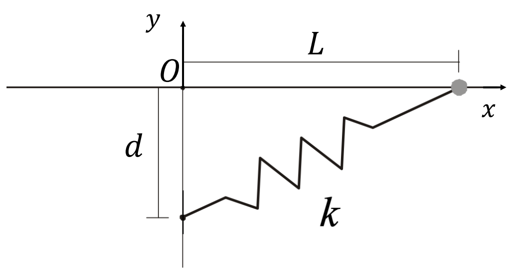
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 20/07/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una perlina assimilabile a un punto materiale (pm) di massa $m = 50\ g$ può muoversi su una guida rettilinea orizzontale. La guida è scabra e il coefficiente di attrito dinamico tra perlina e guida vale $\mu_d = 0.18$. La perlina è collegata a uno dei due estremi di una molla. L'altro estremo della molla è fissato su un asse ortogonale al piano formato dalla guida e dalla molla, a distanza $d = 20\ cm$ dalla guida. La molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili, ha una costante elastica di richiamo $k = 1\ N/m$.
Inizialmente la perlina è tenuta ferma a distanza $L = 40\ cm$ dal punto O della guida. A un certo istante la perlina viene lasciata libera di muoversi.
Si determini:

1 il valore della distanza d_{pO} del pm da O per il quale l'accelerazione del pm si annulla per la prima volta dopo il rilascio

d_{pO}= ....

2 il tempo t^* impiegato dal pm per raggiungere il punto O, una volta lasciato libero

t^*= ....

3 il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_{s-min} affinchè il pm si fermi una volta raggiunto il primo punto di inversione del moto

μ_{s-min} = ...

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Due anelli, costituiti da un materiale dielettrico omogeneo di raggio $R = 1\ cm$, sono disposti come in figura. I due anelli sono coassiali, con asse diretto lungo l'asse x e i rispettivi centri hanno coordinate $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$ con $a = 2\ cm$. Su di essi è distribuita una densità lineare di carica uniforme $\lambda = 100\ pC/m$.

1 Ricavare l'espressione del potenziale elettrico $V(x, 0, 0)$ generato dai due anelli in ogni punto dell'asse x, per $(-\infty \leq x \leq \infty; y = 0; z = 0)$

$$V(x, 0, 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2 Ricavare l'espressione del vettore campo elettrico $\vec{E}$ generato dai due anelli in ogni punto dell'asse x, per $(-\infty \leq x \leq \infty; y = 0; z = 0)$

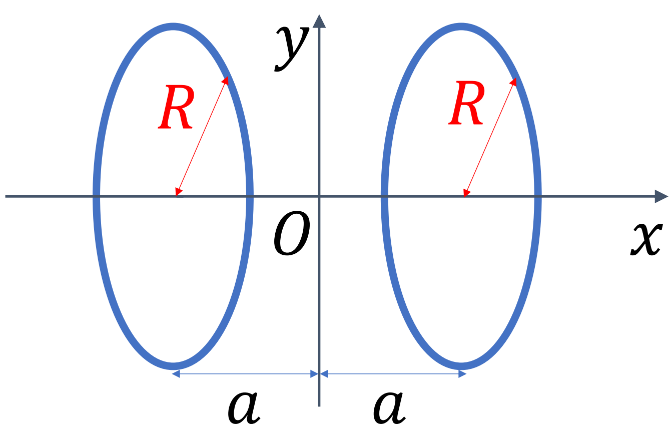
$$\vec{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Un protone di massa $m_p = 1.67 \times 10^{-24}\ g$, carica $q = 1.6 \times 10^{-19} C$, viene rilasciato nel punto P di coordinate $(2a, 0, 0)$ con una velocità $\vec{v} = -v\hat{x}$

3 Determinare la velocità minima v_{min} che deve essere impartita al protone all'atto del rilascio per arrivare nel punto di coordinate $(x = a, 0, 0)$ motivando la risposta (trascurare la gravità)

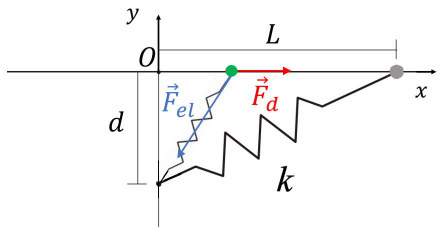
$$v_{min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Indichiamo con $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}_N$,$\overrightarrow{F}_d$ e $\overrightarrow{F}_{el}$ rispettivamente la forza peso, la reazione normale della guida, la forza di attrito dinamico e la forza elastica e scegliendo un sistema di riferimento con origine in O gli assi x e y coincidenti rispettivamente con la guida orizzontale e l'asse verticale (verso l'alto) come in figura. La seconda equazione della dinamica per il moto fino al tempo t' al quale il pm arriva al punto di inversione del moto (in cui forza di attrito cambia verso) è data da:

$$\left\{ \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}_d + \overrightarrow{F}_{el} = m\overrightarrow{a} = 0 \right. \quad \text{proiettando lungo x e lungo y otteniamo:}$$

$$\begin{cases} x: & F_d - kx = m\ddot{x} \\ y: & -mg - kd + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_d - kx = m\ddot{x} \\ R_N = mg + kd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_d = \mu_d R_N = \mu_d(mg+kd) \\ \mu_d R_N - kx = m\ddot{x} = \mu_d(mg+kd) - kx \end{cases}$$

Nella figura sono mostrate per semplicità solo la direzione e il verso delle forza elastica e di attrito dinamico nel moto successivo all'istante iniziale, prima di raggiungere il punto di inversione del moto, dove si inverte il verso della forza di attrito dinamico.

La coordinata x_0 del pm per cui l'accelerazione si annulla nel moto di andata è data da:

$$m\ddot{x} = 0 = \mu_d(mg+kd) - kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\mu_d}{k}(mg+kd) = 0.12\ m$$

Essendo $x_0 > 0$ essa coincide con la distanza da O del pm per cui:

$$x_0 = d_{pO} = 0.12\ m$$

Domanda.2
Dalla conoscenza dell'equazione del moto e dalle condizioni iniziali possiamo determinare il tempo impiegato dal pm a raggiungere l'origine una volta lasciato libero di muoversi. L' equazione del moto del pm è quella di un oscillatore armonico, che per il moto fino al tempo t' al quale il pm arriva al punto di inversione del moto (in cui forza di attrito cambia verso) è data da:

$$\ddot{x} - \frac{\mu_d}{m}(mg+kd) + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu_d}{k}(mg+kd)\right) = \ddot{x} + \omega^2(x - x_0) = 0$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Infatti ponendo $x - x_0 = x'$, l'equazione può essere riscritta come:

$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0$$

La cui soluzione è $x'(t) = Acos(\omega t + \phi)$. Dalle condizioni iniziali (a) $x'(0) = L - x_0 = Acos\phi$ e (b) $\dot{x}'(0) = \dot{x}(0) = -\omega Asin\phi = 0$, si ricavano ϕ ed A. Dalla condizione (b) $\phi = 0$ e dalla condizione (a) si ottiene $L - x_0 = Acos0$ per cui $A = L - x_0$. L'equazione oraria è quindi:

$$x'(t) = (L - x_0)\,cos\omega t \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + (L - x_0)\,cos\omega t$$

Per cui il tempo t^* necessario a raggiungere l'origine O si ottiene imponendo $x(t^*) = 0$:

$$x(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{\omega}arcos\left(\frac{x_0}{x_0 - L}\right) = 4.56 \times 10^{-1}\ s$$

Domanda.3
La posizione del punto di inversione del moto si ottiene ricavando l'istante di tempo t' (successivo a $t = 0$, istante in cui il pm

viene lasciato libero) corrispondente all'inversione del moto e sostituendolo nella legge oraria. La velocità del pm si annulla negli istanti t_i tali che:

$$\dot{x}(t_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(L - x_0)\,\omega sin\omega t_i = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = \frac{i\pi}{\omega}$$

$i = 0$ corrisponde al tempo del rilascio ($t = 0$) di conseguenza t_1 corrisponde tempo necessario per raggiungere il punto di inversione del moto, e sostituendolo nell'equazione oraria si ottiene:

$$t' = \frac{\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x(t') = x_0 + (L - x_0)\,cos\omega t' = 2x_0 - L$$

Oppure, semplicemente osservando che il sistema oscilla tra $x_0 + (L - x_0)$ e $x_0 - (L - x_0)$, il primo punto di inversione del moto si ha per $x(t') = 2x_0 - L$ e corrisponde a $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.
Il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinchè il pm si fermi nel primo punto di inversione del moto si ottiene imponendo che nel punto di inversione il corpo resti fermo con accelerazione nulla e sfruttando il valore massimo del modulo della forza di attrito statico nel punto di inversione del moto.
Nel punto di inversione del moto, un istante successivo a $t' = \frac{\pi}{\omega}$ la forza di attrito statico ha direzione e verso di $-\hat{x}$, e la seconda equazione della dinamica fornisce :

$$\begin{cases} x: & -k\,(2x_0 - L) - F_s = m\ddot{x}|_{x=2x_0-L} = 0 \\ y: & -mg - kd + R_N = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -k\,(2x_0 - L) - F_s = 0 \\ R_N = mg + kd \end{cases}$$

Da queste equazioni otteniamo:

$$-k\,(2x_0 - L) = F_s \leq \mu_s R_N = \mu_s\,(mg + kd) \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{k\,(L - 2x_0)}{mg + kd} = 0.22$$

Per cui:

$$\mu_{s-min} = 0.22$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

Il contributo al potenziale generato da un elemento di un'anello di lunghezza dl e raggio R lungo l'asse x, con l'anello posizionato come in figura, è dato in generale da:

$$dV(x, y=0, z=0) = k_e \frac{dq}{d} = k_e \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2+x^2}} = k_e \frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e d è la distanza dal centro di dl del punto P di coordinate $(x, 0, 0)$. Per cui, il potenziale dovuto a un anello uniformemente carico di raggio R è dato nel punto P da:

$$V(x, y=0, z=0) = V(x) = \int_0^{2\pi} dV = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il potenziale che vogliamo determinare è la somma del potenziale generato da ciascun anello. Tenuto conto del sistema di riferimento indicato nella domanda, indicando con la sottoscritta 1 e 2 rispettivamente l'anello con centro nel punto di coordinate (-a,0,0) e quello con centro in (a,0,0):

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(x+a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2+(x-a)^2}}\right]$$

Domanda 2

La distribuzione di carica è invariante per rotazioni attorno all'asse degli anelli (asse x) di conseguenza il campo elettrico lungo l'asse degli anelli ha solo componente x, per cui lungo l'asse x, $\overrightarrow{E} = E_x\hat{x}$. Dalla relazione $\overrightarrow{E} = -\nabla V$ si ottiene:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\frac{2(x+a)}{\left(R^2+(x+a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{2(x-a)}{\left(R^2+(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{(x+a)}{\left(R^2+(x+a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-a)}{\left(R^2+(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Oppure (strada più lunga...) avremmo potuto utilizzare l'espressione generale del campo elettrico generato da un anello (o meglio ricavarla) e applicando il principio di sovrapposizione e utilizzando il sistema indicato ottenere la stessa espressione per il campo elettrico risultante, sia in coodinate cartesiane che cilindriche.

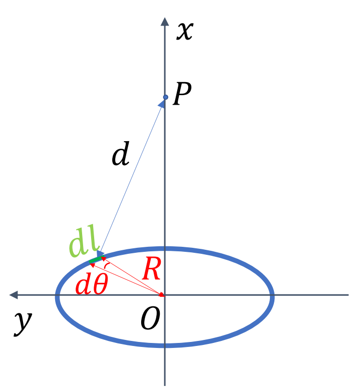
Domanda 3

Dalla risposta alla Domanda 2 il campo elettrico è tale che per $x \geq a$ $E_x > 0$ e quindi la forza elettrostatica agente sul protone rallenta (decelera) sempre il protone di conseguenza lungo il percorso la velocità del protone diminuisce. La velocità minima v_{min} che è necessario impartire al protone è pertanto quella che gli permette di arrivare nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$ con velocità nulla. Nel sistema considerato non sono presenti forze non conservative per cui l'energia meccanica si conserva. Per la conservazione dell'energia vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}m_p v_{min}^2 + qV(2a) = qV(a) \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{\frac{2q}{m_p}\left(V(a) - V(2a)\right)}$$

Dall'espressione di $V(x)$ della Domanda 1 otteniamo:

$$V(a) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+4a^2}} + \frac{1}{R}\right] = 7.02\ V \quad V(2a) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+9a^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right] = 3.46\ V \quad \Rightarrow \quad v_{min} = 2.61 \times 10^4\ m/s$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)