

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**  
**Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 20/09/2023**

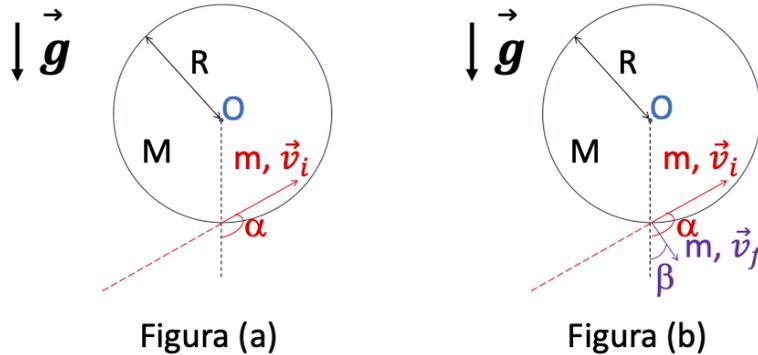
Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**



(Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo)

Una pallina, assimilabile a un punto materiale, di massa  $m = 5 \text{ g}$  urta un disco omogeneo di massa  $M = 200 \text{ g}$  e raggio  $R = 20 \text{ cm}$  fermo, che può solo ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il suo centro ( $O$ , nella Figura a) e ortogonale al piano del disco. La direzione della velocità del punto materiale prima dell'urto giace sul piano del disco. Il modulo della velocità un istante prima dell'urto con il disco è  $v_i = 100 \text{ m/s}$  e l'angolo di incidenza della pallina (vedi Figura a) è  $\alpha = 60^\circ$

Nel caso in cui l'urto è perfettamente anelastico, ovvero se la pallina resta attaccata all'esterno del disco, si determini :

1.1 il modulo della velocità angolare  $\omega_{pin}$  del disco subito dopo l'urto

$$\omega_{pin} = \dots\dots\dots$$

1.2 il lavoro  $\mathcal{L}$  fatto dalle forze interne nell'urto

$$\mathcal{L} = \dots\dots\dots$$

Con riferimento alla Figura b, consideriamo ora il caso in cui l'urto è anelastico invece che perfettamente anelastico, ovvero la pallina non resta attaccata all'esterno del disco.

Se la velocità della pallina dopo l'urto ( $\vec{v}_f$  di Figura b), giace sul piano del disco, si dimezza in modulo e forma un angolo  $\beta = 30^\circ$ , si determini:

1.3 il modulo della velocità angolare  $\omega_{in}$  del disco subito dopo l'urto

$$\omega_{in} = \dots\dots\dots$$

## ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo )

Con riferimento alla Figura, un fascio di forma cilindrica di raggio  $R$  è costituito da protoni. Si supponga che i protoni nel fascio siano distribuiti in modo uniforme con densità volumetrica (numero di protoni per unità di volume) pari a  $n$  e che essi viaggiano in direzione parallela e concorde all'asse  $z$  del cilindro.

Questo fascio genera un campo elettrico che a una distanza  $r_A = 5 \text{ cm}$  ( $r_A < R$ ) dall'asse del fascio è di modulo pari a  $0.03 \text{ V/m}$  mentre a una distanza  $r_B = 20 \text{ cm}$  ( $r_B > R$ ), è tre volte più piccolo di quello in  $r_A$ .

- 2.1 Scrivere le espressioni del campo elettrico  $\vec{E}$  in tutto lo spazio in coordinate cilindriche e fare un grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro

$$\vec{E} = \dots\dots\dots$$

- 2.2 Calcolare  $n$  ( il numero di protoni per  $m^3$ )

$$n = \dots\dots\dots$$

- 2.3 Calcolare il raggio  $R$  del fascio

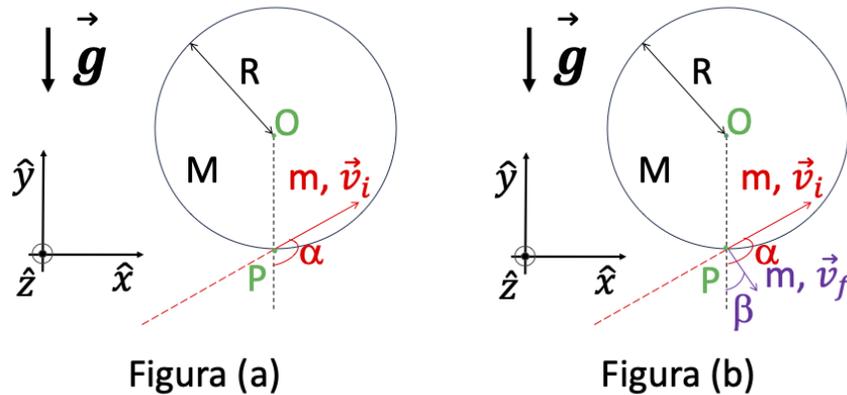
$$R = \dots\dots\dots$$

**Nota Bene:** assumere per i calcoli

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , carica del protone  $q_p = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

# Soluzione Esercizio 1

## Domanda 1.1



(Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo)

Nell'urto non si conserva la quantità di moto (non potendosi trascurare gli impulsi delle reazioni vincolari dell'asse), ma, avendo le reazioni vincolari momento nullo rispetto a un polo in  $O$ , il relativo momento angolare rimarrà costante (l'impulso delle forze peso può senz'altro essere trascurato non essendo il peso una forza impulsiva). Pertanto si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Non si conserva l'energia poichè l'urto è dichiarato essere anelastico (perfettamente anelastico).

Dalla conservazione del momento angolare rispetto a tale polo, indicando con  $\vec{L}_i$  e  $\vec{L}_f$  rispettivamente i momenti angolari iniziale e finale rispetto a tale polo si ottiene:

$$\vec{L}_i = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_i = \vec{L}_f = I \vec{\omega}_{pin}$$

dove, con riferimento alla Figura a, con  $\vec{OP}$  abbiamo indicato un vettore che punta dal punto  $O$  al punto  $P$ , un istante prima dell'urto e con  $I$  si è indicato il momento di inerzia rispetto all'asse del disco del sistema disco-pallina:

$$I = \frac{MR^2}{2} + mR^2 \Rightarrow mRv_i \sin\alpha \hat{z} = I \vec{\omega}_{pin}$$

Per cui uguagliando i moduli del momento angolare iniziale e finale rispetto all'asse di rotazione si ottiene:

$$mRv_i \sin\alpha = I \omega_{pin} \Rightarrow \omega_{pin} = \frac{2mv_i \sin\alpha}{R(M+2m)} = 20.62 \text{ rad/s}$$

## Domanda 1.2

Il lavoro complessivo,  $L$  dal teorema delle forze vive, è pari alla variazione di energia cinetica del sistema  $\Delta T$  e in questo caso coincide con il lavoro fatto dalle forze interne  $\mathcal{L}$ , ovvero:

$$L = \mathcal{L} = \frac{1}{2} I \omega_{pin}^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{(M+2m)R^2}{4} \omega_{pin}^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -24.10 \text{ J}$$

Il lavoro complessivo  $L$  è infatti dato dalla somma dei lavori delle forze esterne ( gravità e reazione vincolare) e delle forze interne. Il lavoro fatto dalla gravità è pari alla differenza tra l'energia potenziale gravitazionale iniziale e quella finale del sistema (disco e punto materiale)  $-\Delta U_p$  che è nulla, poichè la posizione del centro di massa del sistema non cambia. Anche il lavoro fatto dalla reazione vincolare è nullo, poichè tale forza è applicata a un punto fisso,  $O$ , le uniche altre forze che restano sono forze interne al sistema.

## Domanda 1.3

Valgono le stesse leggi di conservazione della domanda 1.1 Con riferimento alla Figura b, Indicando con  $I_c$  il momento di inerzia del disco rispetto all'asse del disco (pari a  $\frac{MR^2}{2}$ ) e applicando di nuovo il principio di conservazione del momento angolare rispetto al polo in  $O$ , si ha:

$$\vec{L}_i = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_i = \vec{L}_f = I_c \vec{\omega}_{in} + \vec{OP} \wedge m \vec{v}_f \Rightarrow \vec{\omega}_{in} = \frac{1}{I_c} \left( \vec{OP} \wedge m \vec{v}_i - \vec{OP} \wedge m \vec{v}_f \right) = \frac{1}{I_c} (mRv_i \sin\alpha - mRv_f \sin\beta) \hat{z}$$

Per cui:

$$\vec{\omega}_{in} = \omega_{inz} \hat{z} = \frac{Rm v_i}{I_c} \left( \sin\alpha - \frac{\sin\beta}{2} \right) \hat{z} \Rightarrow |\vec{\omega}_{in}| = \frac{2m v_i}{MR} \left| \sin\alpha - \frac{\sin\beta}{2} \right| = 15.40 \text{ rad/s}$$

## Soluzione Esercizio 2

### Domanda 2.1

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale  $E_r$  e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro,  $r$ , essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$ , per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di  $\pi$  attorno a un piano ortogonale all'asse  $z$ , per cui in coordinate cilindriche  $\vec{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$ . Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse  $z$ ) con centro sull'asse del cilindro di altezza  $h$  e raggio  $r$ , applicando la legge di Gauss, e considerando che al flusso, poichè il campo elettrico è radiale, contribuisce solo il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro otteniamo:

$$\phi(\vec{E}) = E_r(r)2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

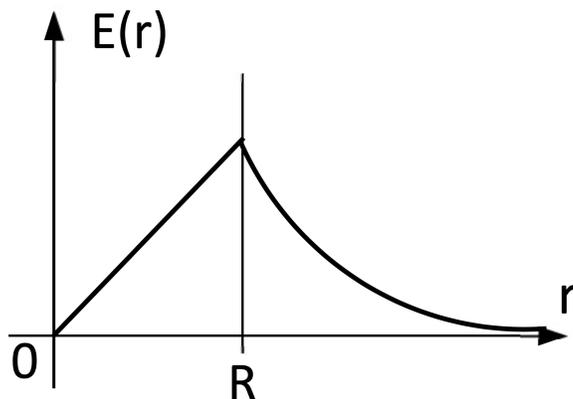
dove  $Q_{int}$  è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} nq_p\pi r^2 h & 0 < r < R \\ nq_p\pi R^2 h & R \leq r \end{cases}$$

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\vec{E} = E_r(r)\hat{r}, \text{ dove } E_r(r) = \begin{cases} \frac{q_p n}{2\epsilon_0} r & 0 \leq r < R \\ \frac{q_p n}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Il grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse  $r$  è riportato nella figura successiva.



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

### Domanda 2.2

Dal valore noto del modulo del campo elettrico per  $r = r_A$ ,  $E(r_A)$ , si ottiene:

$$E(r_A) = \frac{q_p n}{2\epsilon_0} r_A \Rightarrow n = E(r_A) \frac{2\epsilon_0}{q_p r_A} = 66.4 \times 10^6 m^{-3}$$

### Domanda 2.3

Il raggio  $R$  si ricava dalla relazione:

$$E(r_B) = \frac{E(r_A)}{3} \Rightarrow \frac{E(r_A)}{E(r_B)} = \frac{\frac{q_p n}{2\epsilon_0} r_A}{\frac{q_p n}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r_B}} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{r_A r_B}{3}} = 5.77 \times 10^{-2} m$$