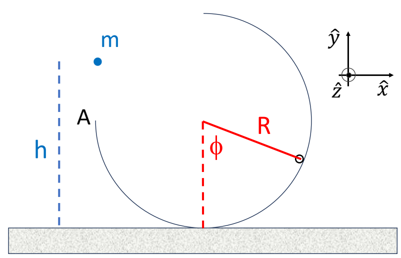
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 5/06/2024

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una guida di profilo circolare di lughezza pari a 3/4 di circonferenza è posta in un piano verticale e poggia su un piano orizzontale. Denotando con ϕ l'angolo misurato a partire dal punto di appoggio in verso antiorario lungo la guida, quest'ultima ha un estremo A a $\phi = -\pi/2$.
La guida è liscia e incernierata al punto di appoggio, con raggio $R = 40\ cm$.
Un corpo, assimilabile a un punto materiale, di massa $m = 2\ kg$ cade verticalmente in A con velocità iniziale nulla da un'altezza $h = \alpha R$, con $\alpha = 1.75$, dal piano di appoggio, proseguendo poi il suo moto nella guida. Si determinino:

1.1 l'espressione della velocità $\vec{v}(\phi)$ del corpo ad un generico angolo ϕ prima del distacco in coordinate cartesiane

$$\vec{v}(\phi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 l'espressione del modulo della reazione vincolare $N(\phi)$ esercitata dalla guida prima del distacco ad un generico angolo ϕ e il valore del modulo della reazione, $N(\pi/4)$, per $\phi = \pi/4$

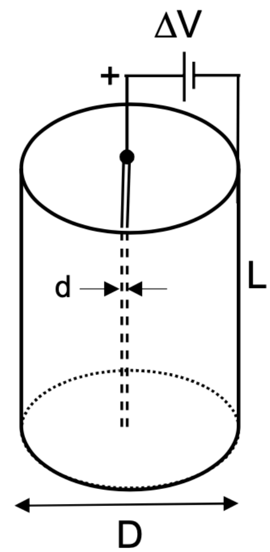
$$N(\phi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad N(\pi/4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.3 l'angolo in radianti ϕ_D per il quale avviene il distacco del corpo dalla guida e il momento angolare $\vec{L}_A$ rispetto al polo A in coordinate cartesiane, al momento del distacco dalla guida.

$$\phi_D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \vec{L}_A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un condensatore è costituito da una sottile superficie cilindrica metallica di diametro $D = 2.4\ cm$ e lunghezza $L = 1\ m$ lungo il cui asse è posto un filo metallico conduttore di diametro $d = 2\ mm$. Al condensatore è applicata una differenza di potenziale $\Delta V = 900\ V$. Determinare :

2.1 l'espressione analitica in coordinate cilindriche del campo elettrico $\overrightarrow{E}$, trascurando gli effetti di bordo, nello spazio interno al condensatore $(r \in [0, D/2], \phi \in [0, 2\pi], z \in [-L/2, L/2]$ e fare un grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse della superficie cilindrica, sempre nello spazio interno al condensatore. Nota per le coordinate cilindriche: asse z coincidente con l'asse della superficie cilindrica, origine dell'asse z coincidente con il centro della superficie cilindrica.

$$\overrightarrow{E} = ...$$

2.2 la carica Q del filo.

$$Q = ...$$

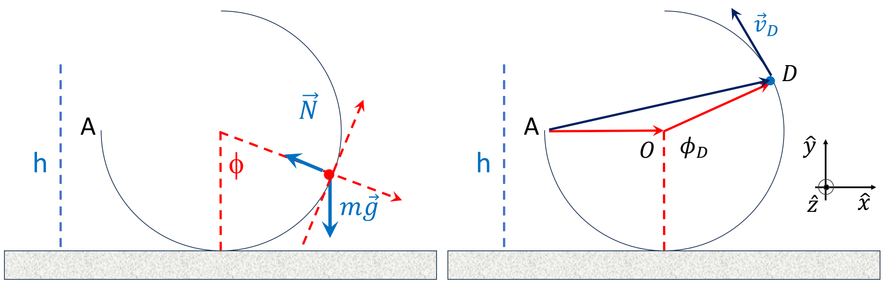
2.3 Calcolare l'energia ε legata al campo elettrico presente nel condensatore.

$$\varepsilon = ...$$

Si assuma il condensatore nel vuoto e ideale, cioè campo elettrico nullo ovunque all'esterno del condensatore.

Costanti Utili: $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

Soluzione Esercizio 1



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 1.1
Vale la conservazione dell'energia meccanica in quanto non ci sono forze non conservative che compiono lavoro. Infatti le uniche forze in gioco sono la gravità conservativa e la reazione normale del profilo circolare che è potenzialmente non conservativa ma che è ortogonale allo spostamento del pm sulla guida e di conseguenza non compie lavoro. Dalla conservazione dell'energia, finchè il corpo è sulla guida, prendendo l'origine dell'energia potenziale sul piano d'appoggio ($y = 0$):

$$mgh = \frac{1}{2}mv(\phi)^2 + mgR(1 - cos\phi) \quad \Rightarrow \quad v(\phi) = \sqrt{2gR\,(\alpha - 1 + cos\phi)}$$

La velocità è diretta tangenzialmente alla curva, pertanto nel sistema cartesiano indicato:

$$\overrightarrow{v}(\phi) = (v(\phi)cos\phi, v(\phi)sin\phi, 0)$$

Domanda 1.2
Proiettando l'equazione del moto in direzione radiale secondo la regola della mano destra si ottiene:

$$-m\omega^2 R = -m\frac{v(\phi)^2}{R} = -N + mgcos\phi \quad \Rightarrow \quad N = m\frac{v(\phi)^2}{R} + mgcos\phi = \frac{m}{R}2gR\,(\alpha - 1 + cos\phi) + mgcos\phi$$

$$N(\phi) = mg\,[2\,(\alpha - 1) + 3cos\phi]$$

Infine, per $\phi = \pi/4$ si ottiene:

$$N\,(\pi/4) = \frac{mg}{2}\left[4\,(\alpha - 1) + 3\sqrt{2}\right] = 71\ N$$

Domanda 1.3
Quando avviene il distacco la reazione normale della guida $\overrightarrow{N}$ è nulla. Pertanto:

$$N(\phi_D) = mg\,[2\,(\alpha - 1) + 3cos\phi] = 0 \quad \Rightarrow \quad cos\phi_D = -\frac{2}{3}\,(\alpha - 1) \quad \Rightarrow \quad \phi_D = \frac{2\pi}{3}$$

Con riferimento alla figura, il momento angolare con polo in A nel punto di distacco D è dato da: $\overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{AD} \wedge m\overrightarrow{v}(\phi_D)$.
Nel punto di distacco D il modulo della velocità è $v(\phi_D) = v(2\pi/3) = 1.4\ m/s$. Poichè la velocità è diretta tangenzialmente alla curva, nel sistema cartesiano indicato:

$$\overrightarrow{v}(\phi_D) = (v(\phi_D)cos\phi_D, v(\phi_D)sin\phi_D) = (-0.7, 1.21, 0)m/s$$

Sempre con riferimento alla figura, il vettore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ con $\overrightarrow{AO} = (R, 0, 0)$ e $\overrightarrow{OD} = (Rsin\phi_D, -Rcos\phi_D, 0)$.
Per cui:

$$\overrightarrow{AD} = (R + Rsin\phi_D, -Rcos\phi_D, 0)$$

Dalle relazioni precedenti otteniamo:

$$\overrightarrow{L}_A = m\,(AD_x v_y(\phi_D) - AD_y v_x(\phi_D))\,\hat{z} = mRv(\phi_D)\left[(1 + sin\phi_D)\,sin\phi_D + cos\phi_D^2\right]\hat{z} = mRv(\phi_D)\left[(sin\phi_D + 1)\right]\hat{z} = 2.09\hat{z}\ kgm^2/s$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 2.1

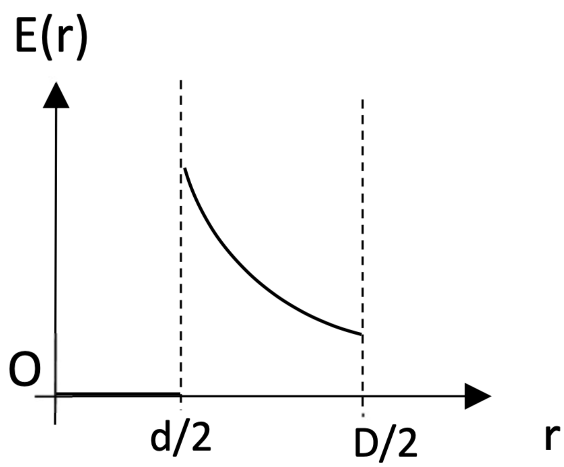
Il campo elettrico, trascurando gli effetti di bordo e all'interno del condensatore, in coordinate cilindriche ha solo componente radiale E_r, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. All'interno del filo metallico e conduttore, per $r \in [0, d/2]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ e $z \in [-L/2, L/2]$ il campo elettrico è nullo ed è nulla la carica. La carica Q è uniformemente distribuita sulla superficie del filo. Pertanto, nella zona interna alla superficie metallica e esterna al filo conduttore, considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse z) con centro nel centro dellla superficie cilindrica altezza L e raggio r, applicando la legge di Gauss, e considerando che al flusso, poichè il campo elettrico è radiale, contribuisce solo il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro, per il campo elettrico otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rL = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

dove Q_{int} è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da $Q_{int} = Q$ per $d/2 \le r < D/2$. Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r}, \text{ dove } E_r(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < d/2 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL} & d/2 \le r < D/2 \end{cases}$$

Il grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza r dall'asse è riportato nella figura successiva. Il grafico di $E(r)$ è una curva con andamento $\frac{1}{r}$ da $d/2$ a $D/2$ ed è nullo per $0 \le r < d/2$.



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 2.2

La carica Q può essere calcolata sfruttando il valore noto della differenza di potenziale ai capi del condensatore, e la relazione che lega la differenza di potenziale tra due punti e il campo elettrico:

$$\Delta V = V(d/2) - V(D/2) = -\int_{D/2}^{d/2} E_r(r)dr = \int_{d/2}^{D/2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\frac{D}{d} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\frac{D}{d}}\Delta V = 20.1 \; nC$$

Domanda 2.3

L'energia elettrostatica può essere calcolata dall'energia immagazzinata nel condensatore, tenendo conto che la carica presente sull' armatura positiva è Q :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}Q\Delta V = 9.06 \times 10^{-6} J$$

Oppure integrando l'energia per unità di volume sul volume totale del condensatore:

$$\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{d/2}^{D/2}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rL}\right)^2 2\pi rLdr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} ln\frac{D}{d} = 9.06 \times 10^{-6} J$$