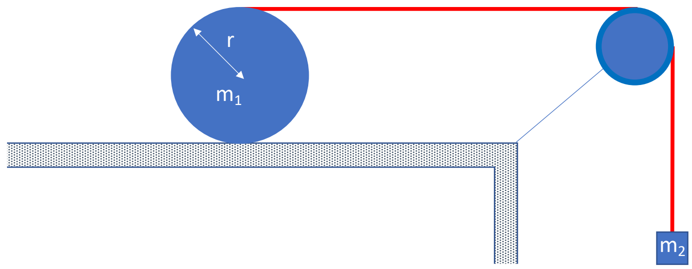
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 8/06/2022

Nome: | **Matricola:**

Cognome: | **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Una corda inestensibile e priva di massa è avvolta attorno ad un cilindro di massa m_1= 250 g e raggio r =10 cm appoggiato su un piano orizzontale (vedi figura). La corda passa da una carrucola priva di massa e priva di attrito ed è collegata all'altra estremità ad un corpo di massa m_2=375 g assimilabile a un punto materiale. La massa m_2 viene lasciata libera di cadere, partendo da ferma, sotto l'azione della forza di gravità. Nell'ipotesi in cui il moto del cilindro è di puro rotolamento:

1 Determinare il modulo dello spostamento $|\vec{d}_1|$ del CM del cilindro m_1 se la massa m_2 scende di un tratto d_2=25 cm

$|\vec{d}_1|$= ....

2 Determinare il modulo della velocità $|\vec{v}_2|$ di m_2 dopo essere scesa del tratto d_2

$|\vec{v}_2|$= ....

3. Determinare il modulo dell'accelerazione $|\vec{a}_2|$ di m_2 e il modulo della tensione $|\vec{T}|$ della corda

$|\vec{a}_2|$= .... $|\vec{T}|$ = ...

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo
Un cilindro ideale di lunghezza infinita e raggio $R = 1\ cm$ è costituito da un materiale omogeneo isolante. Il cilindro è immerso nel vuoto e al suo interno ha una distribuzione volumetrica di carica che dipende dalla distanza r dall'asse del cilindro (asse z della figura) con $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$ e $\rho_0 = 1.2 \times 10^{-3}\ C/m^3$.

1 Scrivere l'espressione del vettore campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio in coordinate cilindriche. Determinare l'espressione del modulo del campo elettrico E in funzione della distanza r dall'asse del cilindro e fare un grafico qualitativo di E in funzione di r.

$\overrightarrow{E}$= .... E = ...

2 Calcolare la differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B)$ esistente fra i punti A e B (vedi figura) di coordinate cartesiane **A**=(2R,0,0), **B**=(3R,0,R)

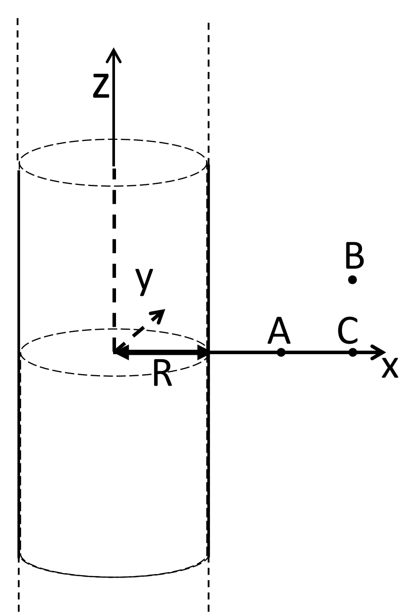
ΔV= ....

Supponiamo ora che la densità di carica (di conseguenza il materiale isolante) è in moto rettilineo uniforme con velocità $v_z = 1 \times 10^6\ m/s$, dove l'asse z coincide con l'asse del cilindro (vedi Figura):

3. Determinare il vettore campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in coordinate cartesiane nel punto A

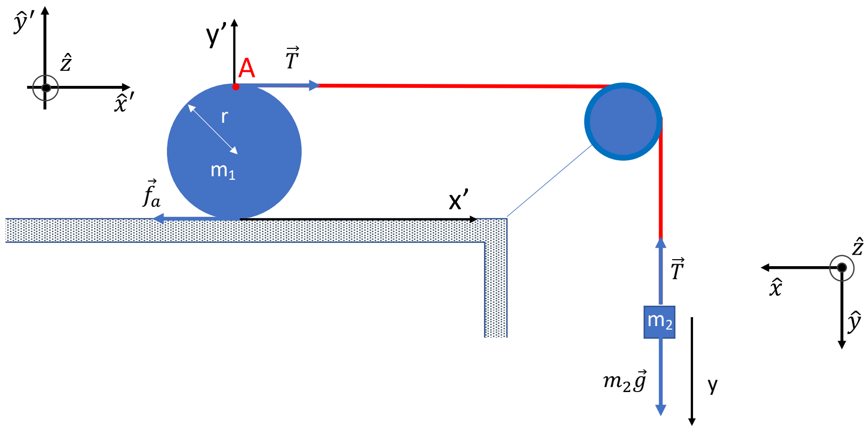
$\overrightarrow{B}$= ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A\ = 1.26 \times 10^{-6}\ Tm/A$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Poichè il cilindro si muove di moto di puro rotolamento il punto A del cilindro ha una velocità pari al doppio della velocità del CM del cilindro. Inoltre la velocità del punto A del cilindro corrisponde alla velocità di m_2. Pertanto se m_2 scende di d_2, il CM di m_1 si sposta di $d_2/2 = 0.125\ m$.

Domanda.2
Nella discesa si conserva l'energia del sistema essendo nullo il lavoro risultante compiuto dalle forze non conservative. Infatti, la forza di attrito statico nel moto di puro rotolamento non compie lavoro, la reazione del piano è ortogonale allo spostamento e non compie lavoro sul sistema, la tensione essendo la corda ideale (inestensibile) fornisce un lavoro complessivamente nullo sul sistema. Quindi nella discesa si conserva l'energia. Pertanto, indicando per il sistema rispettivamente con k_i e k_f l'energia cinetica iniziale e finale e con U_i e U_f l'energia potenziale iniziale e finale vale:

$$k_f - k_i = U_i - U_f$$

Poichè la quota di m_1 non cambia $U_i - U_f$ è la variazione di energia potenziale di m_2 per cui $U_i - U_f = m_2 g d_2$. L'energia cinetica iniziale del sistema è nulla mentre l'energia cinetica finale è data da:

$$k_f = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

dove abbiamo usato il teorema di *König* per esprimere l'energia cinetica di m_1 e $I = \frac{m_2 r^2}{2}$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo CM. Essendo il moto di puro rotolamento $v_1 = \omega_1 r$ con ω_1 pari al modulo della velocità angolare attorno al punto di contatto del cilindro, inoltre vale (vedi risposta Domanda 1) $v_1 = \frac{1}{2}v_2$. Esprimendo l'energia cinetica finale funzione di v_2 otteniamo:

$$k_f = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{v_2^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\frac{v_2^2}{4r^2} = \frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{8} + \frac{m_1}{4}\right) = \frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{3}{8}m_1\right)$$

Applicando la conservazione dell'energia determiniamo quindi v_2:

$$\frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{3}{8}m_1\right) = m_2 g d_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m_2 g d_2}{(m_2 + \frac{3}{8}m_1)}} = 1.98\ \frac{m}{s}$$

Domanda.3
Possiamo utilizzare due metodi per rispondere alla domanda 3. Il primo metodo sfrutta la I e la seconda cardinale del corpo 1 e la prima cardinale del corpo 2 . Con riferimento alla figura per la scelta degli assi e dove abbiamo indicato per semplicità solo

le forze che hanno componenti non nulle nelle equazioni utilizzate, poichè dalla condizione di puro rotolamento e dalla risposta alla domanda 1 valgono le seguenti relazioni:

$$a_{1x'} = a_1 = -\alpha_{1z} r = \alpha_1 r \quad v_{1x'} = v_1 = \frac{1}{2} v_{2y} = \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2} a_{2y} = \frac{1}{2} a_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1z} = -\frac{a_2}{2r}$$

per il corpo 1, considerando la proiezione lungo x' della I cardinale e dalla seconda cardinale, otteniamo:

$$\begin{cases} T - f_a = m_1 a_{1x'} = \frac{1}{2} m_1 a_2 \\ -rT - r f_a = I \alpha_{1z} = -I \frac{a_2}{2r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - f_a = \frac{1}{2} m_1 a_2 \\ T + f_a = \frac{m_1 r^2}{2} \frac{a_2}{2r^2} = \frac{1}{4} m_1 a_2 \end{cases} \Rightarrow 2T = m_1 a_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{8} m_1 a_2$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato le due equazioni del sistema. Consideriamo per il corpo 2 la proiezione lungo y della I cardinale, sostituendo l'espressione di T in funzione di a_2 ottenuta in precedenza otteniamo:

$$m_2 g - T = m_2 a_2 = m_2 g - \frac{3}{8} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{3}{8} m_1} = 7.85 \ \frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{8} m_1 a_2 = \frac{m_1 m_2 g}{\left(\frac{8}{3} m_2 + m_1 \right)} = 0.74 \ N$$

Il secondo metodo sfrutta la conservazione dell'energia e la proiezione della prima cardinale lungo y (vedi figura) del corpo 2. Assumendo l'origine dell'energia potenziale in y=0, l'energia E del sistema quando m_2 è a una quota y nel moto di discesa ha la seguente espressione:

$$E = m_2 g \left(costante - y \right) + \frac{v_2^2}{2} \left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)$$

Dove per l'energia cinetica abbiamo utilizzato l'espressione ottenuta per essa in funzione di v_2 nella risposta alla domanda 2. Poichè l'energia si conserva:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = -m_2 g \dot{y} + \frac{2}{2} v_2 \dot{v}_2 \left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)$$

Poichè $\dot{y} = v_2$, otteniamo:

$$0 = -m_2 g v_2 + \frac{2}{2} v_2 \dot{v}_2 \left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right) \quad \Rightarrow \quad - m_2 g + \frac{2}{2} \dot{v}_2 \left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_2 = a_2 = \frac{m_2 g}{\left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)} = 7.85 \ \frac{m}{s^2}$$

Per il corpo 2 utilizziamo la proiezione della prima cardinale lungo y (vedi figura) del corpo 2 per ottenere il modulo della tensione:

$$T = m_2 \left(g - a_2 \right) = 0.74 \ N$$

Note

Nelle nostre ipotesi abbiamo assunto che la forza di attrito fosse diretta come in figura. Dalla proiezione della I cardinale lungo x' si può verificare se la nostra ipotesi è giusta o se dobbiamo cambiare verso alla forza di attrito:

$$T - f_a = \frac{1}{2} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad f_a = T - \frac{1}{2} m_1 a_2 = -2.45 \times 10^{-1} \ N$$

Per cui la forza di attrito ha verso opposto a quello indicato nella figura.
Per il calcolo della velocità della Domanda 2 avremmo potuto anche potuto rispondere prima alla Domanda 3, determinando a_2. Osservando che a_2 è costante, dalle condizioni iniziali si ottiene:

$$v_2 = \sqrt{2 a_2 d_2} = \sqrt{\frac{2 m_2 g d_2}{\left(m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)}}$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale E_r e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro, r, essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse z, per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di π attorno al piano xy, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse z) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r, applicando la legge di Gauss, otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove Q_{int} è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

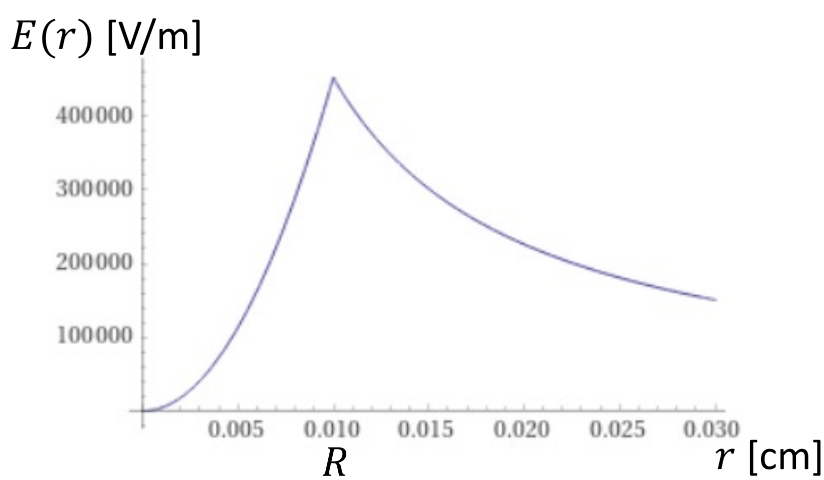
$$Q_{int} = \begin{cases} \int_0^r \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{R} 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h\frac{r^3}{3R} & 0 \le r \le R \\ \int_0^R \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^R \rho_0 \frac{r'}{R} 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h\frac{R^3}{3R} = 2\pi\rho_0 h\frac{R^2}{3} & R \le r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r'hdr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\mathrm{E}_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 R} & 0 \le r \le R \\ \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0 r} & r \ge R \end{cases}$$

Essendo $\rho_0 > 0$ $E_r(r) = E(r)$. Il campo $E(r)$ è quadratico in r per $r < R$ e scende come $\frac{1}{r}$ per $r > R$. Il grafico di $E(r)$ in funzione di r è mostrato nella figura seguente:



(*Grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse*)

Domanda 2

Noto il campo elettrico fuori del cilindro, scegliamo come percorso di integrazione il percorso ACB, in coordinate cartesiane, tenendo conto che $E_z(r)$ è nullo:

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_C^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dx} + \int_C^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dz}$$

$$= \int_A^C E_x dx = \int_{2R}^{3R} \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0 x} dx = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} ln\frac{3}{2} = 1.83 \times 10^3 \ V$$

Si può anche fare direttamente l'integrale da A a C dicendo che il campo elettrico non ha componenti lungo z, oppure dicendo che poichè il campo elettrico è radiale le superfici equipotenziali sono dei cilindri coassiali al cilindro in esame di conseguenza

$V(B) = V(C)$ o anche fare, in base all'ultima asserzione, direttamente l'integrale in coordinate cilindriche.

Domanda 3

Nel caso in cui la densità di carica ρ è in moto, ad essa è associata una densità di corrente $\overrightarrow{J}(r) = \rho(r)v_z\hat{z} = \rho_0 \frac{r}{R} v_z \hat{z}$ Il problema ha simmetria cilindrica (la simmetria del filo indefinito), dunque le linee del campo di induzione magnetica sono circonferenze che giacciono su piani ortogonali all'asse z con centro sull'asse z. Poichè la densità di carica in moto è positiva, la corrente associata è nello stesso verso della velocità e quindi, per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse z come indicato in figura.

Il vettore campo magnetico nel caso in cui $r = 2R$ si ottiene applicando il Teorema di Ampere a una linea di campo circolare di raggio $r \geq R$ percorsa nel verso indicato ed esprimendo il campo magnetico in coordinate cilindriche come $\overrightarrow{B} = (0, B_T, 0)$:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_T 2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove I_{conc} è la corrente concatenata con la linea circolare.

Per $r \geq R$ la corrente concatenata è data da:

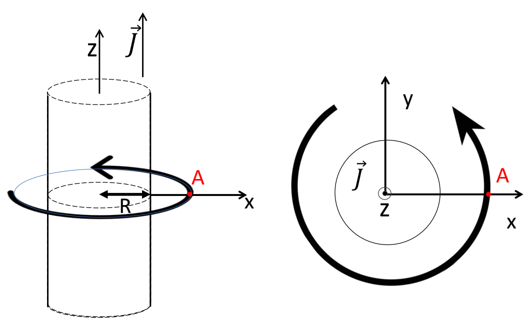
$$I_{conc} = \int \overrightarrow{J} \cdot \hat{z} dS = \int_0^R \rho_0 \frac{r}{R} v_z 2\pi r dr = \frac{\rho_0}{R} v_z 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 v_z R^2$$

Per cui il campo magnetico per $r \geq R$ la seguente espressione in funzione di r:

$$B_T(r) = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R^2}{3r} \quad \Rightarrow \quad B_T(2R) = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R}{6} = 2.51 \times 10^{-6}\ T$$

Tenuto conto del verso di percorrenza delle linee di campo, il campo magnetico ha la seguente espressione in coordinate cartesiane nel punto A=(2R,0,0) :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R}{6} \hat{y}$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)