

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**  
**Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 26/06/2024**

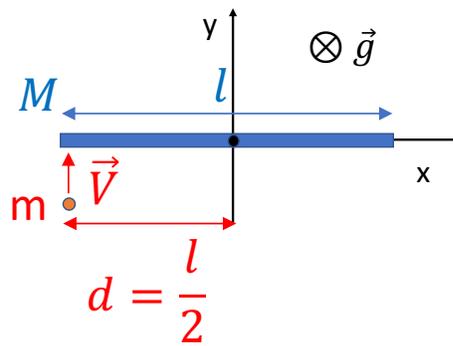
Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**



(Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, una sbarra omogenea di lunghezza  $l$  e massa  $M$ , si trova in quiete su un piano orizzontale privo di attrito. La sbarra viene colpita da una pallina puntiforme di massa  $m$  e velocità  $V$  in direzione perpendicolare alla sbarra. L'urto avviene a una distanza  $d = l/2$  (viene colpita una delle due estremità). L'urto è completamente elastico e dopo l'urto il corpo di massa  $m$  si ferma mentre la sbarra si allontana ruotando su se stessa.

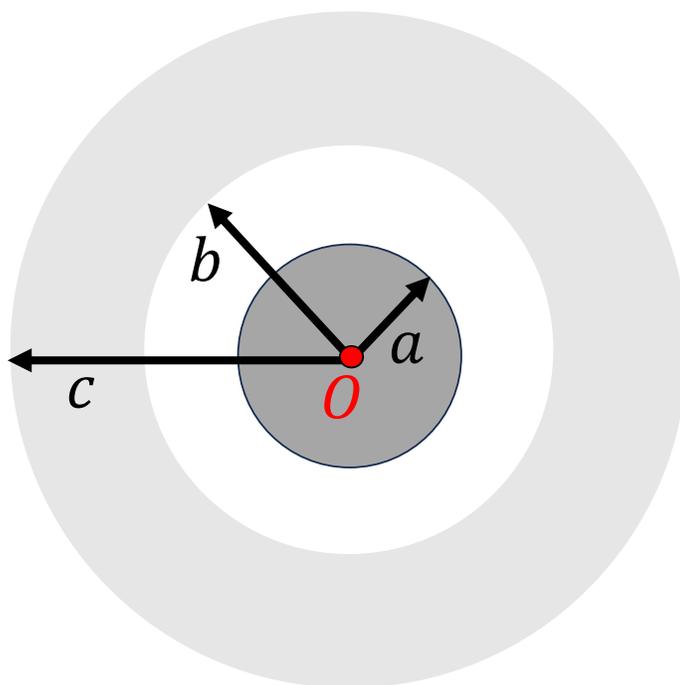
- 1.1 Stabilire quale delle seguenti grandezze, riferite al sistema pallina più sbarra sono conservate nell'urto e spiegarne il motivo: quantità di moto  $\vec{P}$ , momento angolare  $\vec{L}$  con polo in  $O$  (centro della sbarra), energia cinetica  $T$
- 1.2 Determinare l'espressione analitica della velocità  $V_{CM}$  del centro di massa della sbarra in funzione di  $M$ ,  $m$  e  $V$  e la velocità angolare  $\omega$  di rotazione della sbarra attorno al suo centro di massa in funzione di  $l$ ,  $M, m, V$ .

$$V_{CM} = \dots\dots\dots \quad \omega = \dots\dots\dots$$

- 1.3 Sfruttando la condizione di completa elasticità dell'urto dimostrare che il rapporto  $m/M$  è pari a  $1/4$  e calcolare per  $m = 2 \text{ kg}$  e  $V = 2 \text{ m/s}$  l'energia cinetica dovuta alla traslazione del centro di massa della sbarra,  $K_{tr}$ , e quella dovuta alla rotazione intorno al centro di massa della sbarra,  $K_{rot}$ .

$$K_{tr} = \dots\dots\dots \quad K_{rot} = \dots\dots\dots$$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, una carica  $q = 5 \text{ nC}$  è distribuita uniformemente nel volume di una sfera isolante di raggio  $a = 5 \text{ cm}$ . La sfera carica viene inserita al centro di un guscio sferico conduttore di raggio interno  $b = 12 \text{ cm}$  e raggio esterno  $c = 18 \text{ cm}$ , inizialmente scarico ed isolato.

All'equilibrio:

2.1 calcolare i valori delle cariche presenti sulla superficie sferica interna,  $Q_b$ , ed esterna,  $Q_c$  del guscio conduttore

$$Q_b = \dots\dots\dots \quad Q_c = \dots\dots\dots$$

2.2 determinare l'espressione del campo elettrico  $\vec{E}$  in tutto lo spazio e disegnare un grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro  $O$  della sfera isolante

$$\vec{E} = \dots\dots\dots$$

2.3 calcolare il potenziale del guscio conduttore  $V_{con}$  e il potenziale  $V(O)$  in  $O$

$$V_{con} = \dots\dots\dots \quad V(O) = \dots\dots\dots$$

Si assuma che il potenziale a distanza infinita da  $O$  è nullo.

**Costanti Utili:**  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

## Soluzione Esercizio 1

### Domanda 1.1

Poichè il sistema non è vincolato e la risultante delle forze esterne (gravità e reazione del piano) è nulla, durante l'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema. Inoltre, dopo l'urto, poichè sulla sbarra la risultante delle forze esterne è nulla, la velocità del CM della sbarra è costante. Non essendo presenti forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato) si conserva il momento angolare rispetto a qualunque polo, e quindi anche prendendo come polo il punto  $O$  che coincide con il centro di massa della sbarra. Poichè l'urto è perfettamente elastico, si conserva l'energia cinetica non variando la posizione durante l'urto (e di conseguenza l'energia potenziale) e non essendo in gioco forze dissipative che compiono lavoro (urto elastico).

### Domanda 1.2

Dalla conservazione della quantità di moto:

$$M\vec{V}_{CM} = m\vec{V} \Rightarrow V_{CM} = \frac{m}{M}V$$

La velocità del CM ha direzione e verso di  $\hat{y}$  ed è costante nel moto successivo all'urto, come visto nella risposta alla domanda 1.1. Dalla conservazione del momento angolare rispetto a qualunque polo, scegliendo come polo il CM ( $O$ ) della sbarra:

$$\vec{L}_i^{CM} = \vec{L}_f^{CM} \Rightarrow -dmV\hat{z} = I_{CM}\vec{\omega} \Rightarrow \omega_z\hat{z} = -\frac{dmV}{I_{CM}}\hat{z} \Rightarrow \omega = \frac{\frac{1}{2}mV}{\frac{Ml^2}{12}} = \frac{m}{M}\frac{6V}{l}$$

dove  $I_{CM}$  è il momento di inerzia della sbarra per l'asse di rotazione che passa per il CM. Di conseguenza dopo l'urto il CM della sbarra trasla con velocità  $V_{CM}$  allontanandosi dalla posizione iniziale lungo  $\hat{y}$  e la sbarra ruota attorno al CM come dichiarato nel testo, in senso orario ( $\omega_z < 0$ )

### Domanda 1.3

In un urto perfettamente elastico si conserva l'energia cinetica:

$$T_i = \frac{1}{2}mV^2 = T_f = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \Rightarrow mV^2 = MV_{CM}^2 + I_{CM}\omega^2$$

sostituendo le espressioni di  $V_{CM}$  e  $\omega$  come determinate nella risposta alla domanda 2 si ottiene:

$$mV^2 = M\left(\frac{m}{M}V\right)^2 + \frac{Ml^2}{12}\left(\frac{m}{M}\frac{6V}{l}\right)^2 = 4\frac{m^2}{M}V^2 \Rightarrow m/M = 1/4$$

L'energia cinetica di traslazione del CM è data da:

$$K_{tr} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{V}{4}\right)^2 = 1 J$$

L'energia rotazionale attorno al centro di massa è data da:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{12}\left(\frac{1}{4}\frac{6V}{l}\right)^2 = 3 J$$

## Soluzione Esercizio 2

### Domanda 2.1

All'equilibrio, essendo il guscio un conduttore, il campo elettrico per  $b < r < c$ , è nullo. Di conseguenza prendendo una sfera di Gauss con centro in  $O$  e raggio  $r$  tale che  $b < r < c$  la carica interna a tale sfera che è pari a  $q + Q_b$  deve essere nulla. Per cui  $Q_b = -q = -5 \text{ nC}$ . Per la conservazione della carica, poichè la carica iniziale del sistema era pari a  $Q_i = q$ , raggiunto l'equilibrio per la carica finale del sistema vale:

$$Q_f = q + Q_b + Q_c = Q_i = q \quad \Rightarrow \quad Q_c = q = 5 \text{ nC}$$

### Domanda 2.2

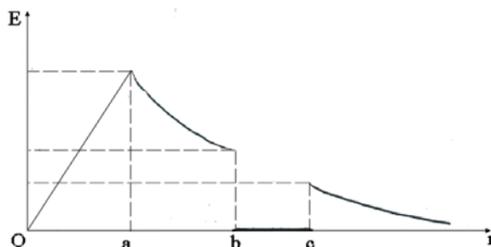
Per la simmetria sferica della distribuzione di carica (la distribuzione di carica è invariante per rotazioni intorno a qualsiasi asse passante per  $O$ ) il campo è radiale in coordinate sferiche con centro in  $O$ :  $\vec{E} = E_r \hat{r}$ . Poichè la carica  $q$  è distribuita in modo uniforme nel volume della sfera di raggio  $a$ , la densità volumetrica di carica in essa è  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ . Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio  $r$  concentrica al sistema, si ottiene il campo elettrostatico  $E_r$  che ha un diverso andamento nelle quattro regioni ( $0 \leq r \leq a$ ,  $a \leq r < b$ ,  $b < r < c$ ,  $r > c$ ).

$$\phi(\vec{E}) = E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad Q_{int} = \begin{cases} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{a^3} & 0 \leq r \leq a \\ q & a \leq r < b \\ 0 & b < r < c \\ q & r > c \end{cases} \quad \vec{E} = E_r \hat{r} \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{a^3} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & a \leq r < b \\ 0 & b < r < c \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > c \end{cases}$$

dove  $Q_{int}$  è la carica interna alla sfera di Gauss in ciascuna delle quattro regioni.

Il campo, quando non è nullo, è diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro ( $O$ ) del sistema (poichè  $q > 0$ ).

Il grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza  $r$  da  $O$  è riportato nella figura successiva. Il grafico di  $E(r)$  è una curva che cresce linearmente con  $r$  da 0 ad  $a$ , decresce come  $\frac{1}{r^2}$  per  $a < r < b$  è nullo per  $b < r < c$  e decresce come  $\frac{1}{r^2}$  per  $c < r$ .



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

### Domanda 2.3

Poichè il guscio è conduttore tutti i punti del guscio sono allo stesso potenziale, per cui  $V(c) = V(b) = V_{con}$ . Assumendo che il potenziale all'infinito è nullo possiamo determinare  $V(c)$ :

$$V(c) - V(\infty) = V(c) = - \int_{\infty}^c E_r(r) dr = \int_c^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 250 \text{ V}$$

Poichè  $V(c) = V(b)$ , essendo il conduttore equipotenziale, per calcolare il potenziale al centro del sistema è sufficiente calcolare  $V(O) - V(b)$ :

$$V(O) - V(b) = - \int_b^O E_r(r) dr = \int_0^b E_r(r) dr = \int_0^a E_r(r) dr + \int_a^b E_r(r) dr = \int_0^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{a^3} dr + \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

Di conseguenza sfruttando  $V(c) = V(b)$  si ottiene:

$$V(O) - V(b) = V(O) - V(c) = 975 \text{ V}$$

Per cui:

$$V(O) = V(c) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] = 1.22 \times 10^3 \text{ V}$$