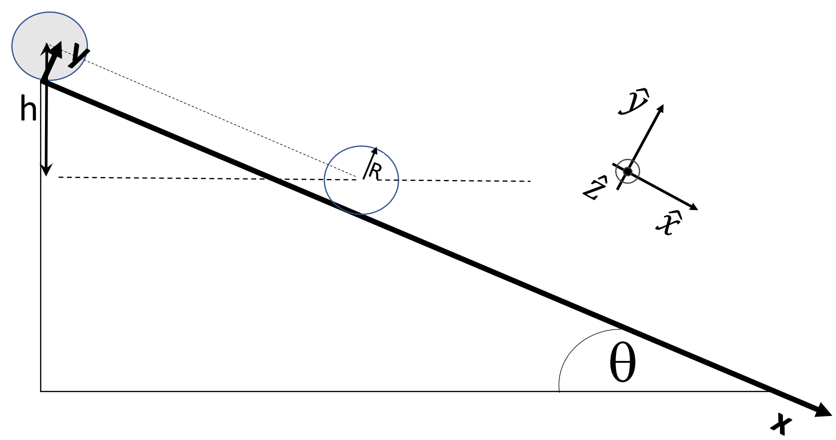
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 14/09/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Un cilindro pieno omogeneo ed indeformabile di massa $M = 2\ kg$ e raggio $R = 5\ cm$ e un cilindro cavo con la stessa massa M e lo stesso raggio R possono rotolare su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^o$ rispetto all'orizzontale.

1.1 Calcolare il modulo dell'accelerazione del centro di massa (cm) di ciascun cilindro nell'ipotesi di puro rotolamento, (indicando con a_{p-cm} l' accelerazione del cm del cilindro pieno e con a_{v-cm} quella del cilindro vuoto)

a_{p-cm}= .... a_{v-cm} = ...

I due cilindri vengono lasciati partire da fermi sul piano inclinato, sempre nell'ipotesi di moto di puro rotolamento:

1.2 calcolare il modulo della velocità dei centri di massa dei due cilindri (indicando con v_{p-cm} la velocità del cm del cilindro pieno e con v_{v-cm} quella del cilindro vuoto) quando i loro centri di massa sono scesi di una quota $h = 20\ cm$ rispetto alla posizione iniziale

v_{p-cm}= .... v_{v-cm} = ...

Se il coefficiente di attrito statico tra il piano inclinato e i cilindri è $\mu_s = 0.2$:

1.3 determinare, giustificando la risposta, se sono verificate le condizioni di puro rotolamento per ciascuno dei due cilindri

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla fig.a, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, viaggia con velocità in modulo pari a v lungo l'asse x, nel verso delle x positive. Nel semispazio $x > 0$ è presente un campo magnetico costante ed uniforme diretto lungo l'asse z con $\overrightarrow{B} = B_0 \hat{z}$ con $B_0 = -6\ mT$. Nel piano x=0 è posto uno schermo di spessore infinitesimo con un forellino A di dimensioni trascurabili in $z = y = 0$ attraverso cui entra il protone, ed un secondo forellino E di coordinate $(0, 5\ cm, 0)$.

2.1 Determinare il modulo della velocità v per cui il protone esce dalla regione di campo magnetico passando dal forellino B

v= ....

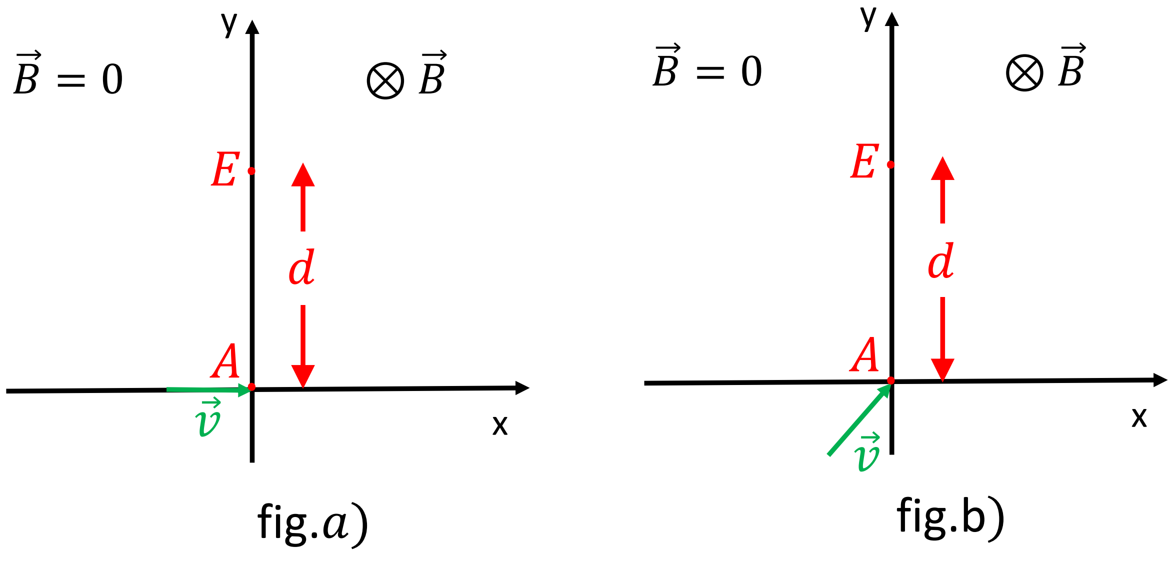
2.2 Determinare quanto tempo (t_{1-2}) impiega il protone ad andare dal primo al secondo forellino

t_{1-2}= ....

Con riferimento alla fig.b, se il protone, invece che lungo l'asse x, si muove inizialmente con velocità v' lungo la retta di equazione $y = x$ entrando dal forellino A:

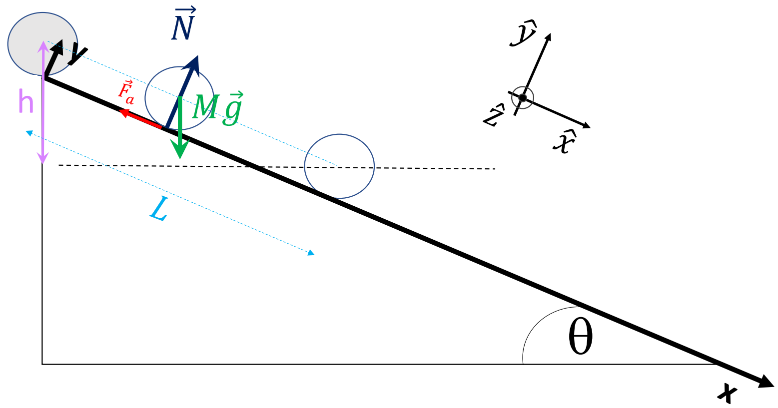
2.3 determinare il modulo della velocità v' affinchè il protone esca dalla regione di campo magnetico dal forellino E

v'= ....



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 1.1
Con riferimento alla figura, il momento delle forze agenti su un corpo di massa M, in questo caso cilindro o sfera di raggio R, che rotola con polo nel punto di contatto è dato da

$$\vec{\tau_c} = I_c \vec{\alpha} = -MgRsin\theta\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = -\frac{MgRsin\theta}{I_c}\hat{z}$$

dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare e I_c è il momento di inerzia del corpo che rotola rispetto al punto di contatto.
Indichiamo con I_{c-cm} il momento di inerzia del generico cilindro rispetto al centro di massa. Usando il teorema di Steiner per il cilindro pieno otteniamo:

$$I_c = I_{c-cm} + MR^2 \Rightarrow I_p = I_{p-cm} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

dove con $I_{p-cm} = \frac{MR^2}{2}$ abbiamo indicato il momento di inerzia del cilindro pieno rispetto all'asse del cilindro. Mentre per il cilindro vuoto:

$$I_c = I_{c-cm} + MR^2 \Rightarrow I_v = I_{v-cm} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

dove con $I_{v-cm} = MR^2$ abbiamo indicato il momento di inerzia del cilindro vuoto rispetto all'asse del cilindro.
Poichè il moto è di puro rotolamento, per un corpo che rotola, nel sistema di riferimento indicato, in generale otteniamo per l'accelerazione $\vec{a} = a_x\hat{x}$ con $a_x = a = -\alpha_z R = \frac{MgRsin\theta R}{I_c}$ Questa relazione ci permette di determinare l'accelerazione del cm per il cilindro pieno:

$$a \Rightarrow a_{p-cm} = \frac{Mgsin\theta R^2}{I_p} = \frac{Mgsin\theta R^2}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}gsin\theta = 3.27\ m/s^2$$

Mentre per il cilindro vuoto otteniamo:

$$a \Rightarrow a_{v-cm} = \frac{Mgsin\theta R^2}{I_v} = \frac{Mgsin\theta R^2}{2MR^2} = \frac{1}{2}gsin\theta = 2.45\ m/s^2$$

Domanda 1.2
Nel moto si conserva l'energia meccanica in quanto l'unica forza che compie lavoro è la forza di gravità essendo nullo il lavoro compiuto dalla reazione del piano (la reazione è ortogonale allo spostamento) e dalla forza di attrito statico (il punto di contatto è istantaneamente fermo). Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{c-cm}\omega^2$$

dove abbiamo indicato in generale per il corpo che rotola con v_{cm} la velocità del cm, con I_{c-cm} il momento di inerzia rispetto al cm del corpo e con ω il modulo della velocità angolare ed infine abbiamo applicato il teorema di K*ö*n*ig* dell'energia.
Per il moto di puro rotolamento in generale vale:

$$|\vec{v}_{cm}| = |\vec{\omega}|\, R = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

Per cui in generale sostituendo l'espressione di ω in funzione di v_{cm} nell'equazione della conservazione dell'energia otteniamo:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2\left(1+\frac{I_{c-cm}^2}{MR^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}}$$

Per cui per il cilindro pieno e il cilindro vuoto otteniamo rispettivamente:

$$v_{p-cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{p-cm}}{MR^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 1.62\ m/s \qquad v_{v-cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{v-cm}}{MR^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh} = 1.4\ m/s$$

Si ottengono gli stessi risultati se si considera che il moto per entrambi i cilindri è uniformemente accelerato con le accelerazioni ricavate nella domanda 1.1 e la distanza percorsa dal cm dei cilindri è $L = \frac{h}{sin\theta}$.

Domanda 1.3

Nell'ipotesi di puro rotolamento le forze che agiscono sui cilindri sono la forza peso $M\overrightarrow{g}$, la reazione normale del piano, $\overrightarrow{N}$ e la forza di attrito statico tra cilindro e piano, $\overrightarrow{F}_s$. La prima equazione cardinale della dinamica proiettata lungo la direzione perpendicolare al piano inclinato (y) e nella direzione del moto (x) dà, per il generico cilindro, come risultato le due equazioni:

$$\begin{cases} x: Mgsin\theta + F_{sx} = Ma = \frac{MgR^2sin\theta}{I_c} = \frac{MgR^2sin\theta}{MR^2+I_{c-cm}} = \frac{Mgsin\theta}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \\ y: N - Mgcos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{sx} = Mgsin\theta\left(\frac{1}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} - 1\right) = -Mgsin\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \\ N = Mgcos\theta \end{cases}$$

la condizione $|\overrightarrow{F}_s| = Mgsin\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \leq \mu_s N$ impone che:

$$\mu_s \geq tg\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}$$

Per cui per il cilindro cavo:

$$\mu_s \geq \frac{1}{2}tg\theta = 0.289$$

di conseguenza il moto non è di puro rotolamento per il valore di μ_s assegnato (0.2). Per il cilindro pieno, il moto è di puro rotolamento essendo

$$\mu_s \geq \frac{1}{3}tg\theta = 0.192$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 2.1

Con riferimento alla fig.c, il protone nella zona in cui è presente il campo magnetico percorre una traiettoria circolare sul piano xy con moto circolare uniforme poichè il campo magnetico ha modulo direzione e verso costanti

Il moto si svolge nel piano xy poichè la forza magnetica ($\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) è ortogonale a $\vec{B}$. La velocità del protone nella regione di campo magnetico è costante in modulo perchè in ogni punto della traiettoria nella regione di campo magnetico la forza magnetica è ortogonale alla velocità. Infatti dal teorema delle forze vive, per una qualunque coppia di punti, i e f, della traiettoria del protone vale:

$$\frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \int_{l_i}^{l_f} \vec{F}_m \bullet d\vec{l} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_m \bullet \vec{v}\,dt = 0$$

dove nell'ultimo passaggio l'integrale è nullo essendo $\vec{F}_m \perp$ a $\vec{v}$. Per cui il modulo della velocità è costante. Di conseguenza il modulo dell'accelerazione a è costante essendo in ogni punto della traiettoria $|\vec{a}| = |\frac{qvB}{m}|$. Quindi, come affermato, poichè il modulo della velocità è costante, l'accelerazione in modulo è costante e ortogonale alla velocità in ogni punto della traiettoria, la traiettoria è circolare, il moto è circolare uniforme ed è nel piano xy.
Dal fatto che il moto è circolare uniforme:

$$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad -m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N = -qvB\hat{u}_N \quad \Rightarrow \quad m\frac{v}{R} = qB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qBR}{m}$$

Dove abbiamo indicato con u_N il versore normale alla traiettoria. Se il protone entra dal forellino A di coordinate $(0,0,0)$ ed esce dal forellino E di coordinate $(0,d,0)$ percorrendo una traiettoria circolare di raggio R, $d = 2R$. Di conseguenza

$$v = \frac{qBd}{2m} = 14.4 \times 10^3 \ m/s$$

Domanda 2.2

Il protone percorre la semicirconferenza in fig.c a velocità costante in modulo, per cui vale:

$$t_{1-2} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi d}{2v} = 5.47 \times 10^{-6} \ s$$

Domanda 2.3

Con riferimento alla fig.d, la retta $y = x$ corrisponde ad un angolo di ingresso del protone di 45^0. Per le stesse considerazioni di prima, la traiettoria è sempre circolare, ma (vedi fig.d) la relazione che lega il raggio a d è

$$R'cos(45^0) = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

quindi:

$$v' = \frac{qBR'}{m} = \frac{qB\sqrt{2}d}{2m} = \sqrt{2}v = 20.3 \times 10^3 \ m/s$$

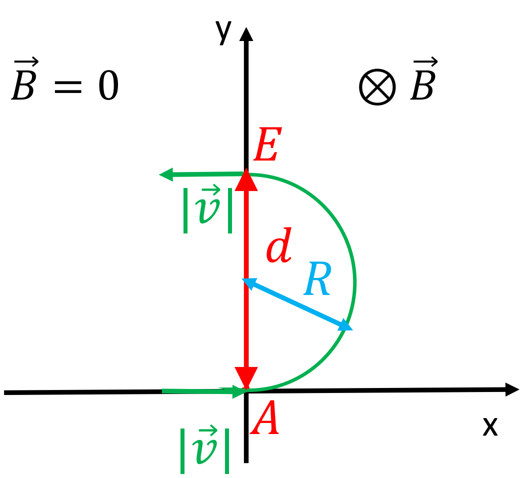


fig.c)

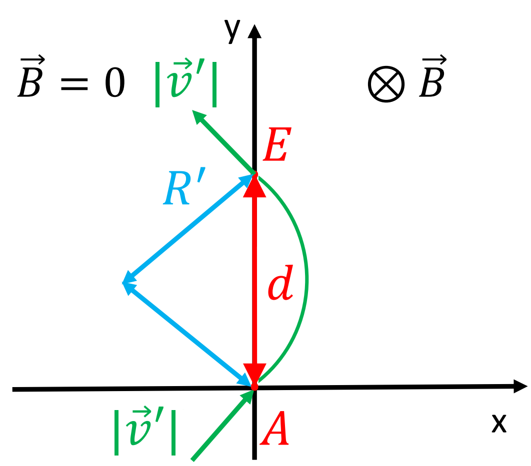


fig.d)

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)