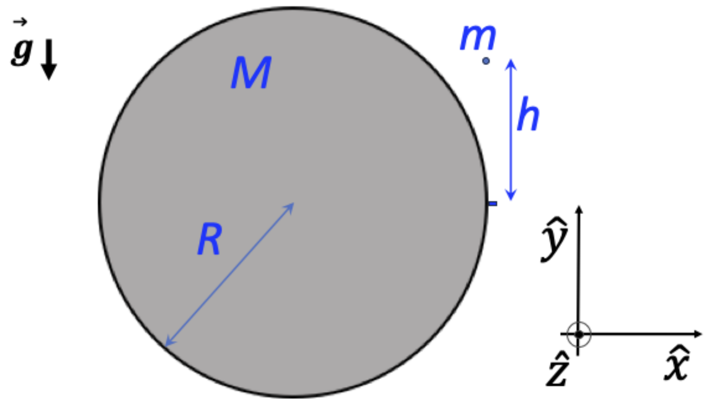
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 9/1/2025

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Un disco omogeneo di massa $M = 1\ kg$ e raggio $R = 1\ m$ è libero di ruotare in un piano verticale senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro. Il disco presenta sul bordo una sporgenza di massa trascurabile che inizialmente si trova allineata al diametro orizzontale (vedi figura). Sopra tale sporgenza cade, rimanendovi attaccata, una pallina assimilabile a un punto materiale di massa $m = M/2$, lasciata libera da ferma ad un'altezza $h = 1\ m$ rispetto alla sporgenza. Si determini:

1. l'energia meccanica del sistema disco più pallina un istante prima dell'urto, T_0, e un istante dopo l'urto , T_1

T_0= .... T_1= ....

Dopo che il sistema costituito da pallina più disco ha compiuto un quarto di giro, calcolare:

2. il modulo della velocità angolare del sistema ω_f

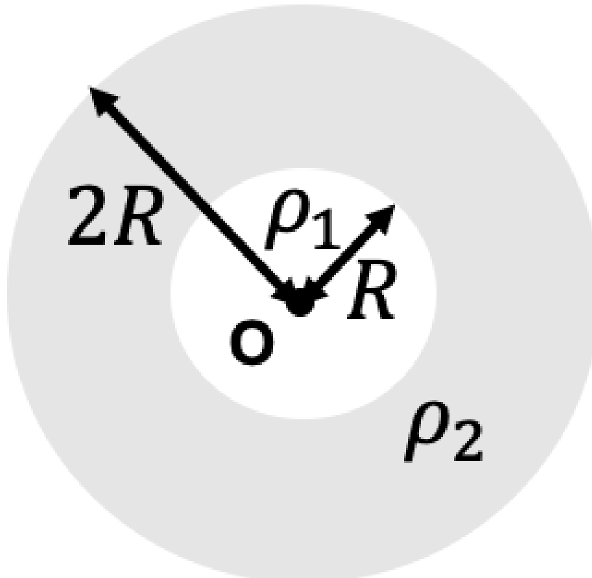
ω_f = ...

3. il modulo della reazione vincolare dell'asse $|\overrightarrow{R}_V|$

$|\overrightarrow{R}_V|$ = ...

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una sfera di raggio $R = 20\ cm$ è uniformente carica con densità di carica $\rho_1 = 0.2\ \mu C/m^3$. Un guscio sferico, di raggio interno pari a R e raggio esterno pari a $2R$ anch'esso uniformemente carico con densità di carica $\rho_2 = -0.18\ \mu C/m^3$ circonda la sfera ed è concentrico ad essa.

1. Determinare la carica totale Q del sistema e il campo elettrico in tutto lo spazio $\overrightarrow{E}$ nell'opportuno sistema di coordinate

   $Q=$ .... $\overrightarrow{E}=$ ....

2. Determinare la differenza di potenziale $V_O - V_{2R}$ tra un punto al centro del sistema e un punto a distanza $2R$ da esso

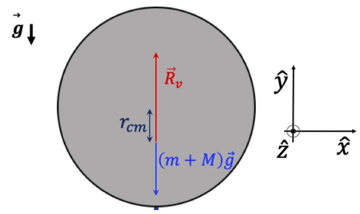
   $V_O - V_{2R} =$ ....

2. Determinare il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto dal campo elettrico per spostare una particella di carica $q = -3\mu C$ posta a distanza $3R$ dal centro della sfera a distanza $4R$ da esso.

   $\mathcal{L} =$ ....

Costanti Utili: $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Assumiamo l'origine dell'energia potenziale alla quota della sporgenza prima dell'urto. Prima dell'urto il disco non ruota e il suo centro di massa, che coincide con il centro del disco, è fermo, per cui l'energia cinetica del disco, T_D è nulla. L'energia cinetica T_p della pallina prima dell' urto con la sporgenza del disco si determina utilizzando il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{M}{2}gh = \frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 = T_p \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = T_p + T_D = T_p = 4.91\ J$$

dove v è la velocità della pallina quando arriva sulla sporgenza un istante prima dell'urto ed è pari a $\sqrt{2gh}$.

Poichè il sistema è vincolato e l'urto è completamente anelastico, si conserva solo il momento angolare con polo nel centro del disco, dove si esplica la reazione dell'asse.
Il momento angolare con polo nel centro del disco prima dell'urto è dovuto solo alla pallina, essendo il disco fermo (non ruota e il suo centro di massa è fermo). Esso è dato da:

$$\overrightarrow{L}_i = -R\frac{M}{2}v\hat{y}$$

con $\overrightarrow{v} = -\sqrt{2gh}\hat{y}$ mentre il momento agolare un'istante dopo l'urto è dato da $\overrightarrow{L}_f = I_A\overrightarrow{\omega}_i$ dove I_A è il momento di inerzia del sistema disco più pallina rispetto all'asse di rotazione del sistema e $\overrightarrow{\omega}_i$ è la velocità angolare del sistema. Il momento di inerzia I_A è dato, utilizzando Steiner, dalla seguente relazione:

$$I_A = \frac{MR^2}{2} + \frac{M}{2}R^2 = MR^2$$

Uguagliando i moduli dei momenti angolari si ottiene:

$$|\overrightarrow{L}_i| = |\overrightarrow{L}_f| = R\frac{M}{2}v = I_A|\overrightarrow{\omega}_i| = MR^2\omega_i \qquad \Rightarrow \qquad \omega_i = \frac{R\frac{M}{2}v}{MR^2} = \frac{v}{2R} = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}$$

Subito dopo l'urto l'energia cinetica si ottiene dalla seguente relazione:

$$T_1 = \frac{1}{2}I_A\omega_i^2 = \frac{1}{2}MR^2\frac{2gh}{4R^2} = \frac{Mgh}{4} = 2.45\ J$$

Domanda 2
Nel moto successivo del disco si conserva l'energia non essendo presenti forze non conservative che compiono lavoro. Dalla conservazione dell'energia e indicando con ω_f la velocità angolare del sistema nell'istante in cui il sistema a compiuto un quarto di giro si ottiene:

$$E_f = \frac{1}{2}I_A\omega_f^2 - \frac{M}{2}gR = E_i = \frac{1}{2}I_A\omega_i^2 \qquad \Rightarrow\ \omega_f = \sqrt{\frac{g}{R} + \omega_i^2} = \sqrt{g\left(\frac{1}{R} + \frac{h}{2R^2}\right)} = 3.84\ rad/s$$

dove E_f ed E_i sono rispettivamente l'energia finale e iniziale del sistema.

Domanda 3
Per determinare la reazione vincolare dell'asse si deve ricorrere alla I^a equazione cardinale:

$$\left(\frac{M}{2} + M\right)\overrightarrow{a}_{cm} = \left(\frac{M}{2} + M\right)\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}_V$$

dove $\overrightarrow{a}_{cm}$ è l'accelerazione del centro di massa che si trova a distanza $r_{cm} = \frac{\frac{M}{2}R}{\frac{M}{2}+M} = \frac{R}{3}$ dal centro del disco (sulla congiungente con la pallina).

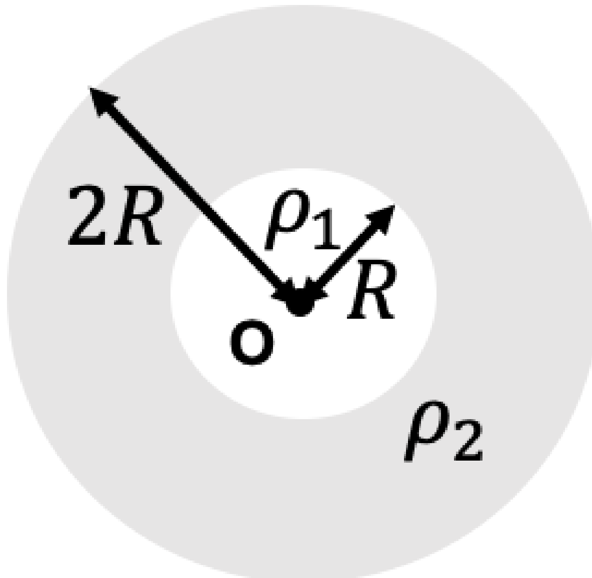
Utilizzando le coordinate cartesiane per le componenti radiale e tangenziale della I^a equazione cardinale (vedi figura), nella posizione finale si ottiene:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_{Vr} - \frac{3}{2}Mg = \frac{3}{2}M\omega_f^2 r_{cm} \\ \mathrm{R}_{Vt} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R_{Vr} = \frac{3}{2}M\left(g + \omega_f^2 r_{cm}\right) = \frac{3}{2}M\left(g + g\left(\frac{1}{R} + \frac{h}{2R^2}\right)\frac{R}{3}\right) = \frac{3}{2}Mg\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{h}{6R}\right) = \frac{1}{2}Mg\left(4 + \frac{h}{2R}\right)$$

Dove la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla essendo in tale posizione la velocità tangenziale massima, mentre la componente radiale dell'accelerazione è centripeta. Per cui:

$$|\overrightarrow{R}_V| = \sqrt{R_{Vr}^2 + R_{Vt}^2} = R_{Vr} = 22.1\ N$$

Soluzione Esercizio 2



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Domanda 1
La carica totale Q è data dalla seguente espressione:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left(8R^3 - R^3\right)\rho_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_1 + 7\rho_2\right) = -35\ nC$$

Per la simmetria sferica della distribuzione di carica (la distribuzione di carica è invariante per rotazioni intorno a qualsiasi asse passante per O) il campo è radiale, e la sua espressione in coordinate sferiche con centro in O è: $\overrightarrow{E} = E_r\hat{r}$.

Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio r concentrica al sistema, si ottiene il campo elettrostatico E_r che ha un diverso andamento nelle 3 regioni ($0 < r < R$, $R < r < 2R$, $r > 2R$).

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{int} = \begin{cases} \rho_1\frac{4}{3}\pi r^3 & 0 < r < R \\ \rho_1\frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_2\frac{4}{3}\pi r^3 - \rho_2\frac{4}{3}\pi R^3 & R < r < 2R \\ Q & r > 2R \end{cases}$$

dove Q_{int} è la carica interna alla sfera di Gauss in ciascuna delle 3 regioni.
per cui per il campo elettrico si ottiene:

$$\overrightarrow{E} = E_r\hat{r} \qquad \Rightarrow\ E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0} & 0 < r < R \\ \frac{1}{3\varepsilon_0}\left[\rho_2 r + \left(\rho_1 - \rho_2\right)\frac{R^3}{r^2}\right] & R < r < 2R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > 2R \end{cases}$$

Domanda 2
La differenza di potenziale richiesta si ottiene dalle seguenti relazioni:

$$V_O - V_{2R} = V(0) - V(2R) = \int_0^{2R}\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_0^{R}\overrightarrow{E}_1\cdot\overrightarrow{dr} + \int_R^{2R}\overrightarrow{E}_2\cdot\overrightarrow{dr} = \frac{\rho_1 R^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_2 R^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\left(\rho_1 - \rho_2\right)R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{R^2}{3\varepsilon_0}\left(\rho_1 + \rho_2\right) = 30.1\ V$$

Domanda 3
Dalla definizione di lavoro:

$$\mathcal{L} = \int_{3R}^{4R} q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dr} = q\int_{3R}^{4R}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{12R}\right) = 3.99\times 10^{-4}\ J$$