esercizi considereremo
un polo fisso oppure il CM.

a seconda di quello che ci interessa

Ma se il polo è il CDM.

1) $L^{CDM} = L^{* CM}$

In generale ricordiamo che

$$\rightarrow \frac{dL^{o}}{dt} = M^{o}(E) - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{CM}$$

↳ nel lab

• $\vec{v}_0 = v_{CM}$

se il polo è il CDM

$$\frac{dL^{CM}}{dt} = M^{CM}(E) = \boxed{\frac{dL^{CM*}}{dt} \quad \text{dalla 1)}}$$

Avete già visto il teorema di Koenig dell'energia cinetica

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K^*$$

↳ dovuta al moto delle parti del sistema rispetto/intorno al baricentro

Lavoro per spostare il COM

$$\int_A^B M \vec{a}_{cm} \, d\vec{s} = K_f^* - K_i^*$$

$$\text{cm}$$

Per uno spostamento del corpo qual'è il lavoro compiuto?

↓

questo è lo spostamento elementare della posizione del baricentro

questo non può essere l'unico lavoro

lo è solo se c'è un'unica forza e

è applicata al baricentro!

Quindi ~~del il baricentro~~ il lavoro fatto dalle forze esterne non può essere derivato da

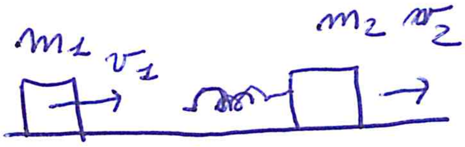
$$\vec{F}^{(E)} = m \vec{a}_{cm}$$

c'è un'altro contributo!

per questo

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K^* \rightarrow$$ dovuto al

al moto delle parti del sistema rispetto al CDM $(K^*)$



Esempio

due corpi di massa $m_1$ e $m_2$ appoggiate su un piano orizzontale privo di attrito sul secondo corpo c'è una molla, né dilatata né compressa : K costante della molla velocità $v_1$ nota e $v_2$ nota. e $v_1 > v_2$

Il primo corpo va a urtare la molla.

Calcolare la max compressione della molla.

Soluzione

- Nel momento in cui la molla ha raggiunto la max compressione la Forza risultante totale è nulla e i due corpi si muovono con velocità V : con le stesse velocità

Quindi

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+\frac{1}{2}kx^2$$

Inoltre non essendoci forze Esterne

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \vec{P}_{cm} = \text{costante}$$

lungo x

$$\vec{P}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \underbrace{(m_1+m_2)\vec{V}}_{\text{si muove lungo x}} = \vec{P}_{cm}\,!$$

ed è costante

da cui abbiamo due incognite e (V e x)

due equazioni da risolvere ....

complicatucce... e poi saremo sicuri delle nostre assunzioni?

~~Fa elaborando con il teorema di Koenig~~

~~della~~ . sul fatto che

$(m_1+m_2)V$ cioè che al max della della compressione le due molle hanno la stessa velocità V?

Il sistema è un sistema di PM!
Notare che è conservata l'Energia totale non quella cinetica → c'è una F(I) (molla)

Nel laboratorio SRI abbiamo dichiarato

che $K_{LAB}^{Finale} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$

è vero? supponiamo che lo vogliamo

dimostrare usando il teorema di Koenig

→ Problema → trovare la ~~minima~~ massima compressione

della molla usando il teorema di Koenig.

e il modo standard

~~nello~~ non ci sono forze esterne

→ $\vec{P}_{CM}$ = costante!

~~per~~

32.07

## Modo standard

note $v_1$ $v_2$ e $K$ $v_1 > v_2$

Non essendoci forze esterne il CM. si muove con velocità costante

$$\vec{F}(E) = 0 \quad m\vec{a}_{cm} = 0$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \text{cost.} \rightarrow \vec{P}_{cm} = \text{cost}}$$

$$1)\ m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f = \dot{P}_{cm} = M v_{CM}$$

Non si sono Forze dissipative

$$2)\ \frac{1}{2} m_1 v_1^{i2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{i2} = \underline{U_{TOT}} = \boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^{f2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f2} + \frac{1}{2} K x^2}$$

Costante

Ricaviamo $v_2^f$ dalla 1) in funzione di $v_1$

$$v_2^f = \frac{m_1 v_1^i + m_2 v_2^i}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} v_1^f$$

$$\boxed{v_2^f = \frac{P_{cm}}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} v_1^f}$$

dalla 2) $\frac{1}{2} K x^2 = U_{TOT} - \frac{1}{2} m_1 v_1^{f2} - \frac{1}{2} \cancel{m_2} \frac{P_{cm}^2}{m_2^{\cancel{2}}}$

[illegible]

$$-\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1^f\right)^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m_2} \left(-\frac{\cancel{2} P_{cm} m_1}{m_2^{\cancel{2}}}\right) v_1^f$$

32.02 La max compressione della [illegible] corrisponde al max di

$$a)\ \boxed{\frac{1}{2}Kx^2} = \underline{U_{TOT}} - \frac{1}{2} m_1 v_1^{f\,2} - \frac{1}{2}\frac{\boxed{P_{cm}^2}}{m_2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} v_1^{f\,2} + \frac{m_1}{m_2}\boxed{P_{cm}} v_1^f$$

derivando rispetto a $v_1$ con $U_{TOT}$ e $P_{cm}$ costanti e uguagliandola a 0 ($\frac{1}{2}Kx^2$ non dipende esplicitamente da $v_1^f$) se è un max derivata nulla

$$-\frac{1}{\cancel{2}} m_1 v_1^f \cdot \cancel{2} \quad -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{m_1^2}{m_2}\cdot \cancel{2} v_1^f + \frac{m_1}{m_2} P_{cm} = 0$$

molp. x $m_2$

$$\Rightarrow m_1 m_2 v_1^f + m_1^2 v_1^f = m_1 P_{CM}$$

$$= v_{1f}\, \cancel{m_1}(m_1+m_2) = \cancel{m_1}\cdot P_{cm}$$

$$b)\quad v_1^f = \frac{P_{cm}}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_1^i + m_1 v_2^i}{m_1+m_2}$$

Sostituendo nella a) otteniamo il valore di

x ( $U_{Tot}$ noto $v_{1f}$ noto $P_{cm}$ noto! )

$v_{1f} = v_{2f}$!

inoltre dalla ⓑ → $m_1 v_1^f + m_2 \boxed{v_1^f} = P_{cm}$

32.03

notiamo che $v_1^f$ corrisponde alla velocità del CM.

$$v_1^f = \frac{P}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = v_{cm}!$$

Ora applichiamo il teorema di Koenig 32.09

ok

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K^*$$

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

a) $E_{TOT\,finale} = \text{costante} = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_{CM}^2$

$$+ \frac{1}{2} m_1 v_1^{*f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*f\,2}$$

a.1 $\boxed{\frac{1}{2} K x^2} = U_{TOT}\; E_{TOT\,finale} - \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_{CM}^2$

$$- \frac{1}{2} m_1 v_1^{*f\,2} - \frac{1}{2} m_2 v_2^{*f\,2}$$

$E_{TOT}$ costante

$v_{CM}$ costante il massimo ~~minimo~~ senza fare conti lo abbiamo per (dalla A.1) $v_1^{*f} = v_2^{*f}$ $= \emptyset$.

$v_1^{f*} = 0 = v_1^f - V_{CM}$ $\rightarrow v_1^f = V_{CM} =$

$v_2^{f*} = 0 = v_2^f - V_{CM}$ $\rightarrow v_2^f = V_{CM}$

$v_1^f = v_2^f = v_{cm}$

32 e 33

Quindi nel laboratorio

$$\underset{\text{note}}{\frac{1}{\cancel{2}} m_1 v_1^2} + \frac{1}{\cancel{2}} \underset{\text{note}}{m_2 v_2^2} - \frac{1}{\cancel{2}}\underset{\text{note}}{(m_1 + m_2)} \underset{\text{noto}}{V_{cm}^2} = \frac{1}{\cancel{2}} K x^2$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \sqrt{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) V_{cm}^2}$$

Nota - l'energia meccanica è conservata perchè non ci sono forze non conservative Ma abbiamo convertito energia cinetica in energia interna.

Koenig

$$E_{in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = K^*_{in} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$= E_f = \frac{1}{2} K x^2 + \underset{0}{\underline{K^*_f}} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Energia di un sistema di punti materiali X4.1
cinetica e altro. . .

$$K = \Sigma_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}_i$ per spostare il punto mat. i-simo di $d\vec{r}_i$

1) $$dW_i = \vec{F}_i(E) \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i(I) \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

per uno spostamento finito in assenza di Forze dissipative

$$W_i = K_i(B) - K_i(A) = \cancel{\int_A^B \vec{F}_i \ldots} \int_A^B \left(\vec{F}_i(I) + \vec{F}_i(E)\right) \cdot d\vec{r}_i$$

$$K_f - K_i = \Sigma_i W_i = U_i - U_f + L_{NC}$$

S.M.P!

$$\downarrow$$

Lavoro fatto da Forze conservative sia Interne che esterne

$$K_f + U_f = U_i + K_i + L_{NC}$$

Conservazione dell'energia se non ci sono forze non conservative

$U_f$ e $U_i$ ricevono contributi da $\vec{F}(I)$ e $\vec{F}(E)$

* Solo se non ci ne ~~sono~~ forze interne ne esterne Ne e NC $\boxed{K_f = K_i}$

E per un corpo rigido?

le F(I) non contribuiscono

infatti riprendendo la 1)

$$dW_i = \vec{F}_i(E) \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i(I) \cdot d\vec{r}_i$$

ma per le forze interne ∀ coppia iJ

che interagisce con forze interne

$$\vec{F}_{iJ}(I) = -\vec{F}_{Ji}(I)$$

~~$\vec{F}_{iJ} + \vec{F}_{Ji} \cdot d\vec{r}$~~

prendiamo una di queste coppie

$$\vec{F}_{iJ} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{Ji} \cdot d\vec{r}_J = \vec{F}_{iJ} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_J)$$

$$= \vec{F}_{iJ} \cdot d\underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_J)}$$

in un CR è costante

$$- d(\vec{r}_i - \vec{r}_J) = 0 \;!$$

$$K_f - K_i = U_i - U_f + L_{NC}$$

$U_i$ e $U_f$ ricevono contributi solo da forze esterne

⇒ Se non ci sono forze esterne né forze non conservative ⇐ $\boxed{K_f = K_i}$ ⇐ ne attrito

Abbiamo trovato per un corpo rigido

1) $\vec F(E) = \dfrac{d\vec P_{cm}}{dt}$

2) $\vec M^{o}(E) = \dfrac{d\vec L^{o}}{dt} = \phi$

queste equazioni sono 6 equazioni e servono a determinare il moto anche di un corpo rigido

* P.M ' anche FE

la 2) vale anche nel CDM quando i momenti sono calcolati nel CDM

$$M^{o}(E) = M^{CM}(E) = \frac{d\vec L^{o=CM}}{dt} = \overset{\text{nel CM}}{\frac{d\vec L'}{dt}} \quad \overset{\text{nel cm}}{[illegible]}$$

vedi Lezioni Tonelli

infatti

$$\to \vec L^{o}_{\text{in generale}} = \vec r^{\,o}_{cm} \wedge \vec P_{cm} + \underset{\text{nel CDM}}{\vec L'^{o}}$$

→ quando il polo è il CDM $\vec r^{\,cm}_{cm} = 0$

e $\vec L' = \sum_i \vec r^{\,i*} \wedge \vec P_i^*$

$\vec L^{CM\ LAB} = \vec L'^{CM}$

$\vec M(E) = \vec M^{*}(E) = \dfrac{dL^{cm\ LAB}}{dt} = \dfrac{dL^{*CM}}{dt}$ !

dalle equazioni cardinali

noi conosciamo <u>solo</u> la risultante

delle forze sul baricentro

$$\sum_i \vec{F}_i(E) = \vec{F}(E) = M\vec{a}_{CM}$$

se conosciamo $\vec{a}_{CM}$ $\to \vec{F}(E)$

~~$\vec{F}(E) \to \vec{a}_{CM}$~~

e <u>solo</u> la risultante

del momento delle forze

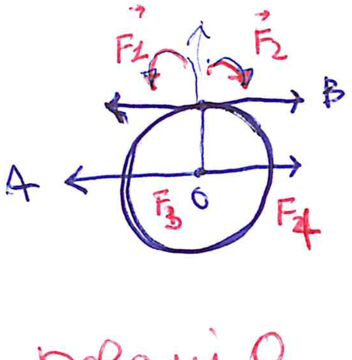
$$\vec{M}^{o}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt}$$

~~se conosciamo~~ L

[illegible]

se conosciamo $\frac{d\vec{L}^{o}}{dt}$

esempio



polo in <u>O</u>

coppia di forze a braccio nullo in O

$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$

$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$

braccio non nullo ~~ma fanno~~

~~a far ruotare~~

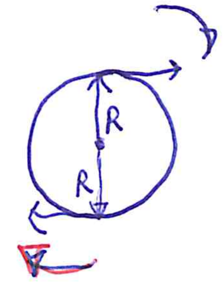
equivalente a nessuna forza

$M\vec{a}_{CM} = 0$

$\vec{M}^{o} = 0$

# FORZE EQUIVALENTI

es ruote che gira attorno a un punto fisso (il CM) in SLAB (che coincide con SCM)



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ $\quad |F_1| = |F_2| = F$

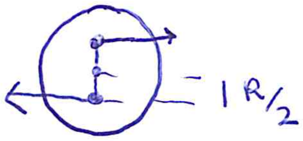
$M\vec{a}_{CM} = 0 = \sum_i \vec{F}_i(E)$

$\vec{M}^O = \vec{R}_1 \wedge \vec{F}_1 + R_2 \wedge \vec{F}_2$

$|M^O_t| = RF + RF = 2RF$

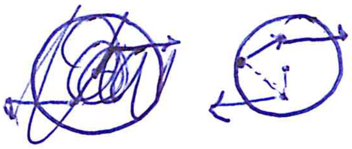
equivalente a $\vec{F}_1{}' = \cancel{\ } \vec{F}_2{}'$

$|F_1'| = 2F$



$|\vec{M}_2{}^O_t| = \frac{R}{2} \cdot 2F + \frac{R}{2} 2F$

omettiamo da ora in poi (E)

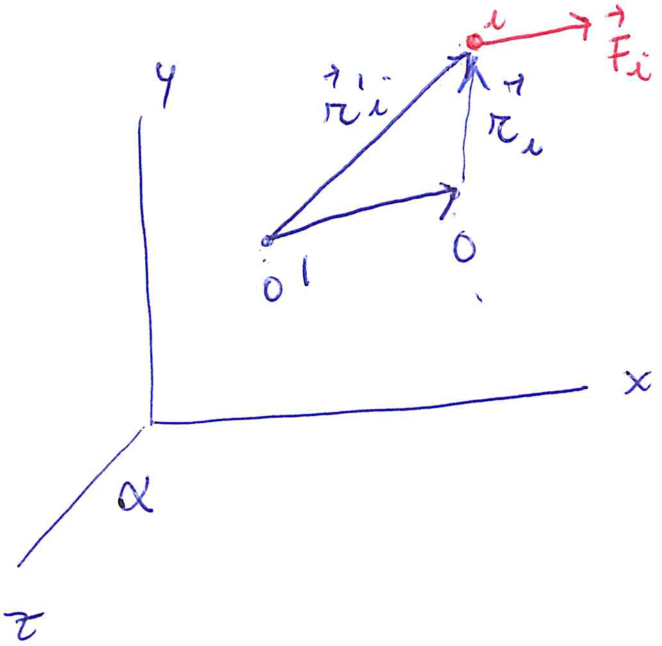


$= 2RF$

→ abbiamo capito che forze a risultante nulla possono avere un momento d. F diverso da ~~0~~ e che esistono forze equivalenti che danno lo stesso momento d. F $\vec{M}^O(E)$

→ dimostriamo che se le forze sono equivalenti danno lo stesso momento rispetto a qualsiasi polo - se la loro risultante è nulla

$$\vec{M}^{O'}(E) = \vec{M}^{O}(E) + O'O \wedge \vec{F}(E)$$



$$\vec{M}^{O'}_i = \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i = (\underline{O'O + \vec{r}_i}) \wedge \vec{F}_i =$$

$$= \vec{O'O} \wedge \vec{F}_i + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$\Sigma$

$$\vec{M}^{O'} = \vec{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}^{O'} = \vec{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \vec{M}^{O}$$

e se $\sum_i \vec{F}_i = 0$ $\quad \vec{M}^{O'} = \vec{M}^{O}$ ! per qualunque O'

## Equilibrio di un corpo rigido

CM rett. unif. o fermo $\begin{cases} M\vec{a}_{cm} = 0 \\ \sum_i F_i(E) = 0 \end{cases}$

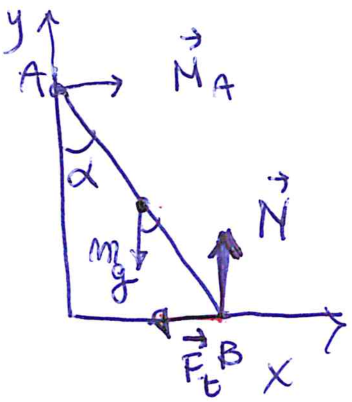
E ↓ AND

$\begin{cases} \vec{M}^{(E)} = 0 \end{cases}$ non ruota

↳ rispetto a un polo qualsiasi!

Vediamo cosa garantisce l'equilibrio

Esempio



Se la scala non scivola

$$\vec{N} + \vec{F}_t + \vec{N}_A + m\vec{g} = 0$$

$$\vec{M}^o = 0$$

1) $\sum_i F_i^y = 0$ $\boxed{\text{lungo } y \quad N = mg}$

$\sum_i F_x^i = 0$ lungo x ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$N_A = F_t$

la prima ci da N

la seconda è una relazione tra due incognite

Tutte le forze sono sul piano x,y

di conseguenza $\vec{M}^o$ sarà diretto lungo $\hat{z}$ ~~è ortogonale alla~~

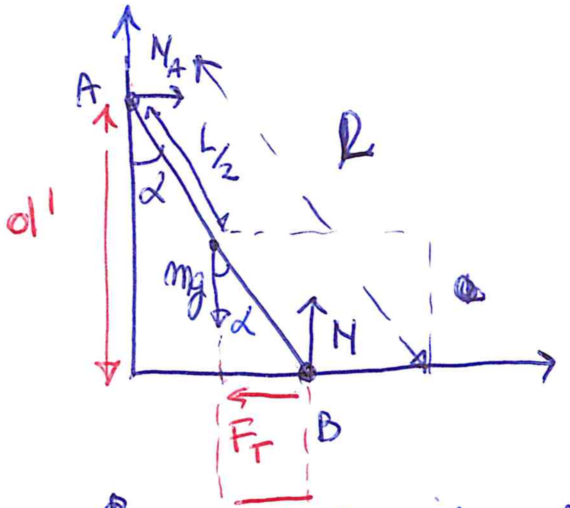
$$\vec{M}^o = \sum_i \underset{\text{su } xy}{\vec{r}_i} \wedge \underset{\uparrow \text{ su } x,y}{\vec{F}_i}$$

L'equilibrio è garantito da $M_z = 0$

Scegliamoci un polo comune (A o B) per calcolare $M_z$ → se il corpo non ruota l'equilibrio è garantito da $M_z = 0$

→ Possiamo scegliere un polo qualunque se $\vec{F}(E) = 0$!

scegliamo B (annulla 2 forze!)



ricordiamo

$N = mg$

② $N_A = F_T$

~~$M_z^B$~~ $d = \frac{\ell}{2} \sin\alpha$ $M_z^B = mg \frac{\ell}{2} \sin\alpha - N_A L \cos\alpha$

↑ 2

G

Se non ruota : $M_z^B = 0 \Rightarrow N_A = \frac{mg \frac{\cancel{\ell}}{2} \sin\alpha}{\cancel{\ell} \cos\alpha}$

~~Quindi $N_A$ =~~

② $N_A = \frac{mg}{2} tg\alpha$

$N_A = +F_T = mg/_2 \; tg\alpha$

~~$\frac{mg}{2} tg\alpha = |F_T| \leq \mu_s \cdot N = \mu_s mg$~~

~~$tg\alpha \leq \mu_s \cdot 2$~~

$$N_A = \boxed{F_T = \frac{mg}{2} \cdot tg\,\alpha}$$

Inoltre $F_T^{max} = \mu_s N = \mu_s mg$

cioè $\cancel{\frac{mg}{2}}\, tg\,\alpha = F_T \leq \mu_s \cancel{mg}$

quindi se vogliamo che la scala

non cade

$tg\,\alpha \leq 2\mu_s$ es. $\mu_s = 0.2$

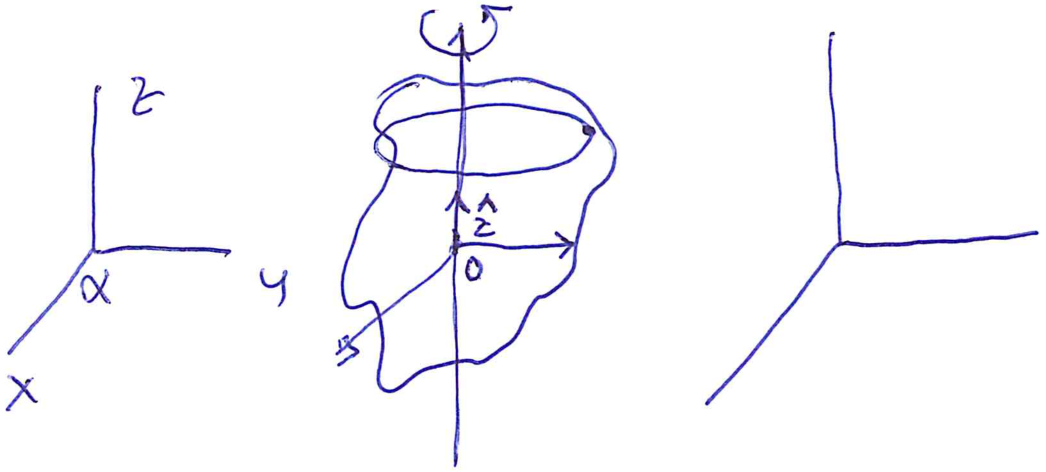
$tg\,\alpha_{max} = 0.4$

e per $\alpha \geq$ atg $0.4 = 22°$

la scala cade!

# Torniamo al momento angolare

ed esaminiamo il caso più semplice quello di una rotazione attorno a un asse fisso che per semplicità assumeremo essere parallelo all'asse $\hat z$ (così sarà in tutte le nostre applicazioni) o comunque attorno a $\hat x$ o $\hat y$ del nostro sistema di riferimento inerziale. Nell'esempio $\hat z$.



$$\vec M^0 = \frac{d\vec L^0}{dt} = M^0_z \hat z + M^0_x \hat x + M^0_y \hat y = \left.\frac{dL^0}{dt}\right)_x \hat x + \frac{dL^0}{dt}\hat y + \frac{dL}{dt}$$

proiettiamo $\vec M^0$ lungo l'asse z

$$\to M^0_z = \vec M^0 \cdot \hat z = M^0_z = \frac{dL^0_z}{dt} \quad !$$

↑
componente "assiale"

Vogliamo dimostrare che scelto un polo lungo l'asse di rotazione ($\vec{z}$ nell'es.)

$L^{O}_{z} = L^{O'}_{z} = L_z$ qualunque sia il polo!

e che in generale $L_z = I \cdot \omega$

$I$ → dipende solo dalla distribuzione delle masse intorno all'asse

$\omega$ → velocità di rotazione attorno all'asse

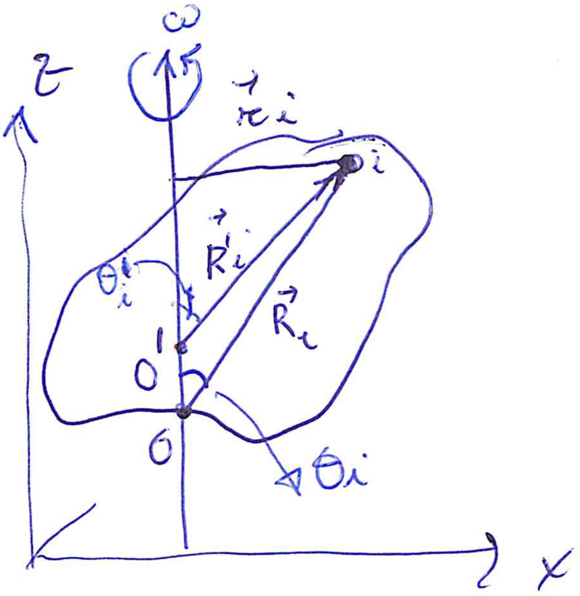
per cui $M_z = \frac{dL_z}{dt} = I\dot{\omega}$

Se così fosse

ora abbiamo due equazioni per un corpo che ruota attorno a z:

$\vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm}$

$L_z = I\omega$

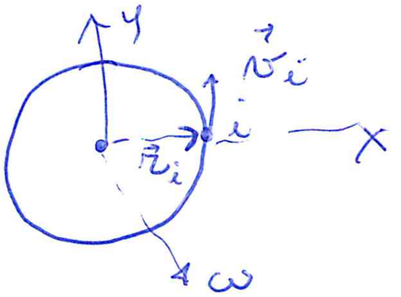


dobbiamo dimostrare che

a) $L^{oi}_z = (\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i m_i)_z =$

$=$

$L^{o'i}_z = (\vec{R}'_i \wedge \vec{v}_i m_i)_z$



$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}^i$

$\vec{R}_i = R_\omega \hat{\omega} + R_r \hat{r}_i + R_v \hat{v}$

$\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i = \underset{①}{R_\omega \hat{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i} + \underset{②}{R_r \hat{r}_i \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}^i}$

$+ \underset{③}{R_v \hat{v}_i \wedge \vec{v}_i}$ nulla

① $R_\omega \hat{\omega} \wedge \vec{v}_i$ diretto come $\vec{r}_i$ (x,y) ↓ verso ! distanza ⊥ dall'asse

② $\hat{r}_i \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}^i = \hat{r}_i \wedge \vec{v}_i \neq 0 = \omega r_i$

diretto come $\hat{z}$

ortogonale al piano x,y

② resta solo il secondo termine che è diretto lungo z $(\hat{\omega})$

$$\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i = R_\omega \hat{\omega} \wedge \underbrace{(\omega \wedge r_i)}_{\vec{v}_i} + R_r \hat{r}_i \wedge \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i}_{\vec{v}_i} +$$

① ②

$$R_v \hat{v}_i \wedge \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)}_{\vec{v}_i}$$

③

dalle quali

① $R_\omega \hat{\omega} \wedge \hat{v}_i$ ⇒ diretto come $\vec{r}_i$ giace su $x, y$

② $R_r \hat{r}_i \wedge \vec{v}_i$ = [illegible] diretto come $\hat{\omega} = \hat{z}$

$R_r v_i \; \hat{r}_i \wedge \hat{v}_i = R_r v_i \hat{\omega}$

③ nullo

quindi $L^{O i}_{z} = R_r v_i$

$L^{O' i}_{z} = R'_r v_i$

$L_z^{O i} = R_r \, \omega \, r_i \, m_i$

$\rightarrow$ Chi è $R_r$? è la proiezione di $R$ lungo $\hat{r}$!

$R_r = R_i \sin\theta_i = r_i$

$\rightarrow L_z^{O i} = \omega \, r_i^2 \, m_i$

Se ripetiamo il calcolo per il polo in O'

$L_z^{O'} = R'_r \, \omega \, r_i \, m_i$ $\qquad R'_r = R_r = r_i$!

. Per cui il momento angolare assiale è lo stesso per tutti i poli che giacciono sull'asse che passa per O.

~~Asse fissato dal pedale~~

$\rightarrow L_z^{O} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \cdot \omega$

dipende solo dalla distanza delle masse dall'asse che passa x O

velocità angolare di rotazione attorno all'asse

Se O è il CDM

$L_z^{CM} = \text{costante} \Rightarrow \omega = \text{cost.} = M_z$ nullo!

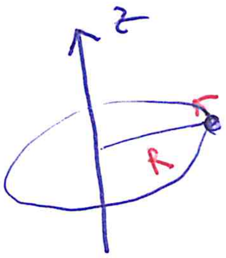
$M_z^{CM} = \frac{dL^{CM}}{dt}$ !

$L_z = I_z \cdot \omega$ e per un corpo rigido?

$$L_z = \sum m_i r_z^2 \omega \rightarrow \left[ \int dm \, r^2 \right] \omega = I_z \omega$$

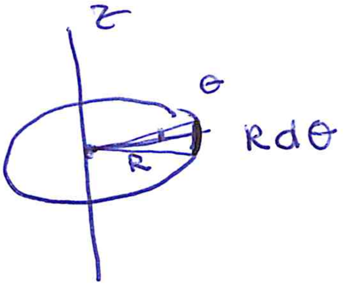
## Esercizi sul momento d'inerzia

### 1) Singolo punto materiale rispetto a un asse



$$I = \int dm\, r^2 = R^2 \int dm = m R^2$$

### 2) Anello rispetto a un asse passante per il suo centro (CDM)



$$\rho = \rho_l = \boxed{\frac{dm}{dl} = \lambda} \quad \cancel{\rho_l} = \frac{M}{2\pi R}$$

$$I = \int dm\, r^2 \rightarrow \int \lambda\, dl\, R^2 = \cancel{\int_0^{2\pi} \lambda d\theta R^2 d}$$

1

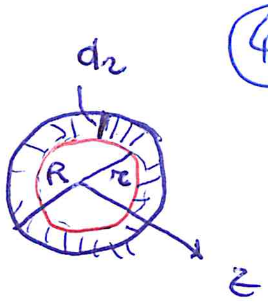
2

$$\rightarrow 3 \quad = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta\, R^2$$

$$dl\ ? = R d\theta$$

$$\underline{I}_{\text{anello}} = \cancel{\int_0^{2\pi}} \; 2\pi \lambda R^3 = \cancel{2\pi} \frac{M}{\cancel{2\pi} \cancel{R}} \cdot \overset{2}{\cancel{R^3}} = M R^2$$

3) Disco rispetto ~~al centro~~ ad un asse passante per il suo centro (CDM)



$\rho_s = \frac{M}{\pi R^2}$

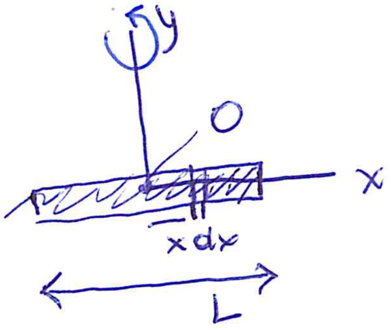
$$\begin{cases} ds = 2\pi r\,dr \\ dm = \rho_s\, ds \end{cases}$$

$$I^{CDM}_{\cancel{Anello}} = \int dm\, r^2 = \int_0^R \rho_s\, \cancel{ds}\, 2\pi r\, dr\, r^2 = 2\pi \rho_s \int_0^R r^3 dr$$

$$2\pi \rho_s \frac{R^4}{4}$$

$$I_{\substack{\cancel{anello}\\ DISCO}} = \cancel{2\pi}\, \frac{M}{\cancel{\pi} \cancel{R^2}} \cdot \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}_{\,2}} = \frac{MR^2}{2}$$

4) Asta sottile rispetto al centro (CDM)



① $\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$ $\quad d\ell = dx$

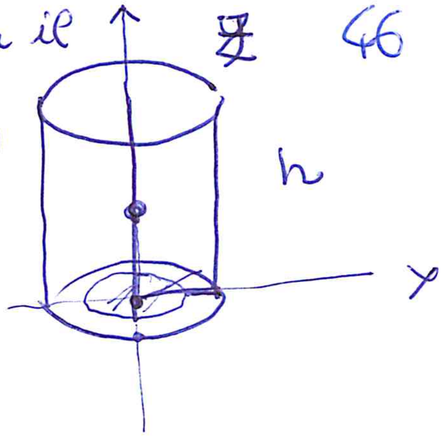
② $\boxed{dm = \rho_\ell\, d\ell = \rho_\ell\, dx}$

$$I = \int dm\, r^2 \rightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_\ell\, dx\, x^2 = \rho_\ell \cdot \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot 2}{3}$$

$$\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I^{o}_{ASTA} = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

5) Cilindro per un asse passante per il suo centro (CDM) vedi figura
Come per il disco + integrale su h!)
cilindro asse di simmetria!



$$\rho_V = \frac{M}{\pi R^2 \cdot h} \qquad dV = dS \cdot dh$$

$$dS = 2\pi r\, dr$$

$$I^{CM} = \int dm\, r^2 = \int \rho_V\, dV\, r^2 = \underbrace{\int \rho_V\, 2\pi r\, dr \cdot r^2}\, dh$$

per il pezzo indicato usiamo ~~quello~~ quanto ottenuto per il disco ma usando $\rho_V$ invece che $\rho_S$ quindi

$$\rightarrow \quad I_{cilindro} = I_{disco} \cdot \frac{\rho_V}{\rho_S} \cdot \int_0^h dh$$

$$= \frac{MR^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\pi R^2}}{\cancel{M}}}_{\frac{1}{\rho_S}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{M}}{\cancel{\pi R^2} \cdot \cancel{h}}}_{\cdot \rho_V} \cdot h = \frac{MR^2}{2}$$

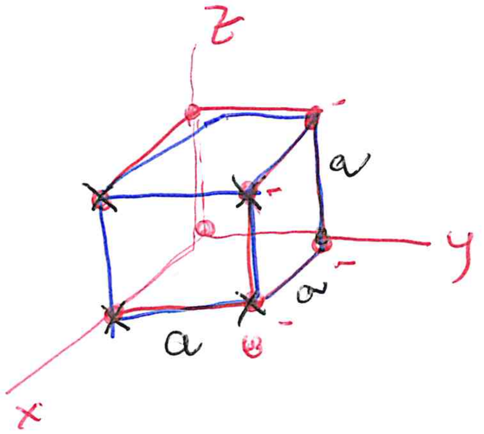
$$I_{cilindro} = I_{Disco} = \frac{MR^2}{2}$$

Cella 6.1

Determinare il momento d'inerzia di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile. Porre l'origine nel CDM del cubo.

Cella 6.~~1~~

~~Determinare il momento d'inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa m porre l'origine nel CDM (Baricentro~~

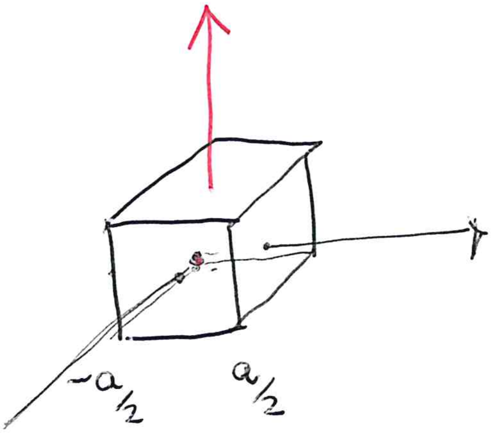


baricentro in x

4 masse hanno $x = a$

4 masse hanno $x = 0$

$$X_{cm} = \frac{(4\times a + 4\times 0)\cancel{m}}{8\cancel{m}} = \frac{a}{2}$$



baricentro in y

4 masse hanno $y = a$

4 masse // $y = 0$

$y_{cm} = a/2$

$z_{cm} = a/2$

$x \in \pm a/2$ ~~$a/2$~~

$y \in \pm a/2$ ~~$a/2$~~

$z \in \pm a/2$ $a/2$

~~$I_z^{CM} =$~~

$$I_z^{CM} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$x_i = \pm a/2$

$y_i = \pm a/2$

$$I_z^{CM} = 8m\left[\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right]$$

$4ma^2$ !

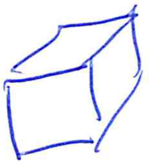
Idem per $I_x^{CM} = 4ma^2$

per $I_y^{CM} = 4ma^2$

## CELLA 6.2

Determinare il tensore d'inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa m. ~~pe~~ Porre l'origine del sistema di coordinate nel CDM

# Baricentro del cubo



$$x_{cm} = \frac{\int dm\, x}{M}$$

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{a^3}$$

$$y_{cm} = \frac{\int dm\, y}{M}$$

$$dV = dx\,dy \cdot dz$$

$$z_{cm} = \frac{\int dm\, z}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{\int \rho_V\, dV \cdot x}{M} = \frac{\rho_V}{M} \cdot \int_0^a dx\, x \int_0^a dy \int_0^a dz$$

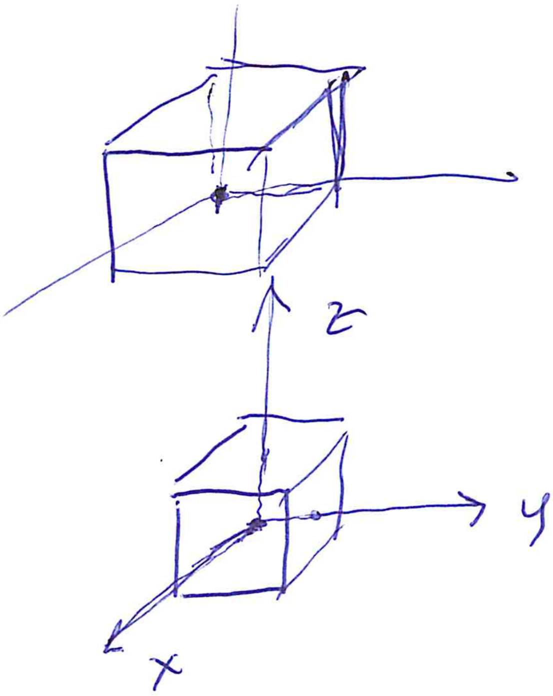
$$= \frac{\rho_V}{M}\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a = \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = a/2$$

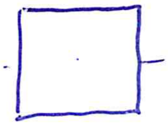
$$y_{cm} = a/2$$

$$z_{cm} = a/2$$

Dunque prima il cubo!

Poniamo l'origine nel CM.





$x_{cm} = a/2$

$y_{cm} = a/2$

$z_{cm} = a/2$

Questi tre assi sono assi di simmetria per il corpo. ~~e la distan~~ $I_x = I_y = I_z$!

Usiamo coordinate cartesiane

$$I_z = \int dm\,(x^2+y^2)$$

↑ distanza dall'asse

$$\rho_v = \frac{M}{a^3} \qquad dm = \rho\,dv = \frac{M}{a^3}\,dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \frac{M}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\,dz$$

Su z

$$I^z = \frac{M}{a^3}\cdot\boxed{a}\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy\,(x^2+y^2)$$

Su y

$$\frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2}$$

$$I_z = \frac{M}{a^3}\, a \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\right)$$

$$\left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\right)$$

Su x

$$I_z = \frac{M}{a^3}\cdot a \left[a\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\right)^3 + \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\cdot \underline{a}\right]$$

$$a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\cdot a]$$

~~$I_z$~~

$$\frac{M}{a^3}\, a\left[\underbrace{\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12}}_{\frac{\overset{1}{\cancel{2}}a^4}{\cancel{12}\,6}}\right]$$

$$I_z = \frac{Ma}{\cancel{a^3}}\,\frac{a^4}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

## Teorema di Steiner degli assi paralleli (52)

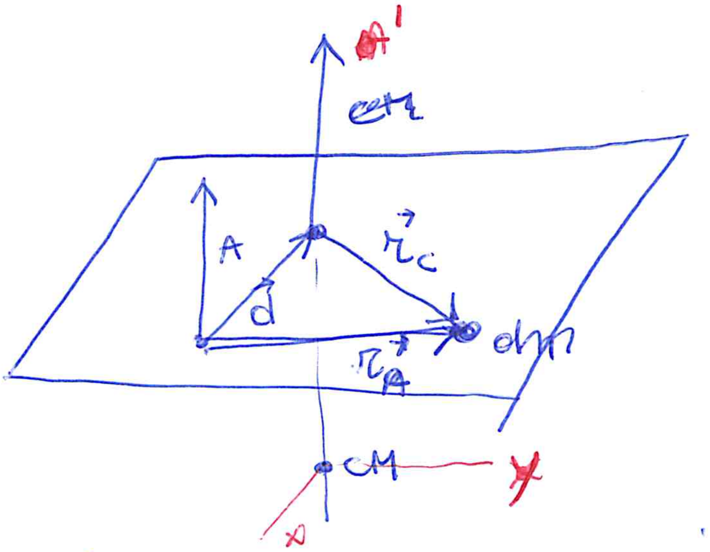
es1

Il momento d'inerzia di un C.R. rispetto a un'asse che non passa per il CDM ma è parallelo ad esso è dato da

$$I_A^A = I_{CM}^{A'} + M d^2$$

A = assi paralleli
A'

dove d è la distanza tra gli assi



piano ortogonale agli assi

$\vec{d}$ ⊥ //

$$\vec{r}_A = \vec{d} + \vec{r}_c$$

$$dI_A = r_A^2 \cdot dm$$

$$dI_A = \vec{r}_A \cdot \vec{r}_A \, dm$$

$$= (\vec{d} + \vec{r}_c) \cdot (\vec{d} + \vec{r}_c)\, dm$$

$$= d_x^2 dm + 2\vec{d} \cdot \vec{r}_c \, dm$$

$$+ \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c \, dm$$

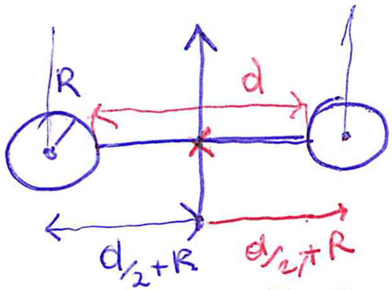
$$I_A^A = d_x^2 M + 2\vec{d} \cdot \int dm\, \vec{r}_c + \int dm\, r^2$$

$$2\vec{d} \cdot \qquad I_{CM}^{A'}$$

$$\left.\begin{matrix} \int dm\, x_c \hat{x} \\ + \int dm\, y_c \hat{y} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{nel} \\ \text{CM} \\ = 0! \end{matrix}$$

# Un'applicazione del Teorema di Steiner

Un corpo rigido è costituito da 2 sfere di massa M e raggio R collegate da un asta lunga d e di massa m disposta lungo la retta che congiunge i centri. Calcolare il MI rispetto a un asse che passa per il centro dell'asta e a questo ortogonale



MI è la somma di 3 contributi

a) asta : è già nel suo CDM $\left[\frac{md^2}{12}\right]$

b) 2 sfere rispetto al centro dell'asta (distanza asse $(R+\frac{d}{2})$)

$$2\times\left[\frac{2}{5}MR^2+M\left(R+\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

$$I=\frac{1}{12}md^2+2\left[\frac{2}{5}MR^2+M\left(R+\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

Ricordiamo che abbiamo definito

il momento angolare assiale rispetto

a un asse (per es. $\hat{z}$)

$$L_z^A = I_z^A \, \omega$$

dove A indica un ~~particolare~~ asse z passante per il punto A

In generale sebbene il corpo ruoti attorno ~~$\vec{L}^A_z$~~ all'asse z

$$\vec{L} = L_T \, \hat{u}_T + L_z \, \hat{z}$$

cioè $L_T$ può essere diverso da 0 e $L_z^A = I_z^A \omega$

vedremo poi un esempio

$$\vec{M}_z^A = \frac{dL_z^A}{dt} = I_z^A \frac{d\omega}{dt} = I_z^A \, \alpha$$

dove $\omega$ è la velocità angolare di rotazione $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

e $\alpha$ è l'accelerazione angolare

$$\cancel{\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

L'equazione

1) $$M^A_z = \frac{dL^A_z}{dt} = I^A_z \alpha$$

è l'analogo in una dimensione di

$$F_x = m a_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$M^A_z = I^A_z \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$m \to I^A_z$

$\alpha \to \frac{d^2\phi}{dt^2}$

es se nella 1) $\alpha$ = costante

e si conoscono le condizioni iniziali

( $\phi_0$ e $\underset{\omega_0}{\dot\phi(0)}$ ) la soluzione è

la stessa del moto unif. acc.

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$ !

Moto rotatorio intorno a un asse fisso con $\alpha = \text{cost.}$

moto rettilineo unif. acc. $a = \text{cost}$

Variabili $\theta$ e $\omega$

Variabili $x$ e $v$

$$\omega = \omega_0 \cancel{t} + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$v = v_0 + at$$

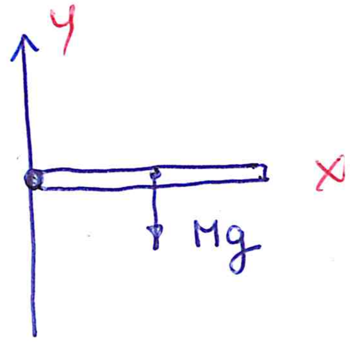
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Esempio da Serway

Una sbarretta omogenea di lunghezza $L$ e massa $m$ può ruotare attorno a un perno senza attrito. La sbarretta inizialmente ferma in posizione orizzontale ~~può~~ però ruotare attorno a un perno privo di attrito posto all'estremità della sbarretta come in fig. La sbarretta viene lasciata.

Qual'è l'accelerazione angolare iniziale della sbarretta?

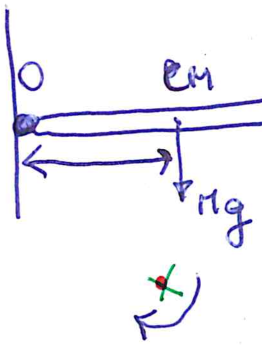


ricordiamolo $\vec{M}^0 = \frac{d\vec{L}^0}{dt} + \underline{\vec{v}_0} \wedge \vec{P}_{cm}$

sempre

anche se $\vec{L}^0 = \underline{r^0_{cm} \wedge P_{cm}} + \vec{L}'_{rif. cdm}$

non servono tutte ora



Qui le forze esterne sono la reazione vincolare (che sappiamo è applicata in O) e $M\vec{g}$

Il polo che conviene è O → perché annulla la reazione vincolare ed è un polo fisso

$\underline{\vec{v}_0 = 0}$ → $\vec{M}^0 = \frac{d\vec{L}^0}{dt}$

$\underline{\vec{r}^0_{cm} \perp \vec{P}_{cm}}$ → $L^0 \neq L'_{rif. CM}$

Quali sono le F(E)?

R e Mg! ma polo in O

$\vec{M}^0 ? = -Mg\frac{L}{2}\hat{z}$

$\vec{M}^0 = M^0_z\hat{z}$

$L^0_z = I^0_z\omega$

$M^0_z = \frac{dL^0_z}{dt} = I\alpha\hat{z}$

$I\alpha = -Mg L/2$

↑ calcolato rispetto a O

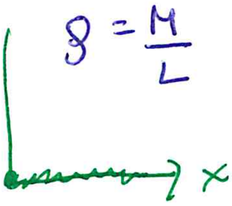
1) $$\alpha = \frac{-Mg\frac{L}{2}}{I_{Asta}} = \frac{-\cancel{M}g\cancel{L}/2}{\frac{\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{3}} = -\frac{3g}{2L} \quad \Big| \rightarrow \text{costante}$$

I asta rispetto all'estremo A ? $= \frac{ML^2}{3}$

$$I_A = \frac{ML^2}{12} + M\underset{\frac{L^2}{4}}{d^2} = \frac{ML^2}{3}$$

$dl = dx$

$\rho = \frac{M}{L}$



$$* \int_{0} dm\, x^2 =$$

$$I^{O(A)}_{ASTA} = \rho\int_0^L dx\, x^2 = \rho\frac{L^3}{3} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Quant'è l'accelerazione lineare del suo estremo ?

$v = \omega r$

$a = \dot{\omega} r = \alpha r$

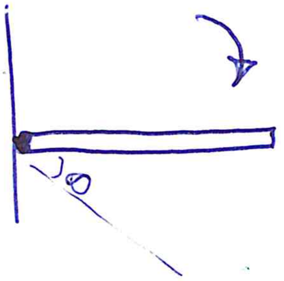
r fisso!

$$\underset{1)}{\alpha L} = -\frac{3}{2}g$$

dalla 1) vediamo che $\alpha$ = costante $= \frac{-3g}{2L}$

quindi

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



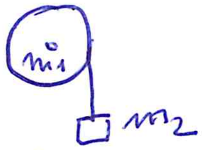
$\omega_0 = 0!$

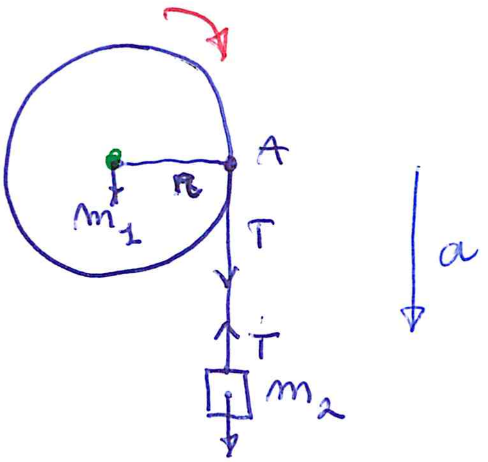
$\theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Es. Nigro Voci 6.19

Un cilindro di massa $m_1 = 12$ kg può ruotare senza attrito attorno al proprio asse disposto orizzontalmente. Attorno al cilindro è arrotolato un filo che non slitta rispetto al cilindro e sostiene un corpo di massa $m_2 = 2$ kg.. Inizialmente il sistema è in quiete. Calcolare l'accelerazione con cui scende il corpo $m_2$, il valore della tensione del filo e della reazione dell'asse del cilindro.





Forze esterne

$m_1 g$   $m_2 g$   R

Forze interne al sistema

T tensione del filo

a e v di $m_2$ = ad a e v di A

Per A

$a = \omega^2 r$   $v = \omega r$

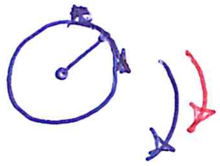
Applichiamo il teorema del momento angolare scegliendo come polo il centro del disco.

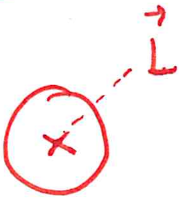
$$\vec{L}^0 = \vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'$$

$$\boxed{\vec{r}^{\,0}_{cm} = 0}$$ cm del disco ≡ al polo

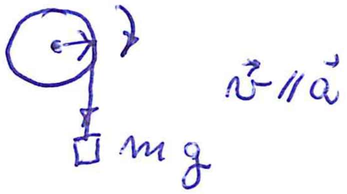
$$\vec{L}^0_1 = \vec{L}' \Rightarrow \text{diretto lungo } z$$

$$\vec{L}'_1 = -I_{\text{Disco}}\,\omega\,\hat{z} = \vec{L}^0_1$$





per la massa che scende



$$\vec{L}^0_2 = \vec{r} \wedge m_2\vec{v} = -m_2 v r\,\hat{z}$$

$$(\vec{L}^0_1 + \vec{L}^0_2)_z = \boxed{-m_2 v r \atop \hookrightarrow \omega r} - I\omega = -m_2\,\underline{\omega r^2} - \frac{m_1 r^2}{2}\omega$$

Mom inerzia disco

$$(L^0_1 + L^0_2)_z = -\omega\left(m_2 r^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\right) = L^0_z$$

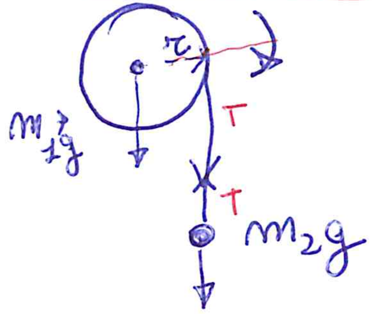
$$\Downarrow$$

$$\frac{dL^0_z}{dt} = -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)\dot{\omega} r^2 = M^0_z(E)$$

$$= \sum_i M^{0\,i}_z =$$

$\vec{F}^{(E)} \Rightarrow \vec{R}, M_1\vec{g}, m_2 g$

unico momento ~~$\ast$~~ $\neq 0$ è quello di $m_2 g$ per il polo scelto



FORZE ESTERNE

$M_z^o = -m_2 g r$ ↻

T è una forza interna!

$$M_z^o = \frac{dL_z^o}{dt} \Rightarrow -m_2 \underline{g} \cancel{r} = -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) r^{\cancel{2}} \alpha$$

questo è il $|\alpha|$

$$\alpha = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \frac{g}{r}$$

( ~~questo è il modulo della~~

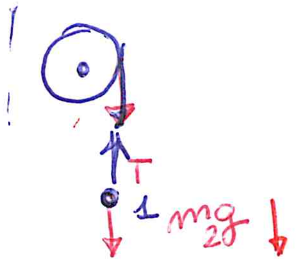
moltiplicando per $r$ $\quad \alpha r = a$ $\quad$ prima domanda

$$a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2{,}45 \, m/s^2 \Rightarrow$$ a non dipende da r cilindro!

$a = \text{cost} \Rightarrow$ il moto di $m_1$ e $m_2$ è unif. acc.

# Tensione del filo?

a questo punto corpo ①



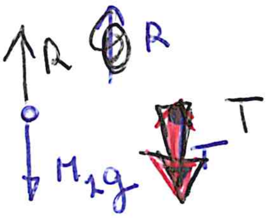
1) $m_2 g - T = m_2 a$

$$T = m_2(g-a) = m_2 g\left(1 - \frac{2m_2}{m_1+2m_2}\right)$$

$$T = m_2 g\left(\frac{m_1 + \cancel{2m_2} - \cancel{2m_2}}{m_1+2m_2}\right) = \frac{m_1 m_2 g}{m_1+2m_2} = 14.7\ N$$

corpo ② (puleggia filo asse di rotazione) R?

Reazione dell'asse del Cilindro?



2) $R - M_1 g - T = 0$ $= M a_{cm}$ T e nota $= 0$

$R = M_1 g + T$

① $R = M_1 g + \frac{m_1 m_2}{(m_1+2m_2)} g$ $= m_1 g\left(\frac{m_1+2m_2+m_2}{m_1+2m_2}\right)$ ③

② $m_1 g\left(1 + \frac{m_2}{m_1+2m_2}\right)$

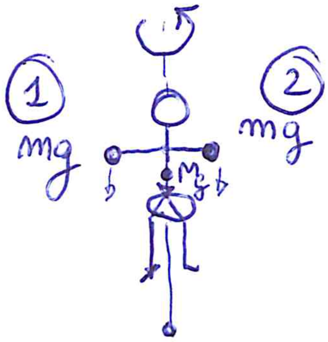
$$= ④\ m_1 g \frac{(m_1+3m_2)}{m_1+2m_2} = 132.3\ N$$

nota $R < (m_1+m_2)g = 137.2\ N$

$R = 137.2\ N$ si ha ~~sella a = a~~ se $T = m_2 g$ (1)

che implica $m_2 a = 0$! vedi ② e ①

# Conservazione del momento angolare esempi



$F(E) \Rightarrow m\vec{g},\ m\vec{g},\ M\vec{g}$

$\vec{R}$

in assenza di attrito

rispetto al baricentro dell'individuo per cui passa l'asse di rotazione

$\vec{r}_g \wedge \vec{M}_g = 0$

$\vec{r}_R \wedge \vec{R} = 0$

↳ reazione dello sgab.

} $\vec{r}_g$ e $\vec{r}_R$ giacciono sull'asse che passa per il baricentro

metto in rotazione

$\vec{r}_1 \wedge \vec{M}g + \vec{r}_2 \wedge m\vec{g} = M_z \hat{z}$   diretto lungo $\hat{z}$ asse rotazione

→ nota reazioni delle braccia al peso contributo nullo

$M_z = r_1 mg - r mg = 0$ !

$\frac{dL_z}{dt} = 0$   $L_z$ = costante $= I_1 \omega_1$

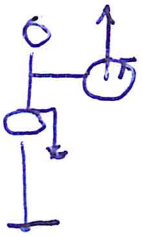
Chiude le braccia al petto   $I_1 \rightarrow I_2$

↳ $< I_1$

$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

↳ aumenta $\omega_2$

64



$$\vec{L}^i_O = \vec{L}^i_{stud} + \vec{L}^i_{ruota} = L_z \vec{z}$$

$\vec{L}^i_{stud} = 0$

$\vec{L}^i_{ruota} = I\omega\hat{z}$

$\downarrow$

$\omega = cost$

capovolge la ruota

~~$\vec{L}^f_O = \vec{L}^f_O =$~~

$$\vec{L}^f = \vec{L}^f_{stud} + \vec{L}^f_{ruota}$$

e $\vec{L}^f = \vec{L}^i_O = I\omega\hat{z}$

$$\vec{L}^f_{ruota} = -I\omega\hat{z}$$

~~$L_f = L_z$~~

$$\vec{L}_f = \vec{L}^f_{stud} - I\omega\hat{z} = I\omega\hat{z} = \vec{L}_i$$

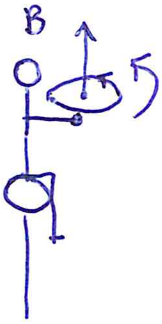
$$L^f_{f\,stud} = 2I\omega\hat{z}$$

ruota con velocità angolare doppia! e in direzione opposta

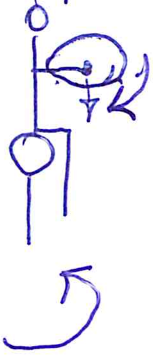
Inizio

A

B



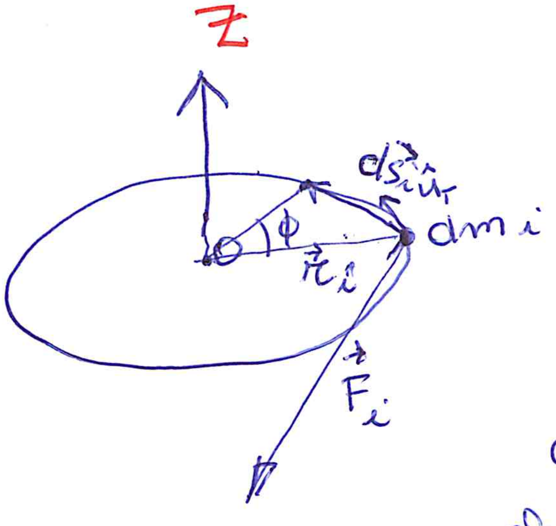
C



# Lavoro e energia cinetica.

Consideriamo la rotazione di un corpo rigido attorno a un'asse (es $\hat{z}$) il suo generico elementino di massa $dm_i$ si muove su un'orbita circolare. Ti dichiaro con O il centro dell'orbita e con $r_i$ il raggio vettore che congiunge O con $dm_i$

Calcoliamo il momento assiale ($M^A_{zi}$) della risultante delle forze esterne $F_i$ agenti su $dm_i$ (tutte applicate su $dm_i$)



$\vec{F}_i$ ha 3 componenti in generale

$$\vec{F}_i = F_z^{a\,i}\,\hat{z} + F_r^{a\,i}\,\hat{r}_i + F_T^{i}\,\hat{u}_T$$

a noi interessano le componenti che danno contributo non nullo al momento delle forze lungo z

$$\vec{M}^0_i = \cancel{2}\,\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$M^0_{iz} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i)_z$$

$$\vec{r}_i = r_i\,\hat{r}_i$$

Dimostrare che $M^{0\,i}_z = r_i F_{Ti}$

$r_i\hat{r}_i \wedge F^i_z\hat{z} =$ giace su xy

$r_i\hat{r}_i \wedge F^i_r\hat{r}_i = 0$

$\rightarrow$ $r_i\hat{r}_i \wedge F_{Ti}\hat{u}_T = \boxed{r_i F_{Ti}}\,\hat{r}_i \wedge \hat{u}_T$

$\hat{u}_T$ scelto in modo che $\phi$ giran goli aumentano

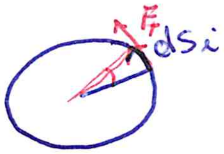
Consideriamo ora una rotazione infinitesima di un angolo $d\phi$ att. a $\hat{z}$ del corpo

$W$? come sappiamo per un corpo rigido il lavoro compiuto dalle f.i. è nullo!

Calcoliamo quindi il lavoro COMPIUTO dalle forze esterne per una rotazione $d\phi$

$\vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$dW_i = \vec{F}_{Ti} \cdot d\vec{s}_i = F_{Ti} \cdot r_i \cdot d\phi$$



① $\vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \vec{F}_{Ti} \cdot ds$

↑ unica componente non nulla

$F_T, F_H, F_z$

$$dW_i = \underline{F_{Ti} \cdot r_i} d\phi = \underline{\underline{M_z^{oi}}} \cdot d\phi$$

$\Sigma$

$$dW = M_z^o \cdot d\phi$$

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z^o \, d\phi$$

$d\phi = \omega \, dt$

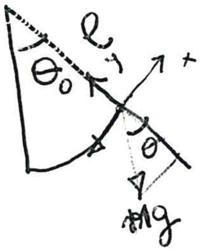
$$dW = M_z^o \cdot d\phi = I_z^A \frac{d\omega}{dt} d\phi = I_z^A \cdot d\omega \overset{\omega}{\cancel{\frac{d\phi}{dt}}} = I_z^A \omega d$$

$$W = \frac{1}{2} I_z^A \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z^A \omega_i^2 = K_2 - K_1$$

$\to K = \frac{1}{2} I_z^A \omega^2$ dovuta alla rotazione!

# Esempio pendolo semplice

Caso Ideale : Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale di massa m appeso a un filo inestensibile di massa trascurabile



1) $m\vec{a}_c = T - mg\cos\theta$

2) $m a_T = -mg\sin\theta$

$$a_c = \omega^2\ell = \frac{\omega^2\ell^2}{\ell} = \frac{v^2}{\ell}$$

$$\underbrace{a_t = \ell\ddot{\theta} = \ell\frac{d\omega}{dt} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{=\ell\alpha}$$

1) $m\overset{\boxed{a_c}}{\omega^2\ell} = T - mg\cos\theta$

2) $m\underbrace{\ell\alpha}_{\boxed{a_t}} = -mg\sin\theta$  → $\theta \ll 10^0$  $\sin\theta \simeq \theta$

2) $m\ell\ddot{\theta} + mg\theta = 0$ ; $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

moto armonico $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ e $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$\theta(t) = \theta^{max}\cos(\omega t + \phi_0)$

cond iniziali $\begin{cases}\theta(0) = \theta_0\\ \dot{\theta}(0) = 0\end{cases}$

$\theta(0) = \theta_{max}\cos\phi_0 = \theta_0$

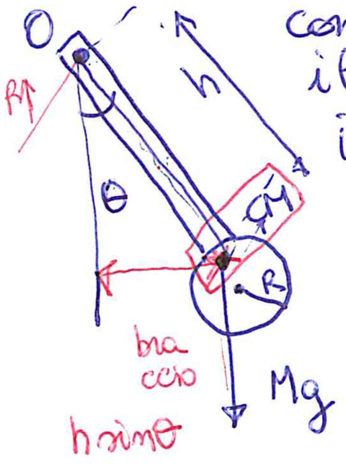
$\dot{\theta}(0) = 0 = -\theta_{max}\,\omega\sin(\phi_0)$  → $\phi_0 = 0$  $\theta_{max} = \theta_0$

$\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$  $\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0\sin\omega t$  $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\theta_0\cos$

# Pendolo Fisico o Composto

Un corpo rigido di massa m che ruota attorno a un asse orizzontale non passante per il CM

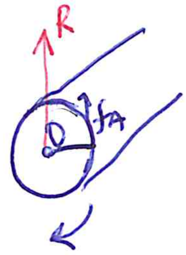
es. scegliamo come polo il punto fisso intorno al quale ruota il sistema



F(E)? 1) Peso applicato al baricentro del corpo

2) Reazione del vincolo applicata sull'asse attorno al quale ruota il corpo

tipicamente questo è un cilindretto



→ se c'è $F_A$ il suo momento non è nullo rispetto ed è diretto lung z?!

Z entrante dal foglio

se si può trascurare il momento delle forze esterne è solo quello del Peso!

distanza dal bari.

$$M^{O}_{z}(E) = -Mgh\sin\theta = I\ddot{\theta} = I\alpha$$

per piccole oscillazioni

$$-Mgh\theta = I\ddot{\theta} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{Mgh}{I}\theta = 0 \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{Mgh}{I}} \end{cases}$$

esempi.

## Corpo rigido

Dato un corpo a simmetria sferica o cilindrica che si trova su un piano e si muove rispetto a esso, quale ad esempio una sfera

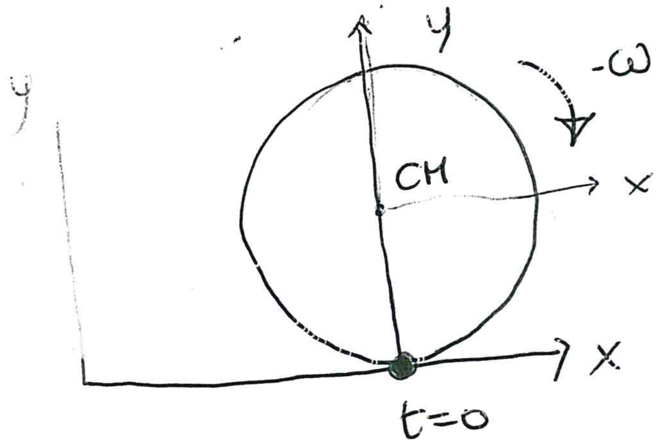
a) Se le velocità di tutti i punti sono uguali tra loro e parallele al piano IL CORPO STRISCIA e il moto è un moto di traslazione

b) In generale il corpo rotola e striscia su un piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano

c) Se il punto di contatto ha velocità nulla si ha un moto di puro rotolamento es. ruota.

~~In ogni istante esso può essere considerato come un corpo che ruota attorno a un asse fisso passante per il punto di contatto C~~

# Rotolamento puro



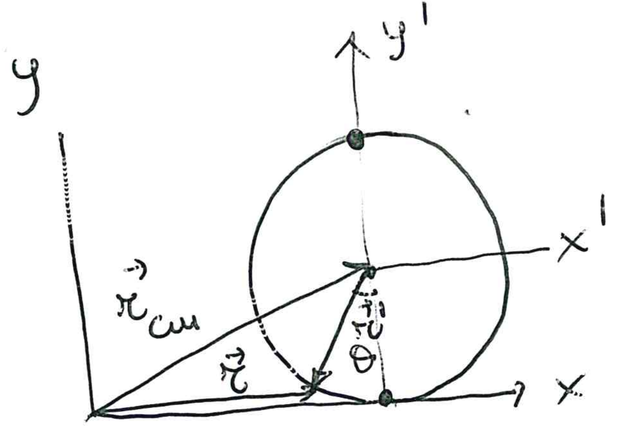
$$v_{CM}^{x} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

se $\omega = cost$

$$x_{CM} = \omega R t$$

$$y_{CM} = R$$

$$v_{CM} = v_{CMx} = \omega R$$



$$\vec{r} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'$$

$$\begin{cases} x = x_{CM} - R\sin\omega t = \omega R t - R\sin\overbrace{\omega t}^{\theta} \\ y = y_{CM} - R\cos\omega t = R - R\cos\omega t \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \omega R - \omega R\cos\omega t$$

$$\dot{y}(t) = \omega R\sin\omega t$$

a(t=0) il punto di contatto ha $v = 0$

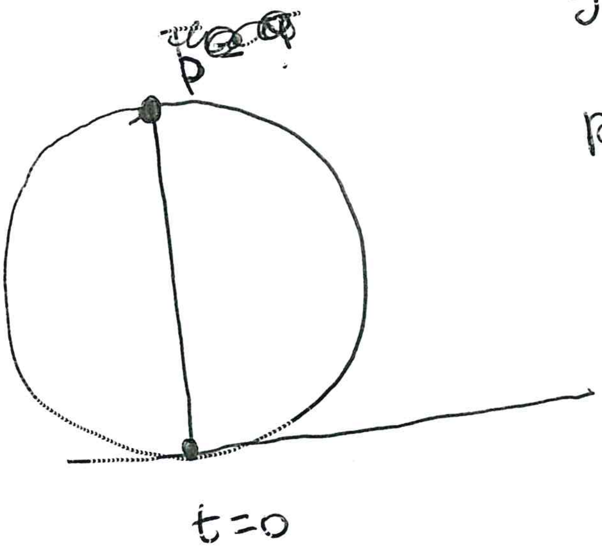
vera x tutti i punti di contatto successivi

$v_{contatto} = 0$!

per un puto superiore diametralmente opposto al punto di contatto

$$X_p(t) = X_{cm}$$ [illegible] $$R \sin(\omega t + \pi)$$

$$y_p(t) = y_{cm} - R \cos(\omega t + \pi)$$



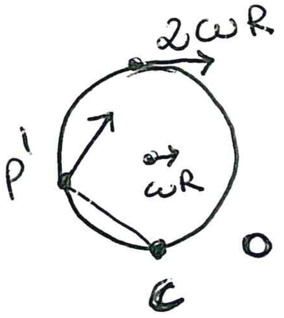
per t = 0 $\quad x_p(0) = 0 \;, \; y_p(0) = 2R$

$$\dot{x}_p(t) = \omega R - \omega R \cos(\omega t + \pi$$

$$\dot{y}_p(t) = + \omega R \sin(\omega t + \pi)$$

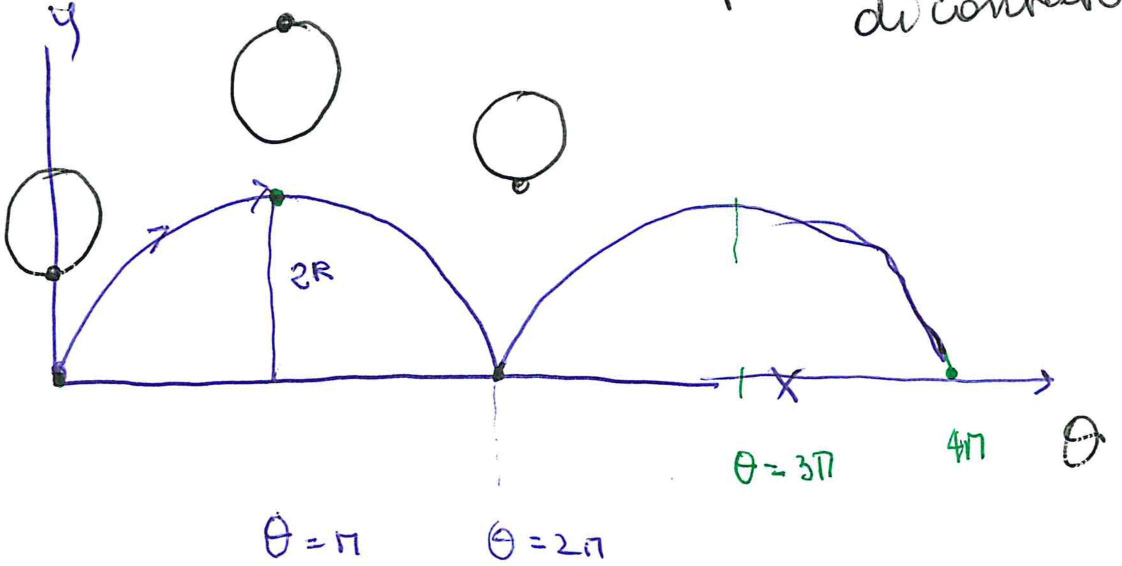
per $t = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = 2\omega R \\ \dot{y}_p(t) = 0 \end{cases}$$



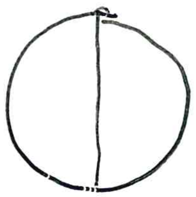
70.2

Equazione del punto di contatto $y(\theta)$



$\omega t = 2\pi$

$\cancel{X}_c = \omega R t$

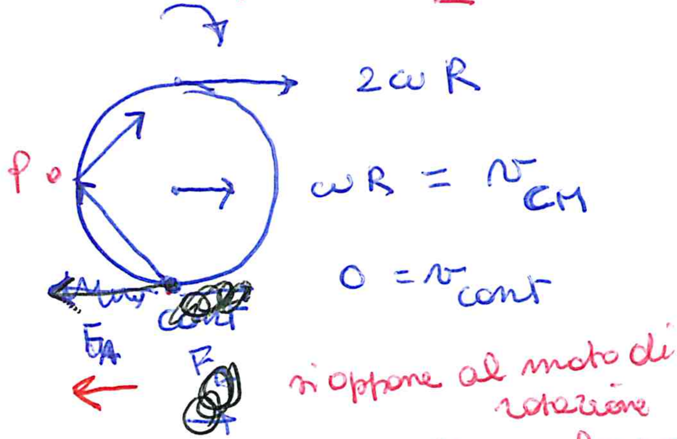


$$y(\theta) = R - R\cos \overset{\theta}{\widetilde{\omega t}} = R(1-\cos\omega t)$$

# Rotolamento Puro

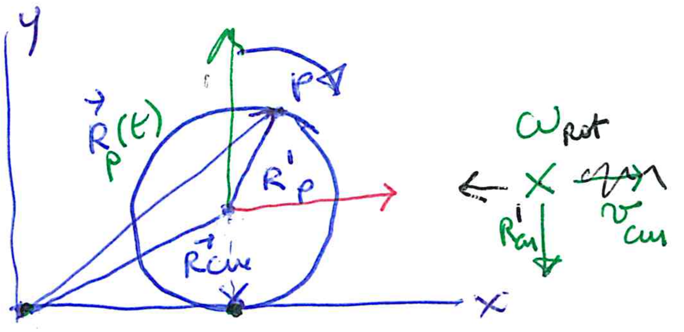
In ogni istante esso può essere considerato come un corpo che ruota attorno ad un asse fisso passante per il punto di contatto. Di conseguenza la velocità è ortogonale alla linea che congiunge $\underline{\underline{cont}}$ al punto es. P

Il punto di contatto è tenuto fermo dall'altrito statico



si oppone al moto di rotazione e mantiene fermo il punto di contatto

equazioni istantanee per la velocità di un punto generico della ruota



$$\vec{R}_p(t) = \vec{R}_{CM} + \vec{R}'_p(t)$$

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}_{ROT} \wedge \vec{R}'_p$$

② note $x_{CM} = \textcircled{+} r\theta$

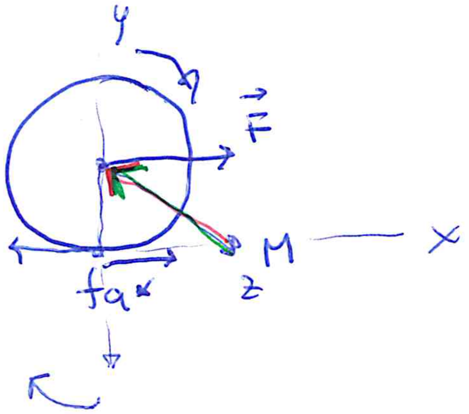
$v_{CM} = \textcircled{+} r\dot{\theta} =$

$a_{CM} = + r\ddot{\theta}$ !

$$\vec{v}_{cont}(t) = \emptyset \implies ① \; \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega}_{ROT} \wedge \vec{R}'_{cont} \; !$$

$$= \cancel{\vec{\omega} \wedge \vec{R}} \; |\omega| R| \hat{x}$$

$$= -\omega R \hat{x}$$



$\vec M$ = momento motore

$\vec F$ = forza esterna che "tira" l'asse della ruota

- Se ci fosse solo $\vec F$ (oltre a $\vec R$ e a $M\vec g$)
  $\vec R = M\vec g$ ~~[illegible]~~
  il moto sarebbe traslatorio

- Se ci fosse solo $\vec M$ il moto sarebbe solo rotatorio e con velocità angolare non costante (!) (a ~~causa~~ se c'è dell'attrito)

Usiamo le equazioni del moto per descrivere il moto della ruota

1) Eq card $\underbrace{\vec F + \vec f_A + \vec R + M\vec g}_{\text{Forze esterne}} = m\vec a_{cm}$

2) Card. $\vec M^{CM} + \vec r^{\,cm}_{cont} \wedge \vec F_a = \frac{dL^{CH}}{dt}$

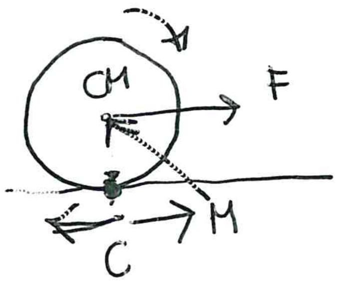
Usiamo come polo il centro della ruota

→

1 $\begin{cases} F_x: \; F + f_a = m\, a_{cm} \\ F_y: \; R = mg \end{cases}$ → non è | in modulo

~~$M_z \; f_a \, a = -I$~~

# In generale



$$\vec{M}^{cm} + \vec{r}_c^{\,cm} \wedge \vec{F}_A = \frac{d\vec{L}^{cm}}{dt} = -I\alpha\hat{z}$$

$\circlearrowright$ $\Uparrow$

$$-|M|\hat{z} + \vec{r}_c^{\,cm} \wedge \vec{F}_A = -I\alpha\hat{z}$$ modulo

$$I\alpha\hat{z} = M|\hat{z} - \vec{r}_c^{\,CM} \wedge \vec{F}_a$$

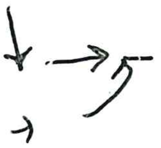
M

$$I\alpha = M - r_c^{cm} F_a$$

↳ non è in modulo

in fatti

a)



$-\vec{r} \wedge \vec{F}_a = \quad -r F_a \hat{z}$ se $F_a > 0$

se $F_a$ è $< 0$

b)

$-\vec{r} \wedge \vec{F}_a = -\left(-r|F_a|\right)\hat{z} = -r F_a \hat{z}$

$$I\alpha = M - r F_a$$ con Fa non in modulo!

~~$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$ = [illegible]~~

~~$-I\alpha\hat{u}_z = -M\hat{u}_z - r|f_a|\hat{u}_z$~~

~~α e M hanno~~ verso opp. risp. a z

2) $I\alpha = M - r f_a \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ → equazione delle rotazione

↑ non è in modulo

a) $\underbrace{I\alpha r}_{} \overset{a_{cm}}{} = rM - r^2 f_a = I \cdot \underset{\alpha \cdot r}{a_{cm}}$

infatti $a_{cm} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r$

~~descrive il moto rotatorio del centro della ruota~~

b) $F + f_a = m a_{cm}$

equazione delle forze

b) → $a_{cm} = \frac{F + f_a}{m}$ dalla ⓑ

ricavando $a_{cm}$ dalla ⓐ

a) → $a_{cm} = \frac{rM - r^2 f_a}{I}$

uguagliandi

$$\frac{(F + f_a)I}{m} = rM - r^2 f_a$$

$$f_a\left(+I/m + r^2\right) = Mr - \frac{IF}{m}$$

1) $$f_a = \frac{m M r - I F}{+I + m r^2}$$

$$a_{cm} = \frac{F \overset{+}{+} f_a}{m} \rightarrow \frac{F}{m} + \frac{m M r - I F}{(+I + m R^2) m}$$

$$a_{cm} = \frac{(\cancel{+I} + \cancel{m} r^2) F \overset{+}{+} (\cancel{m} M r - \cancel{I F})}{(+I + m r^2) \cancel{m}}$$

mettiamolo da parte

2) $$a_{cm} = ~~el(rF+M)~~ \boxed{\frac{r(rF + M)}{+I + m r^2}}$$

dalla 1) ~~perché il~~ affinché il punto di contatto sia fermo

$$|f_a| \le \mu_s R = \mu_s m g$$

| $f_a$ è il modulo della forza di attrito.

altrimenti il corpo rotola e striscia !!

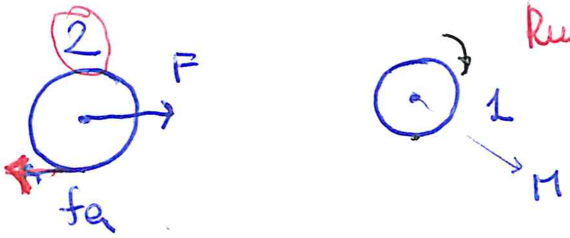
Se il corpo è un disco $I = \frac{MR^2}{2}$

Se è un cilindro $I = \frac{MR^2}{2}$

Se è una sfera $I = \frac{2}{5} MR^2$

Se consideriamo una ruota a trazione anteriore come un disco!

$$I = \frac{MR^2}{2}$$



Ruota posteriore ②

$M_z = 0$ !   Ruota posteriore

a quale acc è sottoposto il cm. delle ruote?

dalla 2) $$\frac{r(rF+M)}{I+mr^2} \rightarrow \frac{r^2F}{I+mr^2} = \boxed{a_{cm}}$$

e dalla 1) $$f_a = \frac{mMr - IF}{I+mr^2} \rightarrow \frac{-IF}{I+mr^2}$$

si oppone al moto

a) $$a_{cm} = \frac{r^2F}{\frac{mr^2}{2} + mr^2} = \frac{2}{3}\frac{\cancel{r^2}F}{m\cancel{r^2}}$$

Quanto vale la forza di attrito?

b) $$f_a = \frac{-IF}{I+mr^2} \rightarrow -\frac{F \cdot \frac{mr^2}{2}}{\frac{1}{2}mr^2 + mr^3} = \frac{-F}{3}$$

→ la forza di attrito per la ruota posteriore è diretta opposta a F!

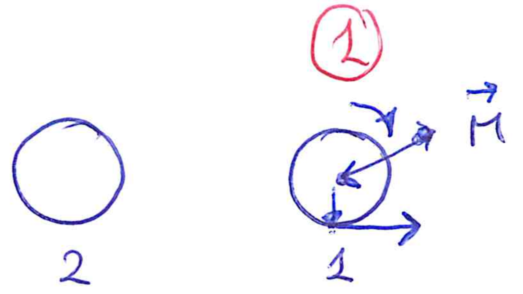
$$f_x = \frac{-F}{1+\frac{MR^2}{MR^2}2} = -\frac{F}{3}$$

è la forza di attrito che fa ruotare la ruota post.

Se l'auto è a trazione anteriore

$\boxed{M \neq 0 \quad F = 0}$

Ruota anteriore



$$\left( a_{cm} = r\frac{(rF+M)}{I+mR^2} \right)$$

vedi pag 75

$$\begin{cases} a_{cm} = \frac{\cancel{m} MR}{(I+mR^2)\cancel{m}} = \frac{2}{3}\frac{M}{mR} \end{cases}$$

$I = mR^2/2$

$$f_x = \frac{mMr}{\frac{mr^2}{2}+mr^2} = \frac{2}{3}\frac{M}{r}$$

$$\begin{cases} f_x = \frac{mMr - I}{I+mr^2} \end{cases}$$

$\boxed{f_x \text{ è ora positiva}}$ e provoca l'accelerazione del C.M. ma il suo momento si oppone a M

$$\frac{dL_o'}{dt} = -I\alpha\hat{u}_z = \overset{\downarrow}{-M}\hat{u}_z + \overset{\circlearrowleft}{r} f_x \hat{u}_z$$

se $F=0$ e $M=0$ $\quad a_{CM}=0$ e $f_x=0$

il corpo rimane in quiete o si muove di

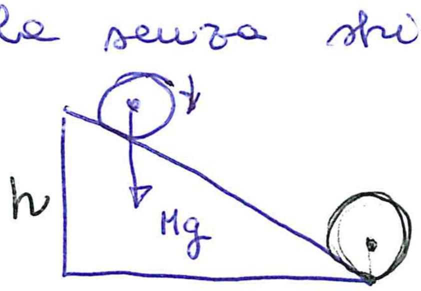
moto rettilineo uniforme.

rispetto al punto di contatto la forza di attrito non compie lavoro (il punto di contatto è fermo! e quindi vale la conservazione dell'energia meccanica

$$\vec{F}_{cont} \cdot \underset{\uparrow\ \text{nullo}}{d\vec{s}_c} = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare



$h + R/2$

$R/2$

Assumiamo la conservazione dell'energia e per l'energia cinetica finale il teorema di Koenig.

$T_i = 0$

$U_i - U_f$ $\quad$ $T_f - T_i$

$$mgh = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

poi ricordiamo che $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$

$$mgh = \frac{1}{2} I_c \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \qquad \frac{\times 2}{m}$$

$$2gh = \left(\frac{I_c}{mR^2} + 1\right) v_{cm}^2$$

$$v_{CM}^1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{I_c}{mr^2} + 1}}$$

se il corpo scivola senza attrito (non ruota!)

$\omega = 0$

$$v_{CM}^2 = \sqrt{2gh} > v_{cm}^1$$

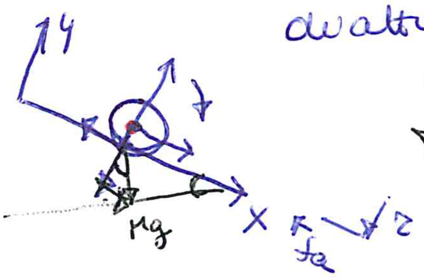
2) determinare l'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento

① $$\begin{cases} \Sigma_x F_x = m a_x = m a_{cm} \\ \Sigma_y F_y = 0 \\ \circ\, mg\sin\theta - f_{ax} = m a_{cm} \\ - mg\cos\theta + \cancel{f_y} N = 0 \\ \cancel{f_y} N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$\vec{M}(\vec{\theta})$ polo nel centro

② $$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{r}^{\,(i)}_{cm} \wedge \vec{F}_i = I\vec{\alpha}$$

l'unica forza con braccio non nullo è la forza di attrito



③ $$= \vec{r} \wedge \vec{F}_a = I\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow r f_a = I\alpha_x$$

↑modulo   modulo

stesso verso di rotazion

~~rfa~~

~~$r f_a = I \frac{\alpha^2_{cm}}{R}$~~

$$r f_{ax} = I \frac{a_{cm}}{R}$$

⑤ $$\boxed{f_{ax} = I \frac{a_{cm}}{r^2}}$$

$$a_{cm} = R\ddot{\theta}$$

$$v_{cm} = R\dot{\theta}$$

④ $$mg\sin\theta - \frac{I a_{cm}}{r^2} = m a_{cm}$$

dividi x m

$$g\sin\theta - I a_{cm}/mr^2 = a_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

⑥ $$f_a^x = \frac{I}{r^2}\left(\frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)$$

$$f_a^x \leq \mu_s mg\cos\theta$$

forza di att statico max. affinché il corpo non scivoli

quindi

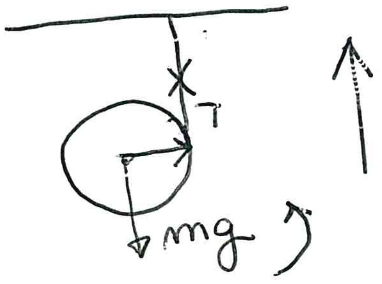
$$\frac{I}{r^2} \cdot \frac{\cancel{g} \sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}} \le \mu_s m \cancel{g} \cos\theta$$

cioè $\mathrm{tg}\,\theta \le \frac{\mu_s m \cancel{g}}{I/r^2}\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$

Affinchè l'oggetto non strisci

Es 6.15   Nigro Voci   Libro Fis 1

Un disco di raggio r e massa m scende srotolando un filo che non scivola rispetto al bordo del disco. Determinare l'accelerazione del centro di massa e la tensione del filo



① $mg - T = m|a_{cm}|$

MeM

② $\vec{r} \wedge \vec{T} = I\alpha\hat{u}_z$

Preso come polo il cm

$rT = I\alpha = I\left|\frac{a_{cm}}{r}\right|$

$I_{disco} = m\frac{r^2}{2}$

$rT = \frac{mr^2}{2}\alpha = \frac{mr^2}{2}\frac{|a_{cm}|}{\cancel{r}}$

② $\cancel{r}T = \frac{m\cancel{r}}{2}|a_{cm}|$

① $T = m(g - a_{cm})$

② $T = ma_{cm}/2$

② − ① $= 0 = \frac{3}{2}\cancel{m}a_{cm} - \cancel{m}g = 0$ ; $a_{cm} = 2/3\, g$ R1

② $T = mg/3$ R2   nota se il disco è fermo $T = mg$ (dalla 1)

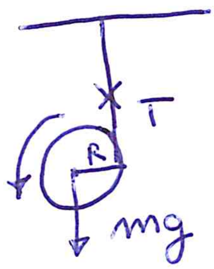
$a_{cm} = \frac{2}{3} g$ $T = mg/3$

$$a_{cm} = cost \rightarrow \begin{cases} v_{cm} = v_0 + a_{cm} t \\ v_{cm} = \frac{2}{3} g t = v_{cm} = \omega r \end{cases}$$

$( v_{cm}^{i} = 0 ! )$

$\omega = \frac{2}{3} \frac{g t}{r}$ $\omega_0 = 0 !$

Esercizio 6.15 Migro voei. Riprendiamo 83

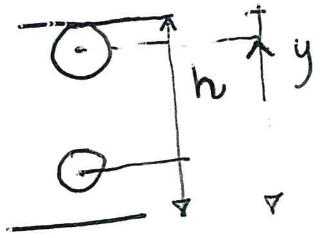


ricordiamo che

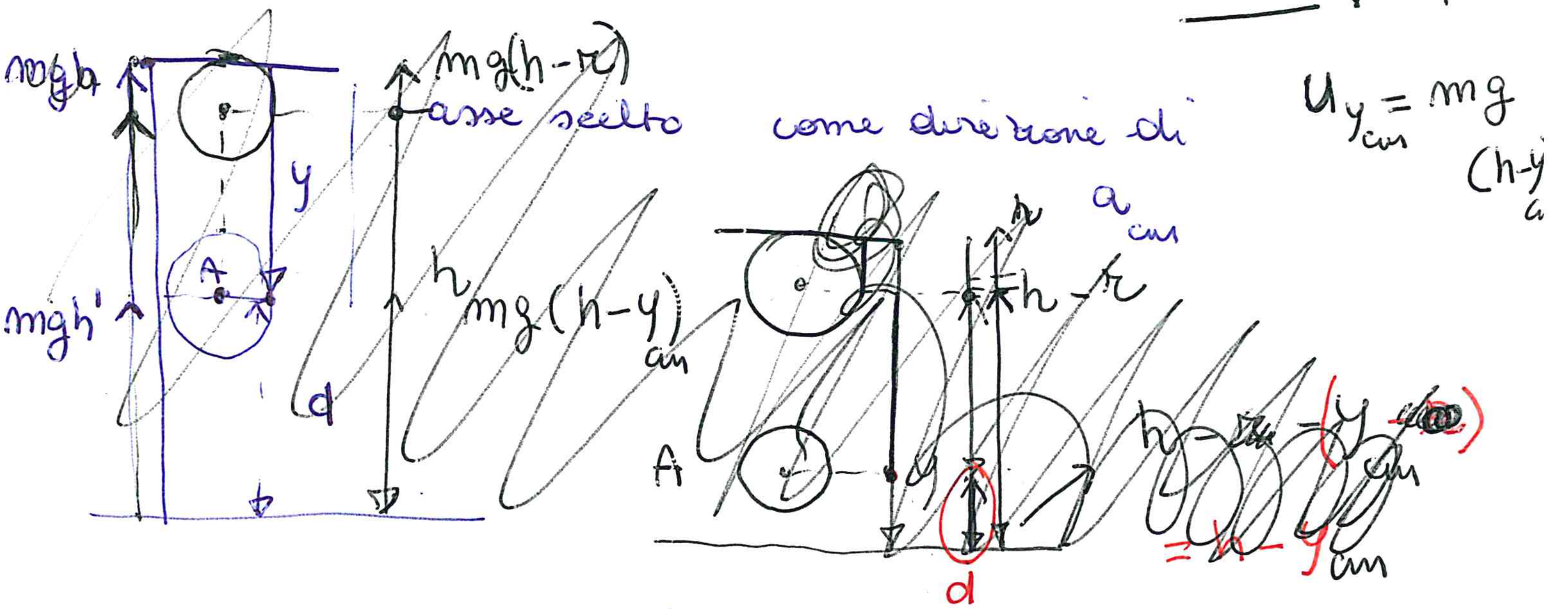
1) $T - mg = -m|a_{cm}|$

$T = mg - m|a_{cm}|$

domanda: determinare l'accelerazione del disco e la tensione del filo.



altro modo per risolverlo



$U_{y_{cm}} = mg(h-y_{cm})$

mgd energia potenziale quando lo yo-yo è in A con il CDM

per cui $U(A) = mg(h \overset{r}{-} y_{cm})$

per $y = R$ $U(A) = mg(h-R) = E$

poichè l'energia meccanica è costante (punto di cont. fermo.

Per un punto generico ↓

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + mg(h \overset{-r}{-} y_{cm}) = cost$$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{r} \qquad I = \frac{m r^2}{2} \qquad I\omega^2 = \frac{\cancel{1} m \cancel{r^2}}{2} \cdot \frac{v_{cm}^2}{\cancel{r^2}}$$

$$E_{mecc} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + mg(h \overset{-r}{-} y_{cm}) = c$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \frac{3}{4} m 2 v_{cm} \dot{v}_{cm} \cancel{+} mg\dot{y}_{cm} = 0$$

$$\dot{y}_{cm} = v_{cm}$$

$$\frac{3}{2} \cancel{m} \cancel{v_{cm}} \dot{v}_{cm} - \cancel{m} g \cancel{v_{cm}} = 0$$

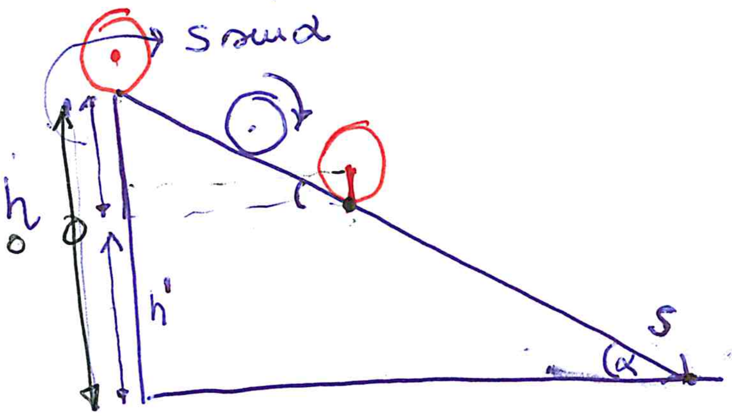
$$\dot{v}_{cm} = a_{cm} = \frac{2}{3} g$$

$$T = mg - m|a_{cm}|$$

$$T = mg - \frac{2}{3} mg = \frac{1}{3} mg$$

Cella 6.6 83.2

Un cilindro ruota senza strisciare su un piano inclinato di un angolo $\alpha$ calcolare l'accelerazione del suo CM.



$h + R$

$h' + R$

~~kcke~~

$$E_{mecc} = E_{cin} + E_p = \overbrace{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

$$+ Mg(h - s\sin\alpha) = \text{cost}$$

$h + R - (h' s \sin\alpha + R)$

$h - h'$

rotolamento puro

$v_{cm} = \omega R$

$\omega = \frac{v_{cm}}{R}$

~~$s = \pm R\theta$~~

~~$\dot{s} = \pm R\dot{\theta} = v_{cm}$~~

~~$E_{mecc} = \frac{1}{2} M \omega^2$~~

nota $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}M\omega^2R^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{(MR^2 + I_{cm})}_{\text{Inerzia risp. cont.}}$$

83.3

$\dot{s} = -R\dot{\theta} = -R\omega_{Rot} = \omega R \qquad \omega^2 = \left(\frac{\dot{s}}{R}\right)^2$

$s = -R\theta$

$E_{meec} = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{s}}{R}\right)^2 + Mg(h - s \sin\alpha)$

$\frac{dE_{mec.}}{dt} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} M \cancel{\dot{s}} \cdot \ddot{s} + \frac{1}{\cancel{2}} \frac{I}{R^2} \cancel{2}\cancel{\dot{s}}\ddot{s} \cancel{+} Mg \cancel{\dot{s}} \sin\alpha$

$= 0$

$M\ddot{s} + \frac{I}{R^2}\ddot{s} = Mg\sin\alpha$

$\ddot{s}\left( I/R^2 + M \right) =$

$\ddot{s} = \frac{Mg\sin\alpha}{M + I/R^2}$

sfera $\frac{2}{5} M R^2$ anello $M R^2$

Disco $\frac{M R^2}{2}$ cilindro $\frac{M R^2}{2}$

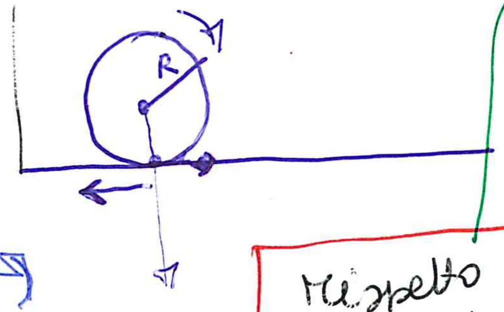
~~Solo se prendiamo un anello~~ è giusta!

~~$$\frac{dE_{cm}}{dt}=0 \Rightarrow \frac{Mg\sin\alpha}{M+\frac{I}{R^2}} = a_{cm}$$~~

~~con $I^{A}_{cil} = \frac{MR^2}{2}$~~

Es. 6.15 Cella

Un cilindro viene lanciato su un piano con coefficienti di attrito $\mu_s$ e $\mu_d$ $\rho = \rho(r)$ : $\rho(r)$ dipende solo dalla distanza dall'asse. Inizialmente il moto è di pura traslazione ($\omega_0 = 0!$) Calcolare in funzione del tempo la velocità del CM. Per quale distribuzione di massa la velocità finale è minima?



Inizialmente non ci sono ~~ne~~ forze Esterne oltre la Forza di attrito, ne momenti esterni oltre al momento delle forze di attrito!

rispetto a cm!

rispetto al CM (che è sull'asse z data la simmetria del problema)

polo sull'asse del cilindro

Inizialmente il moto è di mera traslazione

$$①\ M a_{cm} = M \dot{v}_{cm} = -\underbrace{\mu_d M g}_{cost.} = \vec{F}(E) = f_a$$

con altrito

$$-I\alpha\hat{z} = I\dot{\omega}\hat{z} = -|f_A| R\hat{z} \Rightarrow I\dot{\omega} = |f_A| R \Rightarrow$$

$$\vec{M}(E) = -|\vec{M}(E)|\hat{z}$$

$$2)\ \underbrace{I\dot{\omega}}_{\text{costante}} = \mu_d M g R = |M(E)|$$

domanda 1) calcolare $v_{cm}(t)$ e $\omega(t)$

① moto uniformemente decelerato

$$v_{cm}(t) = v_0 - \mu_d \frac{\cancel{M} g t}{\cancel{M}}$$

$a_{cm} = -\mu_d g$

$\Rightarrow v_{cm}(t) = v_0 + a t$

2) moto unif. acc. in $\omega$

$\dot{\omega} = \mu_d M g R / I$ $\quad \alpha = \dot{\omega}$ $\quad$ con $\omega_0 = 0$

$$\omega(t) = \cancel{\omega_0} + \overbrace{\frac{\mu_d}{I} \cancel{M} g R}\, t = \omega(t)$$

al trascorrere del tempo cresce $\omega$ e diminuisce $v$ dalla ① e dalla ②!

quando il moto diviene di puro rotolamento

$$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$

condizione di puro roto-
mento

per cui

$$\underbrace{v_0 - \mu_d g t^*}_{v(t^*)} = \underbrace{\frac{\mu_d}{I} M g R t^* R}_{\omega(t^*) \quad R}$$

$$t^* \left(\frac{MR^2}{I} + 1\right) \mu_d g = v_0$$

① $$t^* = \frac{v_0}{\mu_d g} \cdot \frac{I}{MR^2 + I}$$

per $t = t^*$
moto di puro
rotolamento

siamo nel vuoto!

nella realtà attrito in
un fluido! + altro
(corpo non rigido
calore ecc.

per $t \geq t^*$ $v = \omega R$ = costante

( punto di cont.
$f_T$ = cost. )

all'istante $t = t^*$

$$v(t^*) = v_0 \Big(1 - \overset{\mu_d g t^*}{\boxed{\frac{I}{MR^2+I}}}\Big) = v_0 \left(\frac{MR^2}{MR^2+I}\right)$$

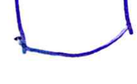
dalla 1

$$= v_0 \frac{MR^2/I}{\frac{MR^2}{I} + 1} = v_0 \frac{1}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

Vmin?

$v = v_{min}$ se $\frac{MR^2}{I}$ è ~~massa~~ min $I$ = max!

tutta la massa sulla superficie



$$I = MR^2 \qquad \int dm\, R^2 = MR^2$$

$$v(t^*) = v_0/2$$

se $I = \frac{MR^2}{2}$

$$v_0 \cdot \frac{\frac{MR^2}{I}}{\frac{MR^2}{I}+1} = v(t^*)$$

$$v(t^*) = \frac{v_0 \, 2}{2+1} = v_0 \frac{2}{3} = \omega R$$

infine se tutta la massa è concentrata sull'asse $(I = 0)$

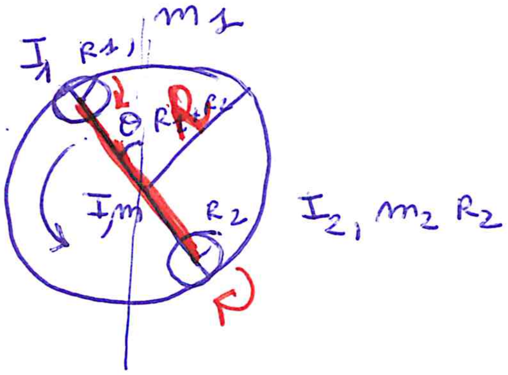
$$\underline{v}(t^*) = v_0 \frac{MR^2}{MR^2+I} = v_0 = \underline{\omega R}$$

In questo caso

~~cioè~~ il cilindro si mette subito a rotolare senza strisciare

con $\omega = \frac{v_0}{R}$

Calcolare l'energia cinetica del sistema di corpi rigidi esprimendola in funzione della coordinata $\theta$ e assumendo condizioni di puro rotolament tra tutti i corpi in contatto



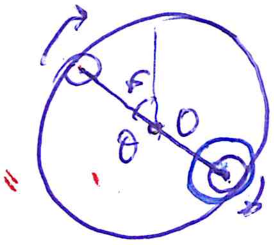
I due cilindri hanno masse $m_1$, $m_2$ e momenti di inerzia rispetto al loro ~~CDM~~ asse $I_1$ e $I_2$ e raggio $r_1$ e $r_2$

Il cilindro + esterno è immobile e ha raggio $R > R_1 + R_2$. L'asta ha massa m e momento d'inerzia I rispetto all'asse passante per il suo CDM

$K = K_{asta} + K_1^{cil} + K_2^{cilindro}$ non so la lunghezza della sbarra

$L_{sbarra} = 2R - R_1 - R_2$

Per una rotazione θ dell'asta



girano in verso opposto allo spostamento se rotolano toccano il cilindro

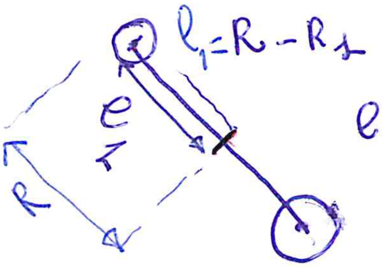
$$L + R_1 + R_2 = 2R$$

il centro di rotazione non è $\boxed{\text{in } \frac{L}{2}!}$ usiamo come polo il centro di rotazione

$$K_{ASTA} = \frac{1}{2} I_{Asse} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$I = \int dm\, r^2 \qquad dm = \rho\, dl$$

$$I^O_{ASTA} = \frac{m}{l_1+l_2}\int_{-l_1}^{l_2} dr\, r^2 = \frac{m}{l_1+l_2}\,\frac{1}{3}\left(l_2^3 + l_1^3\right)$$



$l_1 = R - R_1$

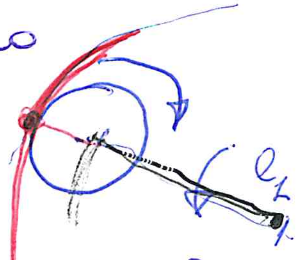
$l_2 = R - R_2$

$$= \frac{m}{(l_1+l_2)}\cdot\frac{1}{3}(l_1+l_2)\left(l_1^2+l_2^2-l_1\right.$$

$$= \frac{m}{3}\left(l_1^2+l_2^2-l_1 l_2\right)$$

cilindri

I cilindri ruotano attorno al punto di contatto a) il centro del primo cilindro ha



$$v_1 = \cancel{\omega_1 R_1} = +l_1\dot{\theta} = -\omega_1 R_1$$

$$\cancel{v_1=0} \quad \omega_1 = -\frac{l_1\dot{\theta}}{R_1} = -\frac{(R-R_1)\dot{\theta}}{R_1}$$

va espresso in termini dei dati

analogamente

$$\cancel{v_2 = -\omega_2 R_2 = (R-R_2)\dot{\theta}}$$

$$\cancel{v_2} \quad \omega_2 = -\frac{l_2\dot{\theta}}{R_2} = -\frac{(R-R_2)\dot{\theta}}{R_2}$$

oppure Koenig - (meglio!)

$$K = \frac{1}{2} I_{ASTA}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1 R_1^2\right)\omega_1^2 +$$

$I_{1cm}$ $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$

$$\frac{1}{2}\left(I_2 + m_2 R_2^2\right)\omega_2^2$$

asse di rotazione il punto di contatto e non il centro del disco

$$I_i = \frac{M_i R^2}{2}$$

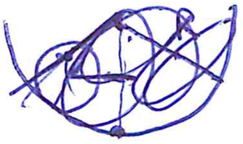
## Eser. 6.16 Mazzoldi Cutro

Un cilindro di raggio R/4 rotola senza strisciare dentro un tubo di raggio R. Nella metà di destra del tubo l'attrito è nullo. Se all'istante iniziale il cilindro è fermo e la quota del CM. è R/2 determinare la posizione di arrivo del cilindro e la velocità angolare ω

| Nel primo tratto |
Se il cilindro rotola senza strisciare

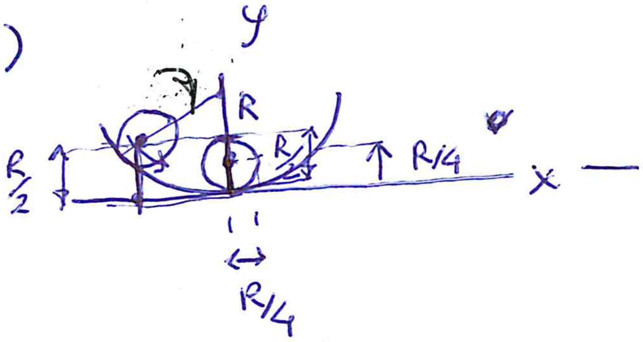
la forza d'attrito non compie lavoro!

Si conserva l'energia!



La quota iniziale del CM

è $\frac{R}{2} = h_1$ la quota finale (y) rispetto al abordo è



$$\frac{R}{4} = h_2$$

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \omega \frac{R}{4}$$

$$mg\left(R/_2 - \frac{R}{4}\right) = mg\frac{R}{4} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Y1. 1

Dati quota iniziale cm

$R/2$

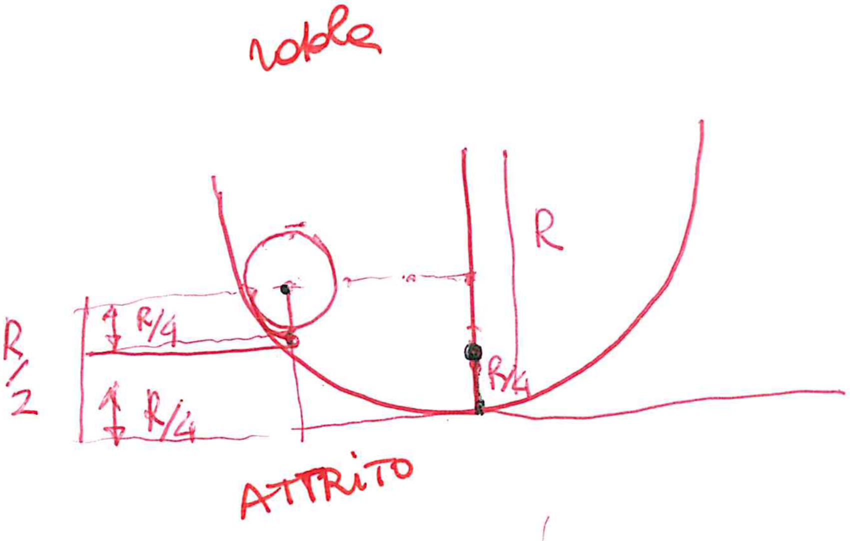
$R_{cil.} = \frac{R}{4}$

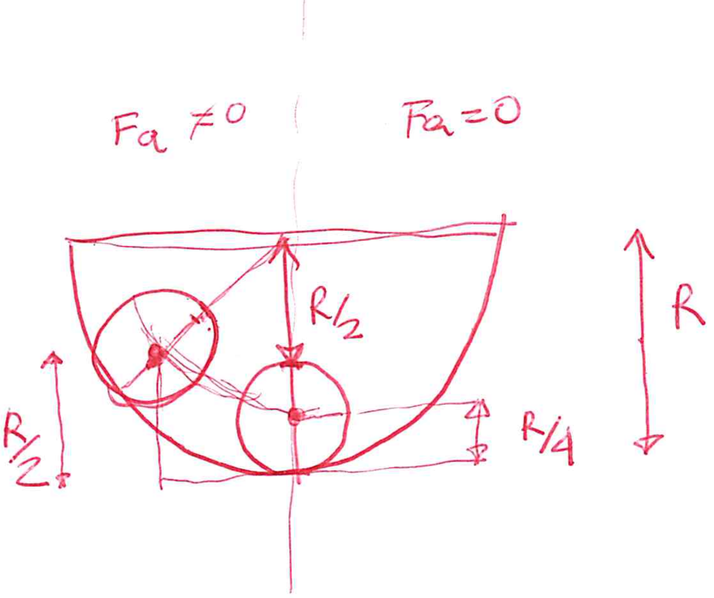
$t=0 = \omega_0 = v_0 = 0$

$fa \neq 0$ $\frac{1}{2}$ di sinistra

$fa \neq 0$ $\frac{1}{2}$ di destra

a che quota si ferma il cilindro





posizione di arrivo del cilindro

$\omega_{arrivo}$?

Dati $R_{cil} = \frac{R}{4}$

$R_{tubo} = R$

$t=0$ $\omega_0 = v_0 = 0$

$fa \neq 0$ $\frac{1}{2}$ di sinistra

$fa = 0$ $\frac{1}{2}$ di destra

$r = \frac{R}{4}$

$$I_{cilindro} = \frac{Mr^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} M \left(\frac{R^2}{16}\right)$$

semp. e molt × 4

$$\cancel{m} g \frac{R}{\cancel{4}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{M} \frac{R^{\cancel{2}}}{16}}^{I} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cancel{M} \omega^2 \frac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{16}\,4}$$

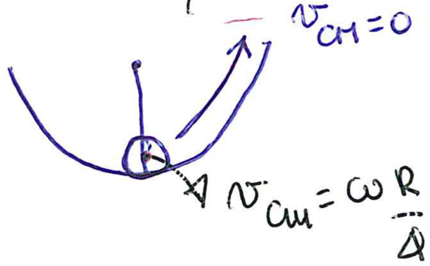
$$g = \omega^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\right) R = \omega^2 \left(\frac{1+2}{16}\right) R$$

$\omega^2 = \frac{16}{3}\frac{g}{R}$

$$\omega = 4\sqrt{\frac{g}{3R}}$$

① $\boxed{v_{CM} = \omega\left(\frac{R}{4}\right) = \sqrt{\frac{gR}{3}}}$

$v_{CM}(R/4) =$



Ora quando risale nella parte destra non trova attrito ω resta costante (scivola!)

$$E_i = mgR/4 + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = mgh_f + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} =$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_{CM}^2 = \cancel{m} g (h_f - R/4)$$

$$v\ ① = \frac{gR}{3} \Rightarrow \underbrace{\frac{v_{CM}^2}{2g}}_{\Delta h} = h_f - h_i$$

$$\Delta h = \frac{v_{cm}^2}{2g} = \frac{\cancel{g} R}{3} \cdot \frac{1}{2\cancel{g}} = \frac{R}{6}$$

$h_f - \frac{R}{4} = R/6$

$\rightarrow h_f = \frac{R}{6} + \frac{R}{4}$

$= \frac{5}{3} \cdot \frac{R}{4}$

# Momento dell'impulso

Un modo particolare per mettere in rotazione o per far rotolare un corpo rigido è di applicargli per un tempo molto breve una forza impulsiva → Teorema dell'impulso

$$\vec{J} = \int \vec{f}\, dt = M\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

d'altra parte $\vec{r}^{\,o} \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}^{o} = \vec{L}^{o}_{fin} - \vec{L}^{o}_{in}$

Il momento dell'impulso rispetto a un polo O

questo comporta anche una variazione del momento angolare rispetto a un polo scelto per i momenti.

Esempio: Palla da biliardo (<u>non vincolata</u>) colpita da una stecca da biliardo (forza impulsiva)

Vogliamo determinare a che quota dobbiamo colpire una palla da biliardo per avere rotolamento puro ($v_{cm} = \omega R$)

Supponiamo che il colpo della stecca fornisca un certo impulso

Prima dell'urto

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\, dt = M v_{cm} \cancel{(t)} (0') - M v_{cm}(0)$$

↳ subito dopo l'urto

~~istante dell'~~

dove $M v_{cm}(0) = 0$!

$$\Delta L^0 = L^{0f} - \underset{/0}{L^{0i}}$$

La palla non è vincolata! non ci sono forze impulsive dovute a reazioni vincolari di cui dobbiamo tenere conto!

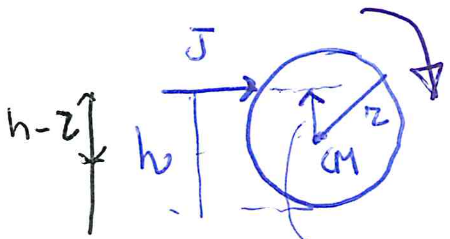
subito dopo l'urto

$$\vec{J} = M v_{cm} \cancel{(t)}$$

un'istante dopo agisce l'attrito e l'oggetto in generale può rotolare e strisciare

→ diminuendo $v_{cm}$ e aumentando l'$\omega$ di rotolamento

Valutiamo ora il momento angolare!



Scegliamo come polo il CM della p.d.b.

$$\vec{r}^{\,CM}_{J} \wedge \vec{J} = (\vec{h} - \vec{r}) \wedge \vec{J} = \vec{L}^{CM}_{f} - \vec{L}^{CM}_{i} = \vec{r}^{\,cm}_{P_{cm}} \wedge \vec{P}_{cm} + I_{cm} \vec{\omega}$$

$\wr$

$\vec{L}^{CM}_{i} = $ nullo non ruotava e non strisciava

$\vec{r}^{\,CM}_{P_{cm}} = 0$

$$(\vec{h} - \vec{r}) \wedge \vec{J} = I_{cm} \vec{\omega} = -(h-r)\hat{J}\,\hat{z} = -I_{cm}\omega\hat{z}$$

$\wr$ $\qquad$ $\wr$

$$1)\ (h-r)J = I_{cm} \underline{\omega}$$

Se vogliamo che la p.d.b abbia un moto di puro rotolamento $\boxed{\text{subito dopo l'urto}}$

$$\boxed{v_{cm} = \omega r}$$

$$\Rightarrow \quad J = m v_{cm} \Rightarrow \quad \left[ \frac{J}{m} = \omega R \right]$$

$\Rightarrow \underline{\omega} = J/mr$ sostituendo $\omega$ nella 1)

Abbiamo un pu

$$② \; (h-r)\cancel{J} = I_{cm}\frac{\cancel{J}}{mr} \longrightarrow ③$$

Possiamo eliminare J e sostituendo $I_c = \frac{2}{5}$ ① $I_c = 2/5\, m r^2$ ottenere a che quota dobbiamo colpire la palla per avere puro rotolamento

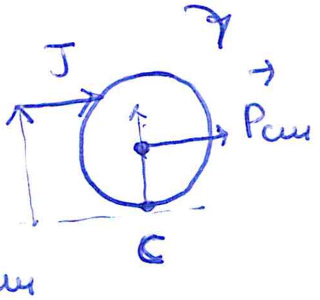
$$④ \; (h-r) = \frac{2}{5}\frac{\cancel{m}\, r^{\cancel{2}}}{\cancel{m}\cancel{r}}$$

$$\boxed{h = \frac{2}{5}r + r = 7/5\, r}$$

---

E se avessimo preso un altro punto (comodo)? ad esempio il punto di contatto!

Dobbiamo ottenere gli stessi risultati



$$\vec{h}\wedge\vec{J} = \overset{\vec{L}_C}{I_{cm}\vec{\omega}} + r^{c}_{cm}\wedge\vec{P}_{cm}$$

↻ ↻

$$-hJ\,\hat{z} + r\,P_{cm}\,\hat{z} = I_{cm}\vec{\omega} = -I_{cm}\,\omega\,\hat{z}$$

$J = m\, v_{cm} = P_{cm}$

$$hJ - r\,P_{cm} = I_{cm}\,\omega$$

$$(h-r)J = I_{cm}\cdot\omega \qquad \omega = \frac{J}{mr}$$

all'ist. dell'urto $\vec{J} = P_{cm}$

e per puro rotolamento

$$v_{cm} = \omega r = \frac{J}{m} \Rightarrow \omega = \frac{J}{mr}$$

$$(h-r)\cancel{J} = I_{cm}\frac{\cancel{J}}{mr} \qquad I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$(h-r) = \frac{2}{5}\frac{\cancel{m}r^{\cancel{2}}}{\cancel{m}\cancel{r}} \Rightarrow h = \frac{7}{5}r$$

c.v.d.

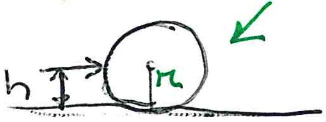
La soluzione è la stessa cambiando polo

Riprendiamo ora prima di imporre il puro rotolamento la

$$(h-r)J = I_{cm}\omega \; *$$

$$hJ = rJ + I_{cm}\omega$$

→ per $r = h$ $\qquad \omega = 0 \longrightarrow$ il corpo striscia e basta



→ se aumenta $h$ aumenta $\omega$

→ al diminuire di $h$ diminuisce $\omega$

fino a quando raggiunge $\omega = 0$! $\times\, r = h$

nota striscia e basta → $\left\{ hJ = r\, m v_{cm} + I_{cm}\omega \right.$
per $r = h$

dalle quali $hJ = rJ + I_c \omega$

→ Rotolamento puro $h = \frac{7}{5} R$ ↺

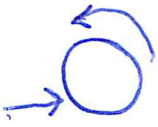
→ Rotola e striscia $h > \frac{7}{5} R$ ↺

→ ~~[illegible]~~ $2 \leq h \leq \frac{7}{5} R$ ↺

rotola e striscia ma con $\omega$ ~~che diminuisce~~ che diminuisce fino a quando per

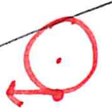
→ $h = r$ $\omega = 0$!

→ Per $h < r$ rotola e striscia ma con verso di rotazione ↻



via!

~~nota che prendendo il punto di contatto come polo~~



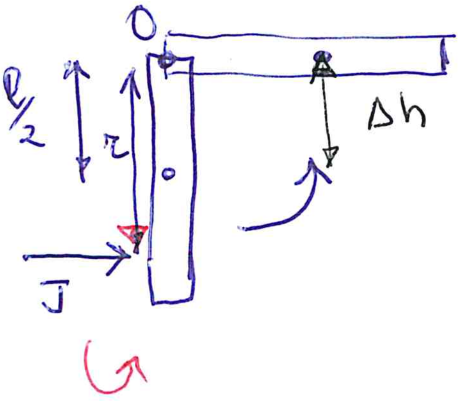
~~$\vec{r}^{\,c}_{fa} \wedge \vec{f_a} = 0$~~
~~$\omega =$ cost durante il moto~~

~~$r^{CM}_{fa} \wedge \vec{F}_A \neq 0$ per cui $\omega$ non è costante! prendendo come polo il cm!~~

6.17 Meglio Vedi Libro non fare

Si consideri un pendolo composto costituito da un'asta di lunghezza l e massa m, libera di ruotare attorno a un asse orizzontale. Si determini l'impulso J, ortogonale all'asta che si deve applicare a distanza $r \leq L$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90°.

J?



Momento d'inerzia dell'asta:

l'asta ruota attorno a O e così fa il suo CM

Teorema di Steiner

$I = I_C + MD^2$

$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$

Teorema del momento dell'impulso: scegliamo come polo come il punto fisso O

$\vec{r}_0 \wedge \vec{J} = rJ = \vec{L}_f - \vec{L}_i = I\omega_f$

dalla quale subito dopo l'urto

~~[illegible]~~

$$\omega_f = \boxed{\frac{rJ}{I}} = \frac{rJ}{Ml^2}3 = \omega \quad ①$$

l'urto ha una durata talmente breve che l'asta può essere considerata ferma in Δt ur

subito dopo l'asta inizierà a ruotare

ma va rispettata la conservazione dell'energia nell'andare da $\theta = 0$ a $\theta = 90°$

$mg\frac{l}{2}$ ~~$\frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{l}{2} = mg\,0$~~ ~~$\frac{1}{2}I\omega^2 = u_i - u_f$~~ ~~$mg(y_1 - y_2)$~~ ~~$= mg\frac{L}{2}$~~

$E_i$ $E_f$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + u_i = u_f$$

dalla ①

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{I}\frac{r^2J^2}{I^{\cancel{2}}} = Mg\frac{l}{2}$$

$$J^2 = \frac{Mg\,l/\cancel{2} \cdot \cancel{2}I}{r^2}$$

$$J^2 = \sqrt{Mg\frac{l}{r^2}\cdot\frac{Ml^2}{3}}$$

$$J = \frac{M}{r}\sqrt{\frac{gl^3}{3}}$$

notare che

$$v_{CM} = \omega_f\frac{l}{2} = r\frac{J}{I}\frac{l}{2} = r\frac{J}{Ml^{\cancel{2}}}3\cdot\frac{\cancel{l}}{2}$$

subito dopo l'applicazione di J, è diversa da $\frac{J}{M}$!

questo perché il corpo è vincolato

per cui si sviluppa nel polo O una reazione impulsiva –

La reazione è una reazione in cui

a) L'energia è conservata

persa

b) l'impulso non è conservato perchè c'è un vincolo, dopo l'applicazione di J si sviluppa nel polo O una reazione vincolare impulsiva per cui $v_f \neq J/m$

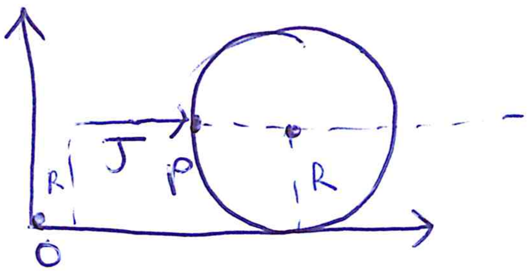
c) abbiamo scelto come polo il punto fisso che appartiene all'asse di rotazione, rispetto a O qualunque reazione impulsiva vincolare ha braccio nullo!

$$r^{o}_{J} \wedge \vec{J} + r^{o}_{R} \wedge \vec{P}_{Imp.} = r^{o}_{J} \wedge \vec{J} \ !$$

~~[illegible]~~

Una sfera omogenea Es. 6.18 Mazzoldi libro non fare 102

di massa m e raggio r è posta sopra un piano orizzontale scabro (con attrito!) Viene applicato un impulso orizzontale J, la cui retta di azione passa per il centro della sfera. Determinare il moto della sfera.



La sfera non è vincolata e la forza di attrito agisce "dopo che si è messa in moto"

essa non è - non è una forza impulsiva!
appena subito dopo l'impulso

$$J = M v_{CM}(0)$$

$$v_{cm}(0) = \frac{J}{M}$$

prendiamo un punto fisso

$$\vec{OP} \wedge \vec{J} = \vec{L}_{fino} = L' + r^{o}_{cm} \wedge m v_{cm}$$

$$= I_{cm}\omega + r^{o}_{cm} \wedge m v_{cm}$$

appena subito dopo l'impulso $\omega(0) = 0$ e $v_{cm} = v_{cm}(0)$

cioè striscia ma non rotola!

Infatti $R^{OJ} \wedge J = R \wedge J = R \wedge \underset{\uparrow = J}{m v_{cm}} + I_{cm}\omega$

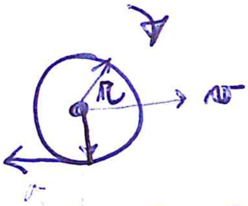
Successivamente agisce solo l'attrito

$m a_{cm} = -\mu_d m g$ $\quad$ $a_{cm} = -\mu_d g$

→ costante $\quad$ moto unif. decelerato $\quad$ la velocità diminuisce all'aum t

1) $v_{cm}(t) = v_{cm}(0) - \mu_d g t = \frac{J}{m} - \mu_d g t$

per effetto del momento della forza di attrito



il corpo inizia a rotolare e a strisciare

e quando $v_{cm}(t) = \omega R$ il moto diviene di puro rotolamento

Usiamo il momento della Forza calcolato rispetto al CM: unica forza che contribuisce è $\vec{f}_{att}$ $\quad$ $f_{att} = \mu_d g m$

$\vec{r} \wedge \vec{f}_{att} \Rightarrow \leftarrow$ $\quad$ $I\alpha = \mu_D g m r$ $\quad$ (concordi vedi figura)

$$\alpha = \frac{\mu_D g m r}{I} \qquad I^{cm}_{sfera} = \frac{2}{5} m r^2$$

$$\alpha = \mu_D g \frac{\cancel{m} \cancel{r}}{\cancel{m} r^2} \frac{5}{2} \qquad \alpha(t) = \frac{\mu_D g}{R} \frac{5}{2} \quad \text{costante!}$$

$\omega(t) = \underset{=0}{\omega_0} + \alpha t \quad = \mu_D g \frac{5}{2R} t$

moto unif accelerato

ω cresce all'aum di t

tornando alla ① $\quad \omega(t^*) r = v_{cm}(t^*)$

$v_{cm}(t^*) = \frac{\mu_D g \frac{5}{2}}{r} t^* r = J/m - \mu_d g t^*$

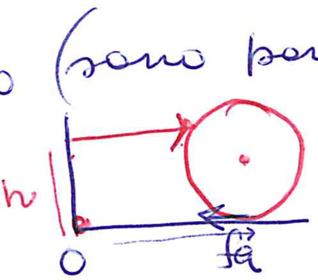
quando sono uguali moto di puro rotolamento

$t^* = \frac{2}{7} \frac{J}{m \mu_D g}$

per $t > t^*$ il moto diviene di puro rotolamento e uniforme -

Notare il momento della forza di attrito rispetto a O è sempre nullo (sono parallele!)

o rispetto al punto di contatto



Quindi rispetto a O si conserva il momento angolare

All'inizio $|\vec{r}^{\,o}_{J} \wedge \vec{J}| = hJ$ = durante il moto

$= I\omega + r m v_{cm}$ =

Imponendo $\omega = \frac{v_{cm}}{r}$

~~Imponendo $v_{CM} = \omega r$~~

~~$rJ = I\omega + m r \omega r$~~

$$rJ = I \frac{v_{cm}}{r} + r m v_{cm}$$

$$Jr^2 = (I + mr^2) v_{cm} \qquad I = 2/5\, mr^2$$

$$v_{cm} = \frac{Jr^2}{I + mr^2} = \frac{5}{7} \frac{J}{m}$$

ma comunque noto J non siamo in grado di ricavare $t^*$

$$\longleftrightarrow$$

Applichiamo J a un altezza h
se scegliamo come polo il centro di massa
nel centro di massa
$v_{cm} = 0$

$$r_{cm} \wedge J = I_{cm} \cdot \omega + \cancel{r_{cm} \wedge m v_{cm}} \qquad r_{cm} = 0$$

$$(h - r) J = I_{cm} \omega$$

$$\omega = (h-r) J \frac{5}{2 MR^2} \Rightarrow$$

$$\nearrow$$

$$v_{cm} = \frac{J}{m} = \omega r = v_{cm}$$

$$\frac{\cancel{J}}{\cancel{m}} = (h-r)\cancel{J} \cdot \frac{5}{2 \cancel{M} R}$$

$$\cancel{\omega} = (h - r)\, \cancel{\omega}\cancel{r}\, \frac{5}{2R^{\cancel{2}}}$$

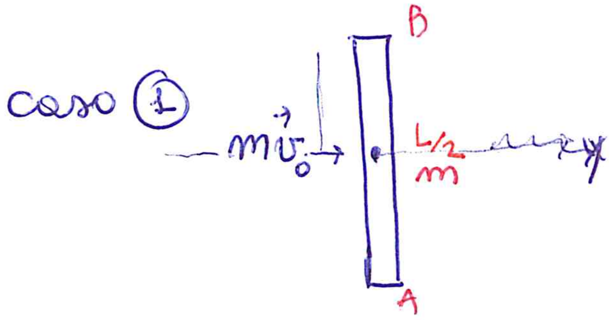
$$\cancel{h}\ \frac{2}{5} R = h - R \quad \rightarrow h = \frac{7}{5} r$$

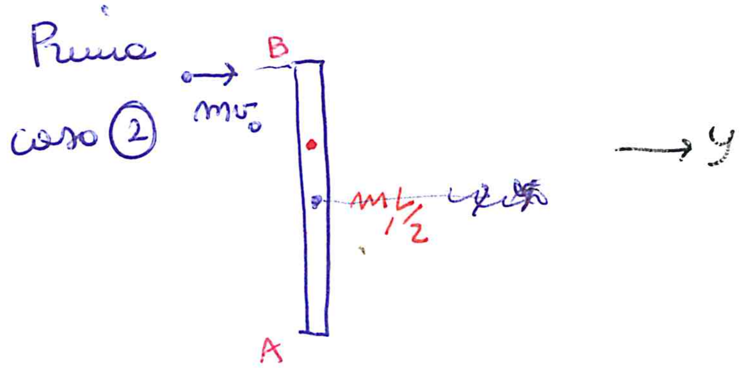
per avere puro rotolamento $h = \frac{7}{5} r$

# Caso senza vincolo urto anelastico

Es. date un'asta di lunghezza L e massa m consideriamo il caso di un urto con un punto m. di massa m (stessa massa asta) nei due casi

No gravità



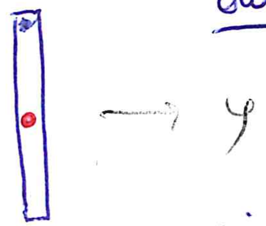


il CM è in questo caso ~~sta~~ nel centro dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto

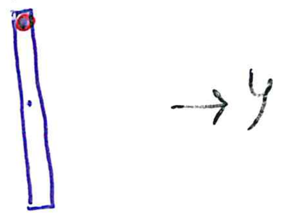
il cm del sistema in questo caso si sposta dopo l'urto verso l'alto (vedi poi)

caso ① urto al centro dell'asta

dopo



caso ② a un estremo



Nota

1) non ci sono vincoli

2) non ci sono F(E) $\Rightarrow \sum F(e) = 0$ P = conservato

3) ~~non ci sono oggetti che ruotano~~ $\sum_i \vec{r}_i \wedge F_i(e) = 0 = \vec{M} = 0$

$\vec{L}$ = costante

cioè $L$ = conservato

# Urto anelastico

## Conservazione dell'impulso

non ci sono forze esterne

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_0 = 2m\vec{v}_f = \vec{P}_f = \vec{P}_{cm} = \overset{2m}{M} v_{cm} = \vec{P}_i^{\,cm} = m v_0$$

$$v_{cm}^{f} = \frac{m v_0}{2m} = \frac{v_0}{2} = v_{i\,cm} = \frac{m v_0}{m_1+m_2} \overset{!}{=} \frac{v_0}{2}$$

sia per il caso ① che per il caso ②

## Conservazione del momento angolare

$$\vec{L}^{O} = r^{O}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + I^{A}_{cm}\,\omega$$

non ci sono forze esterni

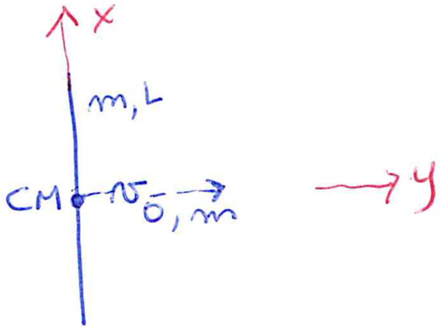
$$\vec{L}^{O}_{i} = \vec{L}^{O}_{f}$$

nota $P^{i}_{cm} = P^{f}_{cm} = \cancel{2} m \frac{v_0}{\cancel{2}}$

La conservazione del momento angolare impone la scelta di un polo per calcolare il momento angolare ~~cos~~ poiché $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_0/2$ è costante e diretta lungo y scegliamo il CDM come polo

$$1)\ \vec{L}^{cm}_{in} = r^{cm}_{mvo} \wedge m\vec{v}_0 = \vec{L}^{cm}_f = \underbrace{r^{cm}_{Pcm}}_{\text{nullo}} \wedge M\vec{v}_{cm} + I^A_{cm}\,\omega$$

caso ①



Scegliendo il cm come polo e come origine degli assi

$$x_{cm} = \frac{m \times 0 + m \cdot 0}{2m} = 0\ !$$

$$2)\ \vec{L}^{cm}_{in} = 0 = \vec{L}^{cm}_f = I^A_{cm}\,\vec{\omega} + \underbrace{\vec{r}^{cm}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm}}_{\text{nullo}}$$

braccio nullo

braccio nullo

→ Di conseguenza 2) il corpo non ruota e da $\vec{P}_{cm} = (2m)\frac{\vec{v}_0}{2} = m\vec{v}_0$ trasla lungo y!

Proviamo a cambiare polo

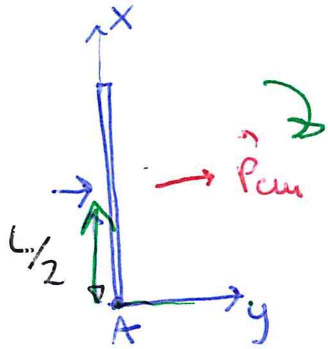
$$\vec{L}^o_f = \vec{L}^o_i$$

Koenig

$$\vec{L}^o_f = \vec{r}^o_{cm} \wedge M\vec{v}_{cm} + I^A_{cm}\,\omega$$

$\vec{L}^o_i =$ [illegible] $\vec{r}^o_{mv_0} \wedge m\vec{v}_0$

Scegliamo come polo un estremo della sbarretta



$L^f_i =$ ↘ Koenig

$$L^A_i = \frac{l}{2} m v_0 = \frac{l}{2}\cdot \cancel{2} m \frac{v_0}{\cancel{2}} + I_{cm}\,\omega$$

↻ ↻

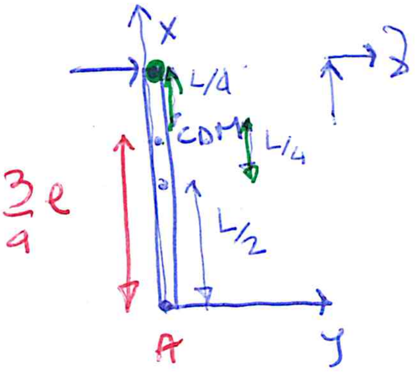
$$\frac{l}{2} \wedge P^f_{cm} + I_{cm}\,\omega$$

stesso risultato con il polo in cm - $\omega = 0$!

Il cm. ha assorbito tutto il momento angolare → infatti affinchè l'uguaglianza sia valida $\omega = 0$!

Caso ②

scegliamo sempre A come origine polo delle coordinate e il CDM come polo



$$x_{cm} = \frac{\overset{\text{asta}}{\cancel{m}\frac{L}{2}} + \underset{\text{p.mat}}{\cancel{m}L}}{2\cancel{m}}$$

$$x_{cm} = \frac{3}{4}\ell$$

Koenig

$$\vec{L}_i^{cm} = \left(\vec{\ell} - \frac{3}{4}\vec{\ell}\right)\wedge m\vec{v}_0 = \vec{L}_f^{cm} = \vec{r}_{cm}^{cm}\wedge M\vec{v}_{cm} + I\omega_f$$

$\Downarrow$ braccio nullo = 0 $\Downarrow$

$$\frac{1}{4}\ell m v_0 = I\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\ell m v_0}{4I}$$

I ?

Momento di Inerzia rispetto al CDM del sistema ASTA+p.m

$$I_{CM}^{A} = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

$$\frac{3}{4}\ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}$$

Qual'è l'energia persa nell'urto anelastico?

Se l'urto è anelastico

$E_i^{cm} > E_f^{cm}$ $\qquad$ $E_{perso} = E_i^{cm} - E_f^{cm}$

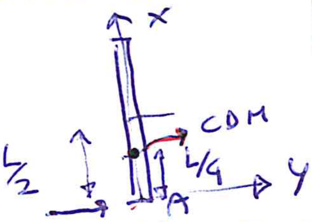
Energia solo cinetica
no forze
ne cons.
ne non
cons.

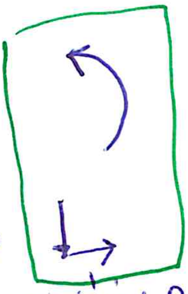
$$E_f^{cm} = \frac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_i^{cm} = \frac{1}{2} m v_0^2 \ J$$

Caso ③ $\qquad$ l'urto è anelastico e

avviene nel punto A





Come prima

CONSERVAZIONE DELL'IMPM

LSO

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_0 = \vec{P}_f = 2m\vec{v} = \vec{P}_{cm}$$

$$v_{cm} = v_0/2$$

~~PCL~~
~~ASTA~~
ASTA $\qquad$ PM

$$x_{CDM} = \frac{m\frac{\ell}{2} + m x_0}{2m} = \frac{\ell}{4}$$

$\vec{L}_i^{cm} =$ ~~$0\,(\ell \perp x\, y_{CDM})$~~ $\qquad$ ~~$x_{CDM}$~~ $\qquad$ $\frac{L}{4} \times m v_0 = I^A_{cm} \omega_f$

$\circlearrowleft \qquad \circlearrowleft$

$$I^A_{cm} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \overset{PM}{M\left(\frac{L}{4}\right)^2}$$

E se l'urto (gli urti) fossero stati elastici

conservazione di L, P, $E_{ci}$ !

caso ①

$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} +$

$m_2 v_{2f}$

essendo le masse dei due oggetti uguali valgono le usuali regole sugli urti elastici

m incidente si fermerà e la sbarretta si piglia tutto l'impulso

e non ruoterà

ecc.

nota $K_f - K_i = U_i - U_f + LNC$

se non ci sono $\vec{F}(E)$ e NC neppu

$K_f - K_i = 0$

due oggetti di massa uguale

usuali regole per $v_2^i = 0$ $v_1^i = v_0$

e $m_1 = m_2$

$v_f^2 = v_0$ $v_1^f = 0$

Se l'urto fosse stato elastico il punto materiale si sarebbe fermato e tutta l'energia cinetica sarebbe stata ceduta alla sbarra che avrebbe avanzato con $v_{CM} = \frac{v_0}{2}$

$$v_{cm} = \cancel{\frac{(m_1 + m_2) v_{2f}}{2m} = \frac{m v_f}{2}}$$

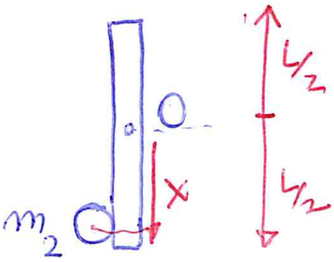
$$v_{cm} = \frac{m v_{2f}}{2m} = \frac{v_0}{2}$$

Es. 6.19 Mazzoldi libro

Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è $m_1$, la lunghezza è l. Un punto materiale di massa $m_2$ e velocità v perpendicolare all'asta, colpisce l'asta a distanza x dal centro O e vi resta attaccato. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Asta L, $m_1$

punto mat. $m_2$, $v \perp$ asta



L'urto è anelastico

non ci sono $F(\vec{E})$

$\sum_e F_{(e)} = 0$ non ci sono vincoli

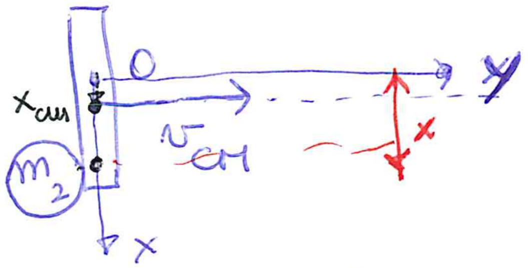
Urto anelastico $E_{mecc}^{i} \neq E_{mec}^{f}$

Si conserva $\vec{P}$ e $\vec{L}$

$$\vec{P}_i^{cm} = m_2\vec{v} = (m_1+m_2)\underline{\vec{v}_f} = \vec{P}_f^{cm} = (m_1+m_2)\underline{v_{cm}}$$

nota: $v_f = \vec{v}_{cm} = \frac{m_2\vec{v}}{m_1+m_2} = \text{cost.}$

nota: $|v_{cm}|$ costante e diretta come $\vec{v}$



la posizione del centro di massa nell'istante in cui avviene l'urto rispetto a O

$$x_{cm} = \frac{m_1 \times 0 + m_2 \cdot X}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2} X$$

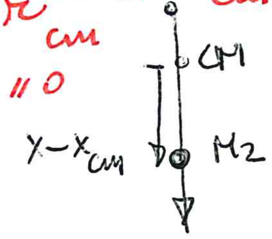
$$y_{cm} = 0$$

Prima e dopo l'urto il sistema si muove lungo la linea tratteggiata

Conservazione di L : $\boxed{\text{scegliamo come polo CM}}$

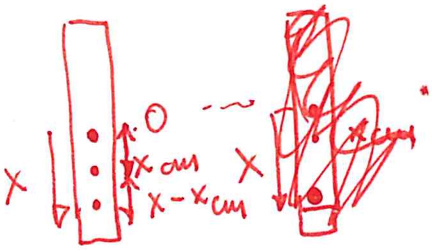
$$\overset{\vec{r}_{cm\,m_2 v}}{(X - x_{cm})} \cdot m_2 v = I_{cm}\,\omega + \underset{\parallel 0}{\vec{r}_{cm}^{\,cm}} \wedge \vec{P}_{cm}$$

↺ $L_i$ ↺



dove $I_{cm}$ è il momento d'inerzia asta + P. M. rispetto al centro di massa

$$I = \underset{\displaystyle \frac{m\ell^2}{12}}{\underset{\swarrow}{I_{cm}^{ASTA}}} + \underbrace{M_{asta}(x_{cm}^2)}_{\text{Teorema di Steiner.}} + m_{PM}(x-x_{cm})^2$$



quindi

$$(x-x_{cm})m_2 v = \overbrace{\left[\frac{m_1\ell^2}{12} + m_1 x_{cm}^2 + m_2(x-x_{cm})^2\right]\omega}^{I\omega}$$

$$\omega = \frac{(x-x_{cm})m_2 v}{m_1 \ell^2/12 + m_1 x_{cm}^2 + m_2(x-x_{cm})^2}$$

la rotazione avviene in senso antiorario
(in senso ~~anti~~orario se $m_2$ viene da destra!)

Non si ha rotazione se l'urto avviene al centro dell'asta. ($x=0$ e $x_{cm}=0$!)
→ $\omega=0$

dopo l'urto il CM si muove di moto rettilineo uniforme gli altri punti hanno un moto composto da traslazione e rotazione (asse vert. per CM)

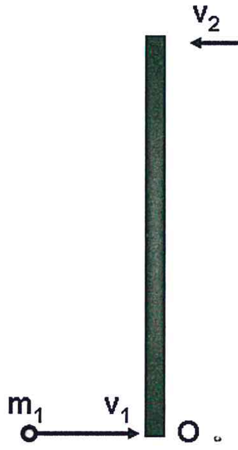
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 23/02/2015**
**Cognome :** ................................................ **Nome :** ................................................

**Matricola:** ................................................ **Anno di corso :** ......................................

# Esercizio 1

Due masse puntiformi $m_1 = 4.0$kg e $m_2 = 1.5$kg urtano da versi opposti un'asta di lunghezza $L = 4.2$m e massa $M = 1.7$kg (vedere figura sottostante). Le due masse si muovono con velocità di modulo, rispettivamente, $v_1 = 4.2$m/s e $v_2 = 1.6$m/s. L'urto (agli estremi dell'asta) è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse.



Si calcoli:

a) La velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta):

$v_{cm} =$ ........................... $d_{cm} =$ ...........................

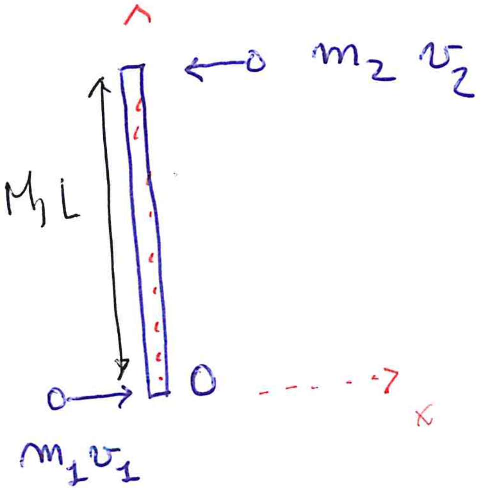
b) Il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto:

$\omega_s =$ ...........................

c) L'energia meccanica dissipata nell'urto:

$E_{diss} =$ ...........................

Esame 23/2/2015



$m_1$ e $m_2$ urtano contemporaneamente l'asta

$m_1 = 4 kg$
$m_2 = 1.5 kg$
$L = 4.2 m$
$M = 1.7 kg$
$v_1 = 4.2 m/s$
$v_2 = 1.6 m/s$

**Urto anelastico**

1) Velocità cm subito dopo l'urto?
distanza del cm da O?

~~Non agiscono sul sistema~~ forze esterne

→ P conservato $P_i = P_f$

$P_{i\,cm} = P_{f\,cm}$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2 + M)\vec{v}$$

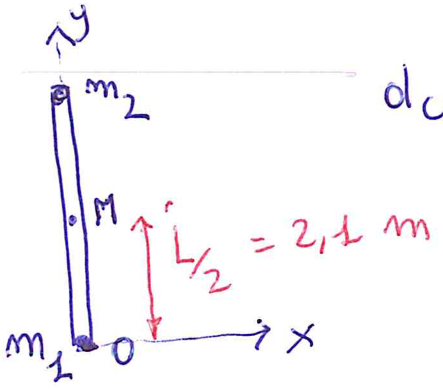
$\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{x}$ $\vec{v}_2 = -v_{2x}\hat{x}$ $v \equiv v_{cm}$ !

$\vec{v}_{cm} = |v_{cm}|$ $\hat{x}$ !

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2 + M)v_{cm}$$

1) $\boxed{v_{cm}^x = \frac{P_i^x}{m_1+m_2+M} = 2 m/s}$ R1

2) Distanza del cm da O?



$$d_{cm} = \frac{m_1 \times 0 + m_2 L + M\frac{L}{2}}{m_1 + m_2 + M} = \boxed{1.37\ m}$$

R2

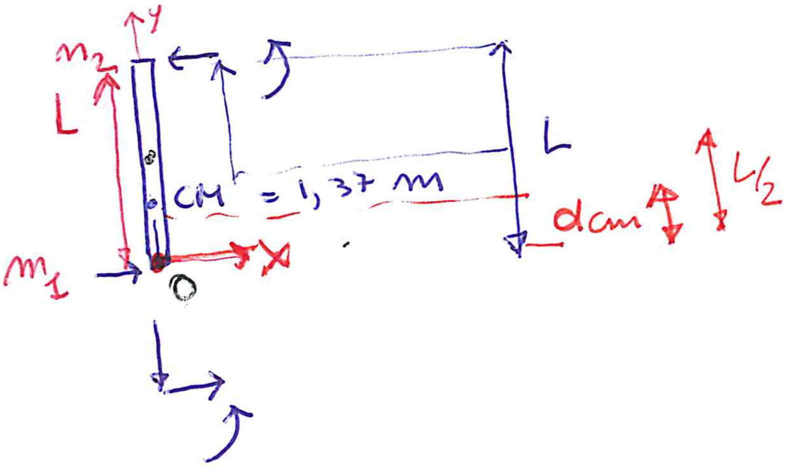
3) Il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto ($\omega_s$?)

Polo nel CM

non ci sono forze esterne e i corpi all'inizio non ruotano → $\boxed{M_z^{cm} = 0}$ ⇒ $L_z^{cm} = \text{cost.}$

~~[illegible]~~

$$L_{zi}^{cm} = m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (L - d_{cm}) =$$



Koenig

$$L_{zf}^{cm} = \underbrace{\vec{r}_{cm}^{\,cm} \wedge \vec{P}_{cm}}_{=0} + I_{cm}^{A}\,\omega$$

$$\omega_s = \frac{L_{zi}^{cm}}{\boxed{I_{cm}^{A}}}\ ?$$

$$I^{A}_{cm} = I^{A\,asta}_{cm} + M\left(\frac{L}{2} - d_{cm}\right)^2 + \underline{m_1}\, d_{cm}^2$$

$$+ \underline{m_2}\,(L - d_{cm})^2$$

$$I^{A}_{cm} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2} - d_{cm}\right)^2 + m_1 d_{cm}^2 +$$

$$m_2 (L - d_{cm})^2 =$$

per cui $\boxed{\omega_s = \frac{L^{cm}_{zi}}{I^{A}_{cm}} = 1.3\ s^{-1}}$ R3

3) Quanto vale l'energia meccanica dissipata nell'urto?

L'urto è anelastico quindi $E^{f}_{mecc} < E^{i}_{mecc}$

Koenig.

$$\left.\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M)\underset{nota}{\underline{v_{cm}^2}} + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ E_i &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . \end{aligned}\right\} \quad E_f - E_i = -3,4\,J$$

3,4 J è l'energia dissipata

122

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 02/02/2017**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Un pendolo ideale è formato da una massa puntiforme $m = 1\text{kg}$ appesa a un filo inestensibile di lunghezza $l = 1\text{m}$ vincolato nel punto A e può oscillare sul piano verticale. Il pendolo viene lasciato oscillare liberamente a partire dalla posizione iniziale definita dall'angolo $\theta = 30°$. Al vincolo A è appesa anche un'asta sottile di massa $M = 2\text{kg}$ e lunghezza $L = 1.2\text{m}$ collegata a una sfera di massa $M_s = 1.5\text{kg}$ e raggio $R = 20\text{cm}$ (vedere Fig.1).

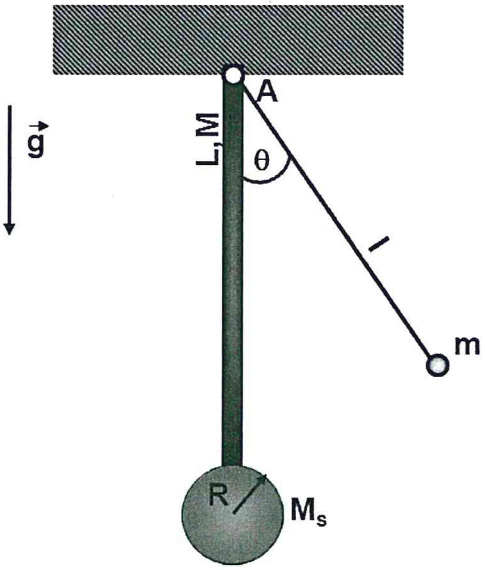


**Figura 1**

Si calcoli:

a) la velocità di m un'istante prima dell'urto con l'asta:

$v_m =$ ................

Supponendo l'urto perfettamente elastico si calcoli:

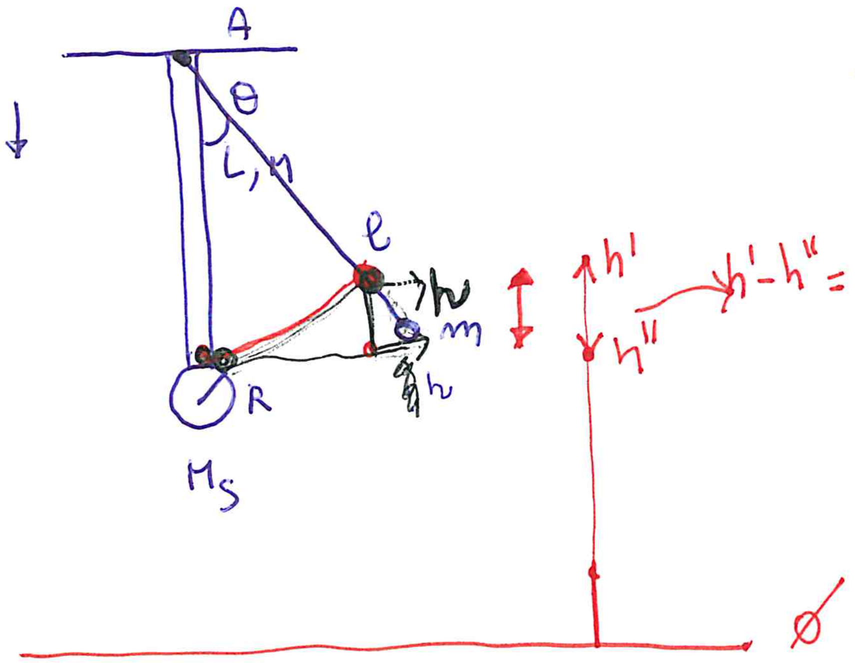
b) la velocità angolare con cui l'asta inizia ad oscillare

$\omega =$ ................

c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo A durante l'urto:

$p =$ ................

# Esame 2/2/2017



a) Pendolo ideale

$m = 1$ kg

$l = 1$ m

vincolato in A

$\theta = 30°$ => $v_0 = 0$

b) Asta sottile L, M

$M = 2$ kg   $L = 1.2$

+

Sfera $M_S = 1.5$ kg

$R = 20$ cm

$= 0.2$ m

1) velocità di m un istante prima dell'urto con l'asta? ($v_m$)

$$mgh' = mgh'' + \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$\cancel{m} g (h) = \cancel{m} g (l - l\cos\theta) = \frac{1}{2} \cancel{m} v_m^2$$

$$v_m = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = 1.62 \text{ m/s}$$

b) Supponendo l'urto perfettamente elastico si calcoli la velocità angolare con cui l'asta inizia a oscillare

Se l'urto è elastico si conserva l'energia del sistema

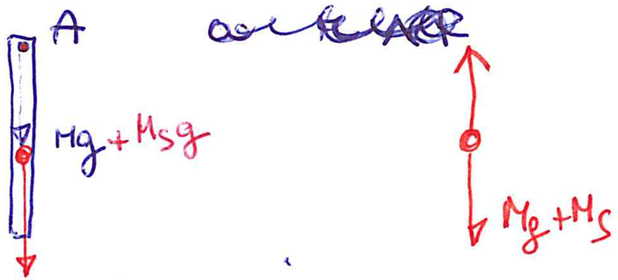
L'impulso non è conservato ([illegible]) perché c'è la reazione vincolare al momento dell'urto che esplica una forza impulsiva.

Per quanto riguarda L se si usa come polo il punto A per calcolare i momenti delle forze

→ la reazione vincolare all'urto è ~~⊥ all'asse di rotazione~~ [illegible] è a braccio nullo perchè si esplica sull'asse di rotazione

→ la forza peso mg e $(M+M_s)g$ è parallela a $\vec{r}_p^A$ [illegible]

→ idem per R e T



Non ci sono altre forze per cui

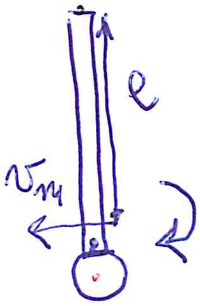
$\vec{L}^A$ [illegible] $\qquad M_z^A = 0 \rightarrow L_z^A =$ costante

# CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$L^A_{zi} = L^A_{zf}$$

Un'istante prima dell'urto

$$L^A_{zi} = -m v_m l \hat{z}$$



un'istante dopo l'urto

$$L^A_{zf} = \underset{①}{-I_A \omega \hat{z}} \quad \underset{②}{- m v_f l \hat{z}}$$

assumiamo $v_f$ concorde a $v_m$ saranno le equazioni a decidere questo non è vero

$$L^A_{zi} = L^A_{zf}$$

$$m v_m l = I_A \omega + \overset{\text{delle masse m}}{\overset{\downarrow}{m v_f l}}$$

↑ sistema che ruota $(M+M_S)$

$$m l (v_m - \underline{v_f}) = I_A \underline{\omega}$$

due incognite $\omega$ e $v_f$

$I^A$ è il momento d'inerzia rispetto al polo attorno a cui ruota il sistema

$$I_A = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}M_S R^2 + M_S (L+R)^2$$

$$I_A = \frac{ML^2}{3} + // = 3,924 \ Kg \cdot m^2$$

# Conservazione dell'energia

Un'istante prima dell'urto          Un'istante succ.

$E_i = \frac{1}{2} m v_m^2$          $E_f = \frac{1}{2} \underset{\text{SLAB}}{I_A} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{mf}^2$

b) $E_i = E_f \Rightarrow \quad m v_m^2 = I_A \omega^2 + m v_{mf}^2$

a) $L_i^A = L_f^A \qquad m \ell (v_m - v_{mf}) = I_A \omega$

b) $\rightarrow \; m (v_m - v_{mf})(v_m + v_{mf}) = I_A \omega^2$

~~a)~~ → $\frac{b)}{a)} = \frac{v_m + v_{mf}}{\ell} = \omega$          usiamo queste

e

a) $\omega = \left[ \frac{m \ell (v_m - v_{mf})}{I_A} = \frac{v_m + v_{mf}}{\ell} \right]$ la a)

molt× $I_A \cdot \ell$

$(v_m + v_{mf}) I_A = m \ell^2 (v_m - v_{mf})$

~~pe~~ le uguagliamo e abbiamo un'eq. in un

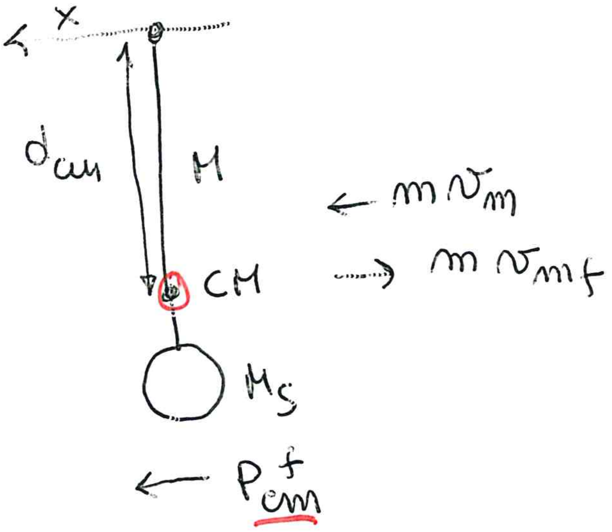
incognita

$$v_{mf} = v_m \frac{m\ell^2 - I_A}{m\ell^2 + I_A} = -0.962 \, m/s$$

discorda?

Quanto vale l'impulso assorbito dal vincolo?

Ricordiamo che il polo è in A



$$\vec{P}_{cm} + \vec{P}_{vin} + \vec{P}_{mf} = \vec{P}_m$$

$$\vec{P}_{vinc} = \vec{P}_m - \vec{P}_{mf} - \vec{P}_{cm}$$

(asta + sfera) un'ist dopo urto

massa m un'ist prima urto

massa m un'ist dopo urto

$$\vec{P}_{vinc} = m v_m \hat{x} - \underbrace{\left(m v_{f_m} \hat{x} + (M+M_S)\,\omega\, d_{cm}\,\hat{x}\right)}_{\vec{P}_f}$$

per cui $\vec{P}_{vin}$ è diretto come $\hat{x}$

$$|\vec{P}_{vinc}| = |\vec{P}_i - \vec{P}_f| = |m v_m - (m v_{fm} + (M+M_S) \cdot \omega d_{cm}|$$

128

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 21/02/2017**
**Cognome :** ................................................ **Nome :** ................................................

**Matricola:** ................................................ **Anno di corso :** ......................................

# Esercizio 1

Due sfere, una di massa $m_1 = 2$kg e raggio $r_1 = 0.17$m la seconda di massa $m_2 = 8$kg e raggio $r_2 = 0.23$m, si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità $v_1 = 34$m/s verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare $\omega_2 = 20$rad/s (vedere Fig.1).

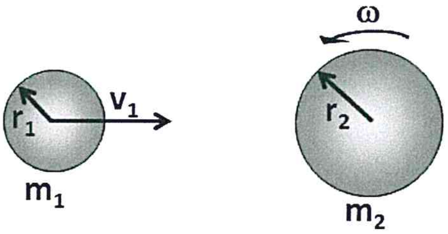


**Fig.1**

Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$E_c =$ ................ ; $d_{cm} =$ ................

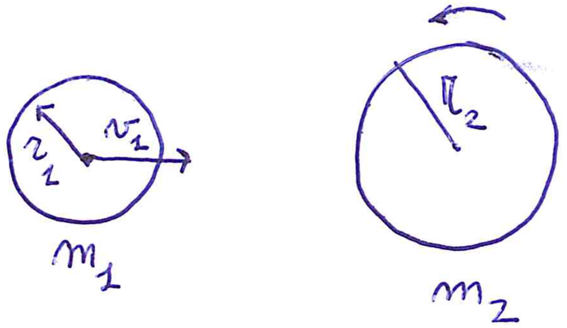
b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$\omega =$ ................ ; $v_{max} =$ ................

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$\Delta E =$ ................

Urto anelastico tra due sfere



$m_1 = 2kg$

$r_i = 0.17m$

$m_2 = 8kg$

$r_2 = 0.23m$

$v_1 = 34m/s$

$\omega_2 = 20 rad/s$

si scontrano e rimangono attaccate

---

Non ci sono forze esterne

→ P conservato

→ L conservato

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i \vec{F}(E) = 0$$

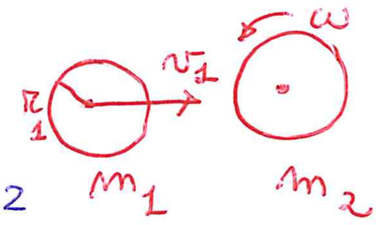
in assenza di Forze esterne
M = 0 !

Urto anelastico

→ $E_c^{finale} < E_c^{iniziale}$

① Quanto vale l'energia cinetica iniziale?

All'energia cinetica iniziale contribuiscono due termini



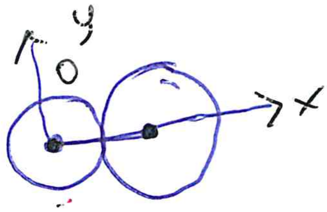
1.a) $E_c^i = \frac{1}{2} I_2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

$I_2$ = momento d'inerzia della seconda sfera

$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.169$ Kg m$^2$

$\boxed{E_c = 1190 \text{ J}}$

1.b Quanto vale la distanza del centro di massa del sistema dopo l'urto dal centro della prima sfera?

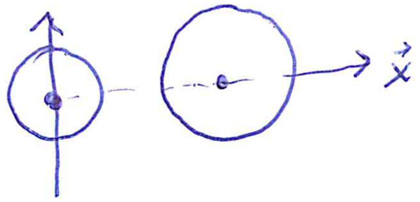


$$d_{cm} = \frac{m_1 \times 0 + m_2 (r_1 + r_2)}{m_1 + m_2} = 0.32 \text{ m}$$

L'urto è anelastico (pertanto si conservano
i corpi non hanno vincoli)
non ci sono FE
sia la quantità di moto che il momento angolare ma non l'energia cinetica

Dalla conservazione della quantità di moto fissata la direzione di $x = \vec{v}_1$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$



$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$ essa dalla definizione

coincide con la velocità del CM ed è costante e diretta lungo x

Ⓡ1

$$\left.\begin{array}{l}(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 \\ v = v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\end{array}\right\} \Rightarrow v_{CM} = 6{,}8\ m/s$$

v ed è costante!

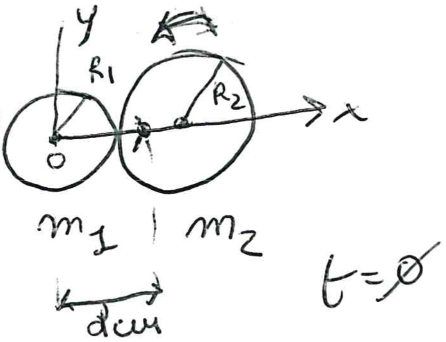
Dalla conservazione del momento angolare
$\vec{L}_i = \vec{L}_f$
in generale dal teorema di Koenig:

$$\vec{L}^{o}_{in} = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + \vec{r}^{\,o}_{cm} \wedge m_1 \vec{v}_1 + r^{o}_{cm} \wedge m_2 v_2$$

nel nostro caso $\omega_1 = 0, v_2 = 0$ e

come da suggerimento scegliamo il centro della prima sfera all'istante dell'urto

$$d^{0}_{cm} = \frac{m_1 \times 0 + m_2 (R_1 + R_2)}{m_1 + m_2} = 0{,}32\ m$$



Ci chiede la velocità angolare del sistema dopo l'urto, ci conviene usare come polo il c.m. del sistema per esprimere la cons. del momento angolare Köenig !

$$L^{cm}_{in} = \underbrace{\vec{r}^{\,cm}_{cm1} \wedge \vec{P}_{cm1}}_{①} + \underbrace{I_1 \omega_1}_{③} + \underbrace{\vec{r}^{\,cm}_{cm2} \wedge \vec{P}_{cm2}}_{②} +$$

$$+ I_2 \omega_2$$

$I_1\omega_1$ ↓ rispetto a cm sfera 1

$I_2\omega_2$ ↓ rispetto a cm dalla sfera 2

$$= L^{cm}_{fin} = \vec{r}^{\,cm}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + I_{cm} \omega_f$$

① $\vec{r}^{\,cm}_{cm1} = -\vec{d}_{cm} \ // \ \vec{P}_{cm1}$

② $\vec{P}_{cm2} = 0$

③ $I_1 \omega_1 = 0$

$$\begin{cases} L^{cm}_{i} = I_2 \omega_2^{\circlearrowleft} = I_{cm} \omega_f^{\circlearrowleft} \\ \quad = L^{cm}_{f} \end{cases}$$

Negli istanti successivi

$$L_f^{cm} = L_{f\,succ}^{cm} = cost$$

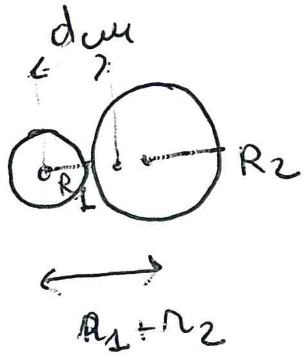
nello stato finale abbiamo un corpo rigido formato dalle due sfere che si muove con una velocità di traslazione $v = v_{cm}$ e che ruota attorno al centro di massa (cm con una velocità angolare

$$\omega_f = \frac{I_2 \omega_2}{I_{cm}}$$

dove $I_{cm} = I_{cm}^{sfera\ 1} + I_{cm}^{sfera\ 2} +$

Steiner $\updownarrow$ $\quad$ $\updownarrow$ Steiner -

$$m_1 d_{cm}^2 + m_2 (r_1 + r_i - d_{c}$$



$$I_{cm}^{sfera\ 1} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2$$

$$I_{cm}^{sfera\ 2} = 2/5\, m_2 r_2^2$$

$$I_{cm} = 0.45\ Kg \cdot m^2$$

134

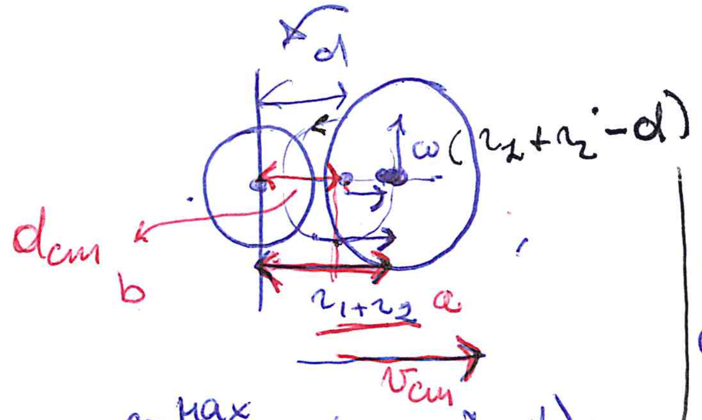
~~[illegible]~~ Per cui $L_i^{cm} = I_2\omega_2 = I\omega = L_f^{cm}$ ⑤

$$\boxed{1b. \rightarrow \omega = \frac{I_2\omega_2}{I} = 7,6 \text{ rad/s}}$$

↷ ruotano nello stesso verso

Qual'è la velocità max dell~~a~~ seconda sfera?
centro della

→ Si ottiene quando il centro della seconda sfera ha la velocità angolare diretta come la velocità di traslazione



$$v_c^{max} = \omega(r_1+r_2\cancel{)}-d_{cm})+v_{cm}$$

Congeliamo la traslazione
Il centro ~~suo~~ della seconda sfera ruota attorno al baricentro con una velocità $v$ tangente alla traiettoria costante e che in modulo vale $v^c_{solo\,Rot} = \omega(r_1+r_2-d_{cm})$.

a questa si aggiunge vettorialmente la velocità di traslazione $= v_{cm} = v$ →
queste ~~[illegible]~~ si sottraggono o si sommano: il valore max è $v_c = \omega(r_1+r_2-d) + v_{cm}$

135 $\boxed{v_{max} = 7.4\ m/s}$

c) Calcolare la variazione di energia del sistema dovuta all'urto (anelastico!)

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$E_i$ calcolato nel punto precedente $\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$
$= 1190 J$

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2}(M_1+m_2) v_{cm}^2 = 278 J$$

↓

Momento di inerzia del sistema costituito dalle 2 sfere calcolato rispetto al centro di massa del sistema

Energia cinetica del centro di massa

$$\Delta E = E_f - E_i = -912 J$$

# Urti tra corpi rigidi e tra corpi rigidi e punti materiali

## Con vincolo

### Urto elastico

$E_{mecc}$ conservata

$\vec{P}$ non conservato

$\vec{L}$ conservato se si sceglie come polo il vincolo

### Urto anelastico

$E_{mecc}$ non conserva

$E_{cin\,f} - E_{cin\,in} =$ energia spesse nell'urto

$\vec{P}$ non conservato

$\vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in} = \vec{P}_{ass\ vincolo}$

$\vec{L}$ conservato se si sceglie come polo il vincolo

---

## Senza vincolo

### Urto elastico

$E_{mecc}$ conservata

$P$ conservato

$\vec{L}$ conservato

### Urto anelastico

$E^{f}_{mecc} \neq E_{mecc\,in}$

$\vec{P}$ conse

$\vec{L}$ conservato