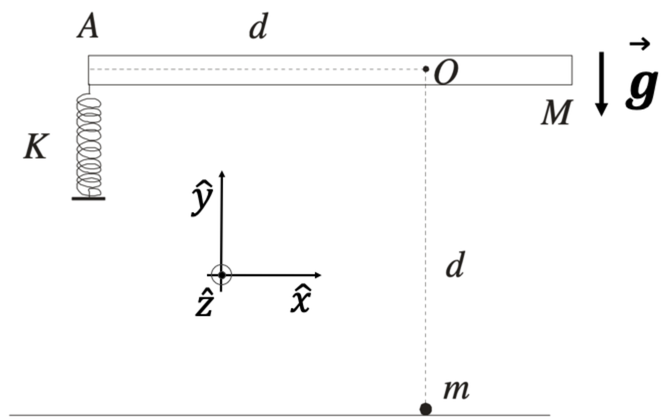
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 29/01/2024

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un'asta di lunghezza $L = 100\ cm$ e massa $M = 100\ g$ è incernierata nel punto O dell'asse orizzontale perpendicolare all'asta intorno al quale essa può ruotare senza attrito. L'estremo A, distante $d = 70\ cm$ da O, è poggiato su una molla di massa trascurabile e costante elastica $K = 20\ N/m$ che è inizialmente compressa di una quantità $\Delta l = 20\ cm$ e tenuta bloccata da un fermo.
Ad un certo istante il fermo viene rimosso.
Assumendo che la molla torni nella posizione di riposo dopo aver perso il contatto con l'asta e resti in tale posizione, si determini:

1.1 la velocità angolare ω_f dell'asta, quando il suo estremo A passa per la posizione verticale sopra O e la compressione minima, Δl_{min} della molla per cui tale posizione viene effettivamente raggiunta

$$\omega_f = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta l_{min} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 la reazione vincolare $\vec{R}$ in O quando l'asta è in questa posizione con la velocità angolare ω_f

$$\vec{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

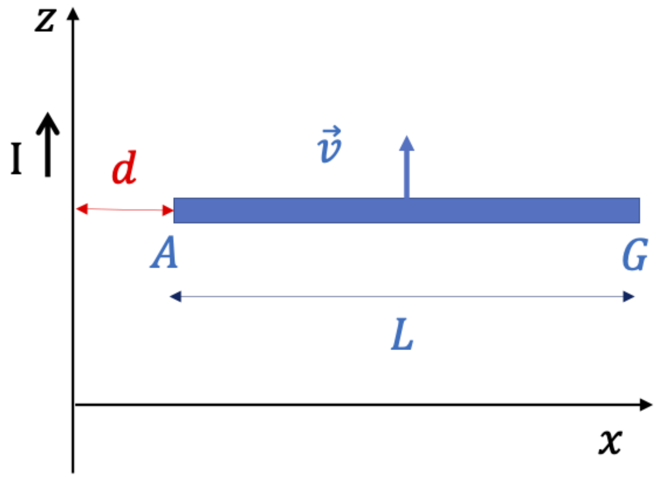
Nel moto successivo l'asta urta elasticamente un corpo di massa m che si trova sulla verticale al di sotto di O e a distanza d da esso. Si determini:

1.3 il valore della massa m tale che l'asta si fermi dopo l'urto.

$$m = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura e in assenza di gravità, un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente $I = 10\ A$. Una sbarretta conduttrice sottile di lunghezza $L = 80\ cm$, perpendicolare al filo, trasla lungo l'asse z. Nel moto di traslazione la velocità della sbarretta è mantenuta costante e pari a $\overrightarrow{v} = 10\ m/s\hat{z}$. L'estremo A della sbarretta più vicino al filo dista da esso $d = 5\ cm$.

2.1 Determinare il campo elettrico in coordinate cartesiane $\overrightarrow{E}$ in ogni punto della sbarretta una volta raggiunto l'equilibrio all'interno del conduttore

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.2 Sempre in condizioni di equilibrio all'interno del conduttore, calcolare la differenza di potenziale ai capi della sbarretta tra i punti A e G, $V_A - V_G$

$$V_A - V_G = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In un istante successivo al raggiungimento dell'equilibrio, gli estremi della sbarretta vengono collegati a una resistenza $R = 0.1\ \Omega$

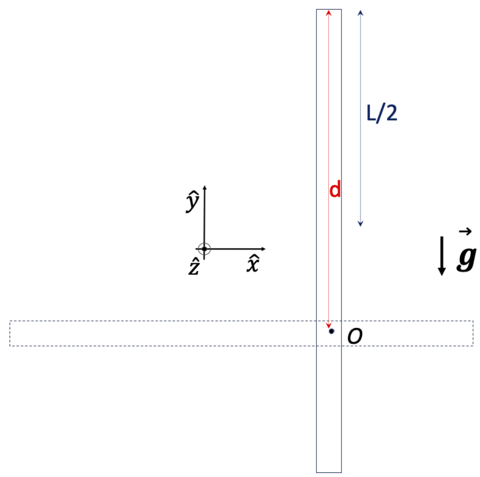
2.3 Calcolare la forza $\overrightarrow{F}$ che deve esercitare l'operatore dall'esterno per mantenere costante la velocità della sbarretta

$$\overrightarrow{F} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ TmA^{-1}

Soluzione Esercizio 1

Domanda 1.1



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Per il sistema costituito da asta e molla l'energia si conserva, in quanto non sono presenti forze non conservative che compiono lavoro (la reazione vincolare in O è applicata a un punto fisso). Indichiamo con E_i l'energia del sistema quando l'asta è orizzontale e ferma e la molla è compressa di Δl e con E_f l'energia del sistema quando la molla è a riposo e l'asta si trova in posizione verticale con l'estremo in A sopra a O. Dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$\frac{1}{2}K(\Delta l)^2 + Mgh_i = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 + Mgh_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}K(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 + Mg(h_f - h_i)$$

dove $h_f - h_i = \left(d - \frac{L}{2}\right) = r$ è la variazione di quota del centro di massa dell'asta e I_O è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale all'asta e passante per O, con $I_0 = M\left(\frac{L^2}{12} + r^2\right)$. Per cui otteniamo:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{K(\Delta l)^2 - 2Mgr}{I_O}} = 5.75\ rad/s$$

Affinché l'asta raggiunga la posizione verticale indicata in figura deve valere la seguente condizione :

$$\frac{1}{2}K(\Delta l)^2 - Mgr = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta l \geq \sqrt{\frac{2Mgr}{K}} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_{min} = 14\ cm$$

dove ω indica la velocità angolare dell'asta quando questa raggiunge la posizione verticale.

Domanda 1.2

La reazione vincolare in tale posizione si ottiene dalla I equazione cardinale, che in coordinate polari, per le componenti radiale e tangenziale da:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_r - Mg = -M\omega_f^2 r \\ \mathrm{R}_t = 0 \end{cases}$$

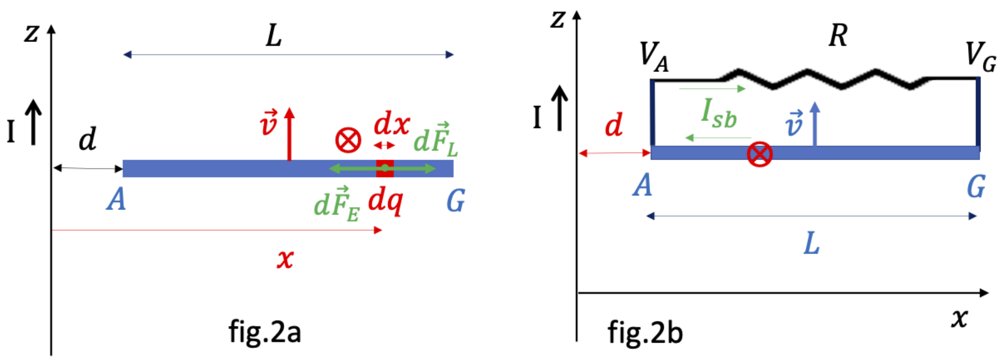
Dove la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla essendo in tale posizione la velocità tangenziale minima, mentre la componente radiale dell'accelerazione è centripeta. Nelle coordinate cartesiane indicate nella figura del testo: $\overrightarrow{R} = 0.32\ N\hat{y}$

Domanda 1.3

Poiché l'urto è elastico nell'urto si conserva l'energia cinetica (non variando le quote dei corpi un'istante prima dell'urto e un istante dopo l'urto, la conservazione dell'energia implica la conservazione dell'energia cinetica). Si conserva inoltre il momento angolare rispetto all'asse di rotazione con polo in O. Pertanto applicando la conservazione dell'energia e del momento angolare nell'urto si ottiene:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad I_O\omega = mvd \quad \Rightarrow \quad m = \frac{I_O}{d^2} = 25.2 \times 10^{-3}\ kg$$

Soluzione Esercizio 2



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 2.1
Nella sbarretta a distanza x dal filo, c'è un campo magnetico

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{y}$$

Utilizziamo l'espressione della forza di Lorentz $\vec{F}_L$ che agisce sui portatori di carica liberi dq all'interno del conduttore in un tratto dx che dista x dal filo:

$$d\vec{F}_L = dq\vec{v} \wedge \vec{B}(x)$$

Questa forza sposta i portatori liberi (elettroni) verso l'estremo G di conseguenza l'estremo A si carica positivamente, mentre l'estremo G si carica negativamente e si crea un campo elettrico $\vec{E}(x)$ nella sbarretta che si oppone al moto dei portatori. A regime si genera una condizione di equilibrio a seguito della quale (vedi $fig.\ 2a$):

$$dq\vec{E}(x) + dq\vec{v} \wedge \vec{B}(x) = 0$$

per cui tra campo elettrico e campo magnetico in ogni punto della sbarretta all'equilibrio vale:

$$\vec{E}(x) = -\vec{v} \wedge \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I v}{2\pi x}\hat{x}$$

Domanda 2.2
Tra l'estremo di sinistra e quello di destra c'è una differenza di potenziale:

$$V_A - V_G = \int_A^G \vec{E}(x) \cdot \vec{dl} = \int_d^{d+L} E_x(x)dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) = 56.7 \times 10^{-6} V$$

e l'estremo più vicino al filo è a potenziale maggiore ($V_A > V_B$), coerentemente con l'azione della forza di Lorentz.

Domanda 2.3
Poichè $V_A - V_G > 0$ nel circuito costituito da sbarretta e resistenza, la corrente che fluisce nella barretta, I_{sb}, scorre nel verso indicato in figura ed è pari a:

$$I_{sb} = \frac{V_A - V_G}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} ln\left(1 + \frac{L}{d}\right)$$

Il contributo alla forza magnetica ($d\vec{F}_m$) agente su un tratto dx della sbarretta è dato da:

$$d\vec{F}_m = -I_{sb}dx\hat{x} \wedge \vec{B}(x) = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi R} ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) dx\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{y} = -\frac{(\mu_0 I)^2 v}{4\pi^2 R} ln\left(1 + \frac{L}{d}\right)\frac{dx}{x}\hat{z}$$

Per cui l'operatore, per mantenere la sbarretta in moto con velocità costante, deve esercitare una forza totale:

$$\vec{F} = -\int_d^{d+L} d\vec{F}_m = +\frac{(\mu_0 I)^2 v}{4\pi^2 R} ln\left(1 + \frac{L}{d}\right)\hat{z}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x} = +\frac{(\mu_0 I)^2 v}{4\pi^2 R}\left[ln\left(1 + \frac{L}{d}\right)\right]^2\hat{z} = +\frac{(V_A - V_G)^2}{Rv}\hat{z} = +3.21 \times 10^{-9} N\hat{z}$$

Lo stesso risultato si ottiene da considerazioni energetiche: l'energia cinetica dellla sbarretta resta costante, mentre nella resistenza viene dissipata per effetto Joule la potenza $P = \frac{(V_A - V_G)^2}{R}$. Questa potenza è fornita dall'operatore esterno, che sviluppa una potenza $\vec{F} \cdot \vec{v}$, per cui:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{(V_A - V_G)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{(V_A - V_G)^2}{Rv}\hat{z}$$