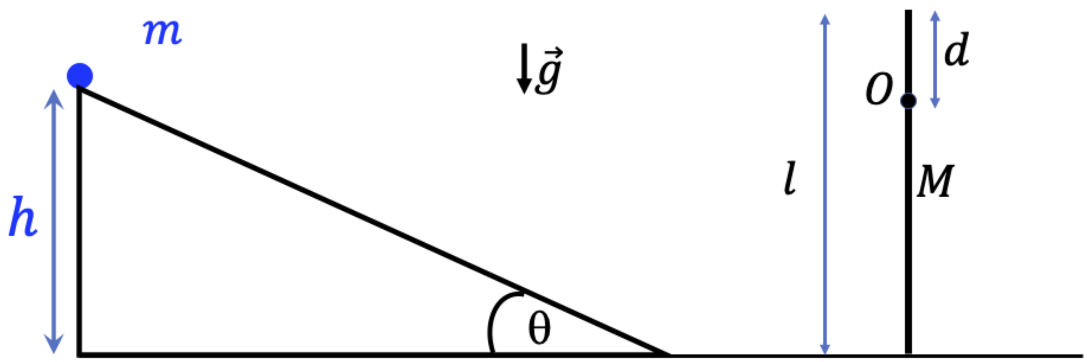
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 27/1/2025

Nome: | **Matricola:**

Cognome: | **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Un punto materiale di massa $m = 0.5\ kg$, inizialmente fermo, scende da una quota $h = 50\ cm$ su un piano inclinato scabro con coefficiente attrito $\mu = 0.3$ e di angolo $\theta = 30^0$. Alla fine della discesa il moto del punto materiale avviene su un tratto di piano orizzontale liscio, fino a quando si conficca nell'estremo di un'asta di lunghezza $l = 30\ cm$ e massa $M = 1\ kg$. L'asta è libera di ruotare senza attrito in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale posto ad una distanza $d = 5\ cm$ dal suo estremo superiore (vedi figura).
Determinare:

1. il tempo t impiegato dal punto per percorrere il piano inclinato

$t =$ ....

2 La velocità del punto materiale un istante prima , v_0, e un istante dopo, v_1, l'urto con l'asta

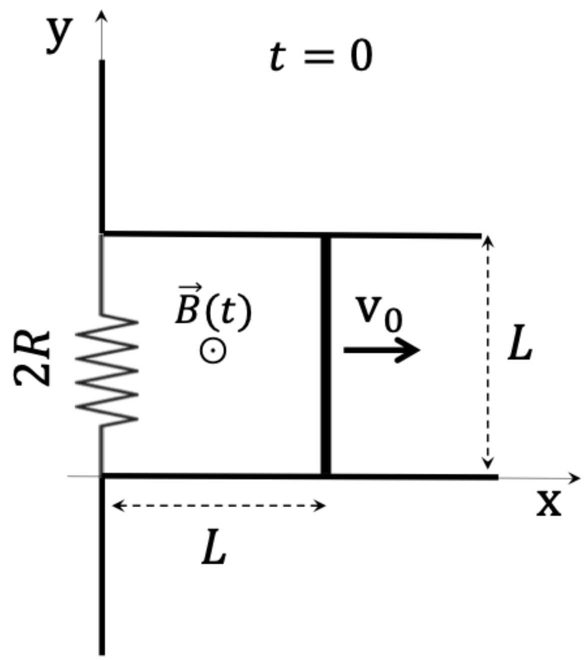
$v_0 =$ .... $v_1 =$ ....

3 La pulsazione Ω delle piccole oscillazioni del sistema costituito dall'asta con attaccato al suo estremo inferiore il punto materiale

$\Omega =$ ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un circuito è formato da due binari conduttori paralleli e di resistività trascurabile, posti ad una distanza $L = 2.0\ cm$ l'uno dall'altro, collegati da un conduttore fisso di resistenza $2R = 2.5\ \Omega$, e da un'asta metallica di lunghezza L, anch'essa di resistività trascurabile, che può scorrere senza attrito sui due binari.
Il circuito è immerso in un campo magnetico variabile funzione del tempo $\overrightarrow{B} = Kt\hat{z}$ con $K = 1.5\ T/s$. Al tempo $t = 0$ l'asta si trova ad una distanza L dal conduttore fisso e si muove con velocità $\overrightarrow{v}_0 = 2\hat{x}\ m/s$ e quindi in modulo costante:

1. Determinare l'espressione del flusso del campo magnetico, $\phi(\overrightarrow{B}, t)$, in funzione del tempo e indicare con un disegno il verso della corrente indotta nel circuito, giustificando la risposta

$$\phi(\overrightarrow{B}, t) = ...$$

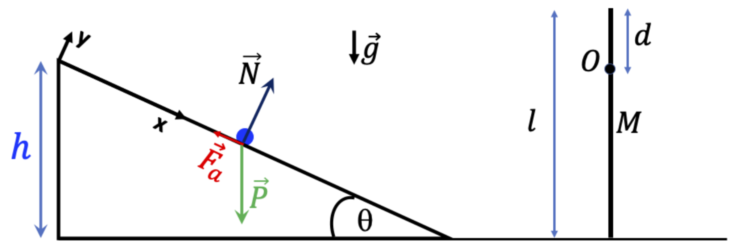
2. determinare l'espressione dell'intensità della corrente $i(t)$ che circola nel circuito in funzione del tempo e calcolarne il valore, $i(t^*)$, al tempo $t^* = 10\ s$

$i(t)=$ .... $i(t^*)=$ ....

3. determinare l'espressione dellla forza $\overrightarrow{F}(t)$ in funzione del tempo che viene applicata all'asta per mantenerne costante la velocità e calcolarne il modulo, $|\overrightarrow{F}(t^*)|$, al tempo t^*.

$\overrightarrow{F}(t) =$ .... $|\overrightarrow{F}(t^*)| =$ ....

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Domanda 1

Con riferimento alla figura, le forze agenti sul corpo sono la forza peso ($\overrightarrow{P}$) la forza di attrito ($\overrightarrow{F}_a$) e la reazione del piano ($\overrightarrow{N}$), con $P = mg$, $F_a = \mu N$. Scomponendo il moto del corpo nella direzione parallela (x) e perpendicolare (y) al piano otteniamo:

$$\begin{cases} ma_x = mgsin\theta - F_a \\ 0 = N - mgcos\theta \quad \Rightarrow \quad N = mgcos\theta \end{cases} \qquad a_x = g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)$$

Dalle relazioni trovate a_x è costante e il moto è uniformemente accelerato lungo x.

Nella discesa di un tratto h il corpo percorre un tratto di lunghezza $L_h = \frac{h}{sin\theta}$ e applicando le fomule per il moto uniformemente accelerato e considerando che il corpo parte da fermo abbiamo che:

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = L_h \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L_h}{a_x}} = \sqrt{\frac{2h}{sin\theta}\frac{1}{g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}} = 0.92\ s$$

Domanda 2

Dall'equazione del moto uniformemente accelerato:

$$v = a_x t \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2a_x L_h} = \sqrt{\frac{2gh\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{sin\theta}}$$

dove con t abbiamo indicato il tempo impiegato a scendere di un tratto h.
Allo stesso risultato si poteva arrivare utilizzando il teorema delle forze vive. La velocità del pm è poi costante sul piano privo di attrito poichè la forza risultante è nulla, per cui un istante prima dell'urto

$$v_0 = v = \sqrt{2a_x L_h} = 2.17\ m/s$$

Nell'urto anelastico tra il pm e l'asta si conserva il momento angolare con polo in O, vale pertanto:

$$\overrightarrow{L}_i = mv_0\left(l - d\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f = I\overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{L}_i| = |\overrightarrow{L}_f| \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv_0\left(l-d\right)}{I}$$

Dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione dell'asta, per cui:

$$I = \left[\frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2 + m\left(l-d\right)^2\right] \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv_0\left(l-d\right)}{\left[\frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2 + m\left(l-d\right)^2\right]} = 5.56\ rad/s$$

Poichè il pm materiale resta conficcato nell'estremità inferiore dell'asta:

$$v_1 = \omega\left(l - d\right) = 1.39\ m/s$$

Domanda 3

La pulsazione delle piccole oscillazioni del sistema può essere ricavato utilizzando la conservazione dell'energia. Infatti assumendo l'origine per l'energia potenziale nell'estremo dell'asta quando essa è in posizione verticale:

$$costante = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\left(l-d\right)\left(1 - cos\theta\right) + Mg\left[\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} - d\right)\left(1 - cos\theta\right)\right]$$

dove il primo termine dopo il segno di uguaglianza indica l'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido, il secondo termine l'energia potenziale del pm, il terzo l'energia potenziale dell'asta e θ indica l'angolo formato dalla congiungente O e la posizione dell'estremo dell'asta in un istante arbitrario, con la congiungente O e l'estremo dell'asta nella posizione in cui l'asta è verticale l'energia potenziale è minima. Derivando rispetto al tempo entrambi i membri otteniamo:

$$0 = \frac{1}{2} 2I\omega\dot{\omega} + mg\left(l - d\right) sin(\theta)\dot{\theta} + Mg\left(\frac{l}{2} - d\right) sin(\theta)\dot{\theta}$$

usando le relazioni: $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$ e dividendo per $I\dot{\theta}$ otteniamo:

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\left(l - d\right) + Mg\left(\frac{l}{2} - d\right)}{I} sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$) fornisce:

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\left(l - d\right) + Mg\left(\frac{l}{2} - d\right)}{I} \theta = 0$$

L'equazione ottenuta per le piccole oscillazioni è quella di un moto armonico che ha pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg\left(l - d\right) + Mg\left(\frac{l}{2} - d\right)}{I}} = 6.73\ s^{-1}$$

In alternativa alla conservazione dell'energia, si può utilizzare la seconda equazione cardinale. Il sistema è un pendolo fisico. Il CM del sistema è a una distanza d_{CM} dall'asse di rotazione O:

$$d_{CM} = \frac{M\left(\frac{l}{2} - d\right) + m\left(l - d\right)}{M + m}$$

Utilizzando come polo il punto O, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{\tau}$ che tende a riportare il sistema (asta +punto materiale) nella posizione di equilibrio (in posizione verticale). Tale momento ha componente non nulla lungo l'asse ortogonale al piano (τ_z):

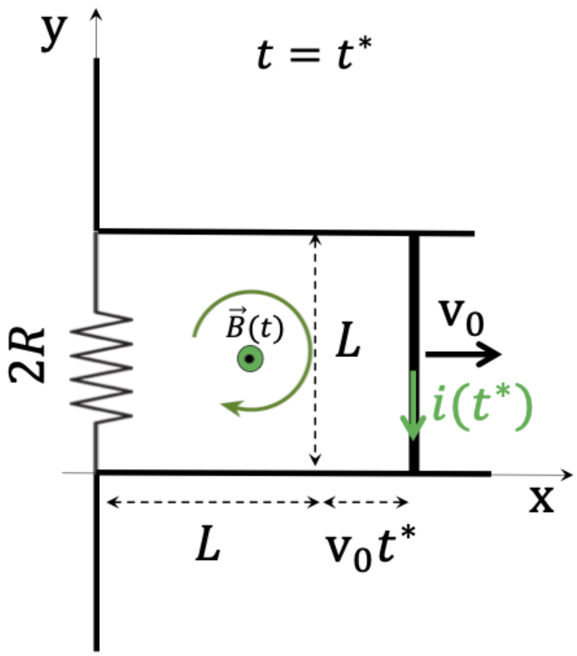
$$\tau_z = I\alpha = -d_{cm}(M + m)gsin(\theta)$$

Dalla quale:

$$I\ddot{\theta} + (M + m)gd_{cm}sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$), fornisce lo stesso risultato per Ω.

Soluzione Esercizio 2



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Domanda 1

La superficie S delimitata dal circuito ad un istante generico t è data da $S = (L + v_0 t)\, L$. Scegliendo in base alla regola della mano destra la normale al piano del circuito, e quindi alla superficie S, orientata come $\vec{B}$, l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito ad un istante generico $t > 0$ è data da:

$$\phi(\vec{B}, t) = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B(t) \iint ds = Kt\,(L + v_0 t)\, L$$

Da notare che $\vec{B}$ non dipende dalla posizione ma solo dal tempo. Il flusso cresce nel tempo: di conseguenza, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la corrente indotta scorre nel circuito in verso orario (vedi figura), in modo da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata.

Domanda 2

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ottiene l'espressione della forza elettromotrice indotta nel circuito:

$$fem(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -K\,(L + v_0 t)\, L - K t v_0 L = -K\,(L + 2v_0 t)\, L$$

Pertanto, la corrente, che circola in senso orario, avrà la seguente espressione:

$$i(t) = \frac{|fem(t)|}{2R} = \frac{KL\,(L + 2v_0 t)}{2R}$$

All'istante $t = t^*$ la corrente vale:

$$i(t^*) = 0.48\ A$$

Domanda 3

La forza magnetica agente sui lato mobile del circuito ad un istante generico t si determina con la legge di Laplace.

$$\vec{F}_L = i(t)L(-\hat{y}) \wedge B\hat{z} = -\frac{KL\,(L + 2v_0 t)}{2R} LKt\hat{x}$$

Per cui, per mantenere in moto l'asta con velocità costante:

$$\vec{F} + \vec{F}_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{F}_L = \frac{KL\,(L + 2v_0 t)}{2R} LKt\hat{x} = \frac{(KL)^2 t\,(L + 2v_0 t)}{2R}\hat{x}$$

Il modulo della forza applicata al tempo $t = t^*$ è pari a :

$$\frac{(KL)^2 t^*\,(L + 2v_0 t^*)}{2R} = 0.14\ N$$