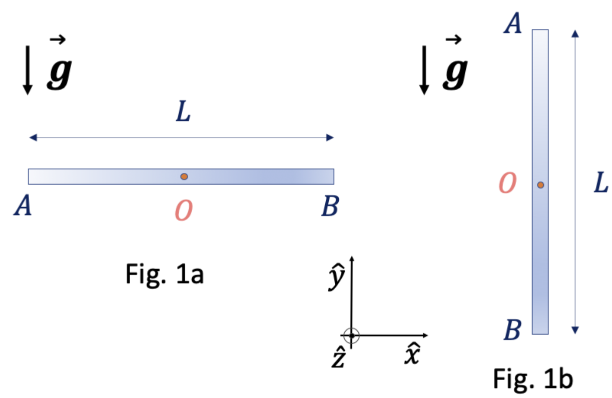
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 14/02/2024

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla $Fig.\ 1a$, un'asta sottile di lunghezza $L = 100\ cm$ e massa $M = 100\ g$, di estremi A e B è incernierata nel punto di mezzo O dell'asta. L'asta è libera di ruotare senza attrito in un piano verticale intorno a un asse orizzontale passante per O. La densità lineare di massa λ non è uniforme ma varia in funzione della distanza di un generico punto x dell'asta dall'estremo A con una dipendenza lineare:

$$\lambda(x) = \frac{2}{3}\frac{M}{L^2}(L + x)$$

Inizialmente l'asta è trattenuta nella posizione orizzontale della $fig.\ 1a$. Calcolare:

1.1 La distanza x_G del centro di massa dell'asta dall'estremo A

$$x_G = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 Il momento di inerzia I_O dell'asta rispetto all'asse orizzontale passante per O

$$I_O = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

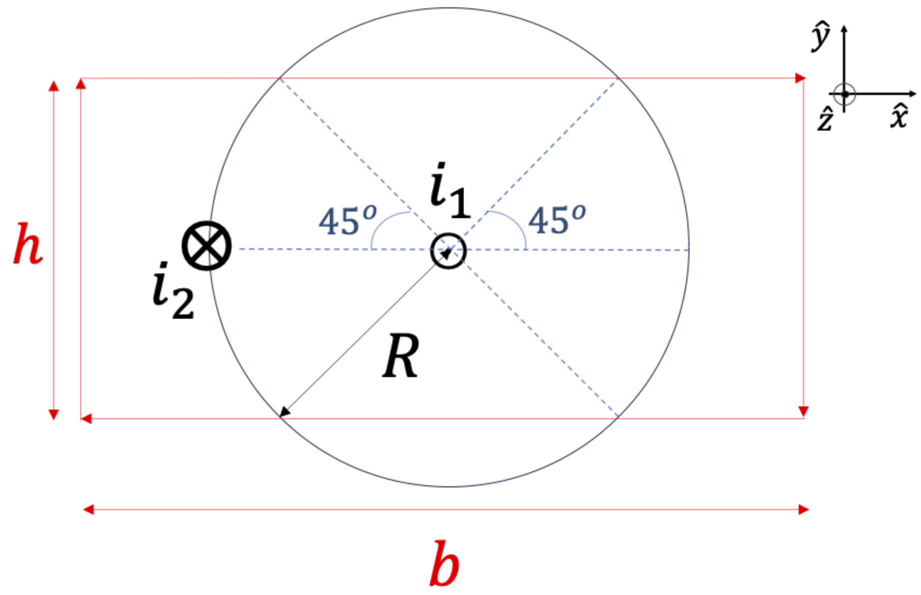
Ad un certo istante, l'asta viene lasciata libera e ruota attorno all'asse di sospensione passante per O. Calcolare:

1.3 La velocità del centro di massa dell'asta $\vec{v}$ quando l'asta raggiunge la posizione verticale (vedi $Fig.\ 1b$)

$$\vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, si consideri un filo conduttore di materiale omogeneo di lunghezza infinita, in cui scorre una corrente $i_1 = I_0 = 0.1\ A$.
Il filo è circondato da una buccia cilindrica coassiale al filo, anch'essa infinitamente lunga, di raggio $R = 2\ mm$ e spessore trascurabile. In essa scorre la corrente $i_2 = I_0$, distribuita uniformemente sulla buccia, con stessa direzione ma con verso opposto a quella nel filo. Tutto il sistema è nel vuoto.

2.1 Determinare l'espressione del campo magnetico in un punto P generico identificato dalle coordinate cilindriche (r, θ, z) nel caso in cui $0 < r < R$ (punto P tra filo e buccia), $\overrightarrow{B}_{r<R}$, e nel caso in cui $r > R$ (punto P all'esterno della buccia), $\overrightarrow{B}_{r>R}$

$\overrightarrow{B}_{r<R}$= .... $\overrightarrow{B}_{r>R}$ = ...

2.2 Calcolare il valore del modulo del campo magnetico nei punti punti di coordinate cilindriche D =(1 mm, 0, 0), B_D, E =(0.5 mm, π, 0), B_E, e F =(3 mm, 0, z=0),B_F

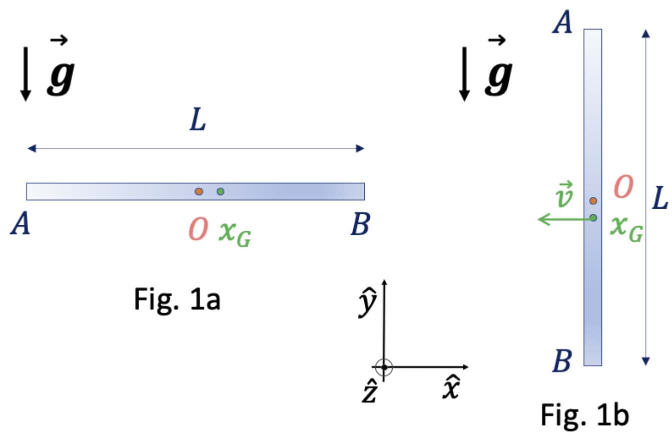
B_D=............................ B_E=............................ B_F = ...

2.3 Calcolare la forza totale $\overrightarrow{F}$ esercitata dal filo sulla buccia, e, con riferimento alla figura, la circuitazione del campo magnetico,$\oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl}$, lungo la linea orientata L (percorso chiuso in rosso di lati h e b) che individua un rettangolo di altezza $h = R\sqrt{2}$ e base $b > 2R$ disposto come in figura

$\overrightarrow{F}$= .... $\oint_L \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl}$ = ...

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA^{-1}

Soluzione Esercizio 1



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 1.1
La distanza x_G del centro di massa dall'estremo A è data da:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda(x)dx = \frac{2}{3L^2}\int_0^L x\,(x+L)\,dx = \frac{5}{9}L = 0.556\ m$$

Domanda 1.2
Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per O è dato da:

$$I_O = \int_0^L \lambda(x)\left(x-\frac{L}{2}\right)^2 dx = \frac{2M}{3L^2}\int_0^L (x+L)\left(x-\frac{L}{2}\right)^2 dx = \frac{ML^2}{12} = 8.33\times 10^{-3}\ kgm^2$$

Domanda 1.3
L'energia meccanica si conserva non essendoci forze non conservative che compiono lavoro (la reazione del perno è applicata al punto fisso O).
Quando l'asta raggiunge la posizione verticale il centro di massa è sceso di una quota h pari a:

$$h = x_G - \frac{L}{2} = \frac{L}{18}$$

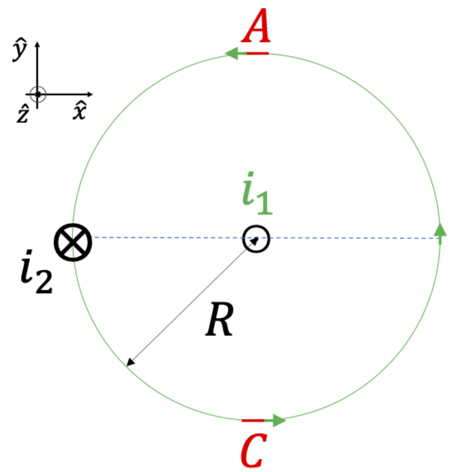
Dalla conservazione dell'energia meccanica, indicando con ω il modulo della velocità angolare dell'asta, otteniamo:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mgh = Mg\frac{L}{18} \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{L}}$$

L'asta ruota in senso orario per cui $\vec{\omega} = -\omega\hat{z}$, il vettore $\overrightarrow{Ox}_G = -\left(x_G - \frac{L}{2}\right)\hat{y} = -\frac{L}{18}\hat{y}$ per cui:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{Ox}_G = -\omega\frac{L}{18}\hat{x} = -0.201\ \frac{m}{s}\hat{x}$$

Soluzione Esercizio 2



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 2.1
Data la simmetria cilindrica del sistema, le linee del campo magnetico $\overrightarrow{B}$ sono delle circonferenze centrate sull'asse del sistema e giacenti su piani perpendicolari ad esso. Pertanto $\overrightarrow{B}$ in coordinate cilindriche ha solo componente tangenziale in coordinate cilindriche. Fissando come verso convenzionalmente positivo quello antiorario per la circuitazione di $\overrightarrow{B}$, la componente tangenziale di $\overrightarrow{B}$ si determina applicando il teorema di Ampere lungo il percorso chiuso orientato scelto per la circuitazione. Esprimendo il campo magnetico in coordinate cilindriche come $\overrightarrow{B} = (0, B_T, 0)$, dal teorema di Ampere:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_T 2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove I_{conc} è la corrente concatenata con la linea circolare (somma algebrica delle correnti concatenate con il percorso scelto).

Per $0 < r < R$ la corrente concatenata è data da i_1. Infine per $r > R$ la corrente concatenata vale $i_1 - i_2 = 0$. Per cui il campo magnetico ha la seguente espressione in funzione di r in coordinate cilindriche:

$$\overrightarrow{B} = B_T \hat{u}_T \equiv (0, B_T, 0) \quad con \quad B_T(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} & 0 < r < R \\ \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

Dove con $\hat{u}_T$ abbiamo indicato il versore tangente alle linee di campo magnetico. Per cui:

$$\overrightarrow{B}_{r<R} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{u}_T \qquad \overrightarrow{B}_{r>R} = 0$$

Domanda 2.2
Dall'espressione del campo magnetico che ha solo componente tangenziale e dipende solo da r otteniamo

per $r = 1\ mm$ $B_D = 2 \times 10^{-5}\ T$, per $r = 0.5\ mm$ $B_E = 4 \times 10^{-5}\ T$, per $r = 3\ mm$ $B_F = 0\ T$

Domanda 2.3
Con riferimento alla figura, per ogni coppia di elementi simmetrici radialmente della buccia (A e C della figura) il versore del campo magnetico (le frecce in verde in A e C nella figura) generato dal filo ha la stessa direzione ma verso opposto, mentre la corrente della buccia che scorre in ciascun elemento ha stessa intensità, direzione e verso. Pertanto per simmetria, il contributo $d\overrightarrow{F}$ alla forza risultante per ciascuna coppia di elementi simmetrici è nullo:

$$d\overrightarrow{F} = -di_2 dz \hat{z} \wedge \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{u}_{TA} \right) - di_2 dz \hat{z} \wedge \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{u}_{TB} \right) \qquad \hat{u}_{TA} = -\hat{u}_{TB} \quad \Rightarrow \quad d\overrightarrow{F} = 0$$

Questo risultato vale per ogni coppia di elementi simmetrici, pertanto, per simmetria, la forza risultante $\overrightarrow{F}$ è nulla.
La frazione di corrente concatenata al percorso L della buccia, dato il verso di percorrenza di L, è pari a $+\frac{i_2}{2}$ mentre la corrente concatenata del filo è $-i_1$. Pertanto dal teorema di Ampere e per il percorso orientato scelto:

$$\oint_L \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 \left(\frac{i_2}{2} - i_1 \right) = -\frac{1}{2} \mu_0 I_0 = -6.29 \times 10^{-8}\ Tm$$