Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 28/01/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – **Meccanica**
Un'asta rigida sottile ed omogenea, di lunghezza $l =$ 1.2 m e massa $M =$ 8.0 Kg, è incernierata in O ed è libera di ruotare attorno ad un'asse orizzontale passante per O. L'asta è inizialmente nella posizione di equilibrio. Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa m = 2.5 kg viene lasciato cadere da fermo lungo un piano inclinato scabro di angolo $\alpha =$ 30^o. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu_d =$ 0.30. Dopo essere disceso di un'altezza $h =$ 50 cm, il corpo urta l'estremità inferiore dell'asta. Con riferimento alla figura:

1.a Determinare con che velocità v il corpo colpisce l'asta e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza di attrito nella discesa del corpo

$v =$ .... $\mathcal{L} =$ ....

1.b Determinare con che velocità v il corpo colpisce l'asta e l'energia dissipata E_{Diss} nella discesa del corpo

$v =$ .... $E_{Diss} =$ ....

2.a Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare la velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ della sbarretta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$\overrightarrow{\omega}=$ ....

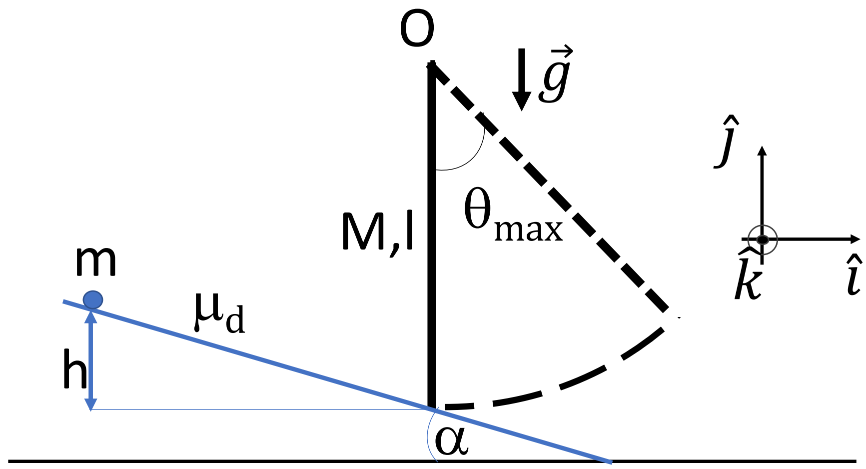
2.b Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare il momento angolare $\overrightarrow{L}$ dell'asta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$\overrightarrow{L}=$ ....

3.a Calcolare il massimo angolo in radianti, θ_{max}, formato dall'asta con la verticale nel moto seguente.

$\theta_{max}=$ ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2



($\textit{Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo}$)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Un circuito piano rettangolare di area $S = 10\ cm^2$, è formato da una resistenza $R = 1\ M\Omega$ collegata in serie ad un condensatore a facce piane e parallele distanti $d = 2\ mm$ e con capacità $C = 1\ nF$. All'interno del volume occupato dal circuito al tempo $t = 0$ viene generato un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ uniforme diretto lungo l'asse z (vedi figura), perpendicolare al piano del circuito, e variabile in funzione del tempo, che per $t \geq 0$ ha la seguente espressione:

$$\overrightarrow{B} = \left(B_0 \frac{t}{t_0} \right) \hat{k}$$

con $t_0 = 1\ s$ e $B_0 = 0.05\ T$.

1.a Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$. Nel caso in cui la corrente non è nulla, determinare il suo verso motivando la risposta e con un disegno.

$\phi_B(t) =$ .... $I(t) =$ ....

1.b Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore (B) del condensatore (vedi figura) in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$.

$\phi_B(t) =$ .... $Q(t) =$ ....

2.a Fare un grafico della corrente $I(t)$ in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$, riportando sul grafico il valore massimo, I_{max} e a quale istante t^* esso viene raggiunto, e la corrente finale per $t \to \infty$, $I(\infty)$

$I_{max} =$ .... $t^* =$ .... $I(\infty) =$ ....

2.b Fare un grafico della carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore (B), per $t \in [-\infty, \infty]$, riportando sul grafico il valore massimo Q_{max} e a quale istante $t^{'}$ esso viene raggiunto, e la carica iniziale $Q(0)$ per $t = 0$

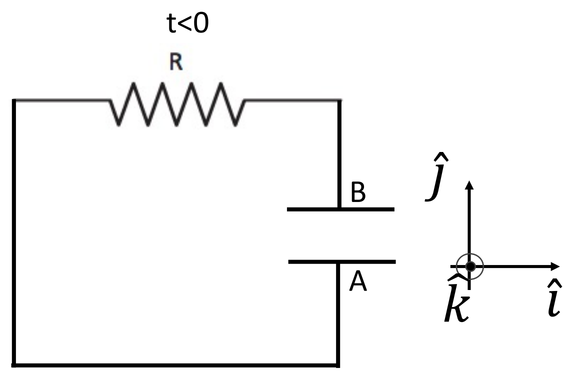
$Q_{max} =$ .... $t^{'} =$ .... $Q(0) =$ ....

3.a Determinare l'energia dissipata nella resistenza E^R_{diss} tra $t = 0$ e $t = \infty$

$E^R_{diss} =$ ....

3.b Determinare il campo elettrico $\overrightarrow{E}(\infty)$ all'interno del condensatore per $t \to \infty$

$\overrightarrow{E}(\infty) =$ ....



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 28/01/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – **Meccanica**

Un'asta rigida sottile ed omogenea, di lunghezza $l =$ 1.2 m e massa $M =$ 8.0 Kg, è incernierata in O ed è libera di ruotare attorno ad un'asse orizzontale passante per O. L'asta è inizialmente nella posizione di equilibrio. Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa m = 2.5 kg viene lasciato cadere da fermo lungo un piano inclinato scabro di angolo $\alpha =$ 30^o. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu_d =$ 0.30. Dopo essere disceso di un'altezza $h =$ 50 cm, il corpo urta l'estremità inferiore dell'asta. Con riferimento alla figura:

1.a Determinare con che velocità v il corpo colpisce l'asta e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza di attrito nella discesa del corpo

$$v = 2.17\ m/s \qquad \mathcal{L} = -6.37\ J$$

1.b Determinare con che velocità v il corpo colpisce l'asta e l'energia dissipata E_{Diss} nella discesa del corpo

$$v = 2.17\ m/s \qquad E_{Diss} = 6.37\ J$$

2.a Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare la velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ della sbarretta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$$\overrightarrow{\omega} = 1.47\hat{k}\ rad/s \qquad \text{l'urto è anelastico perchè } E_F - E_I = -1.75\ J \text{ è } < 0$$

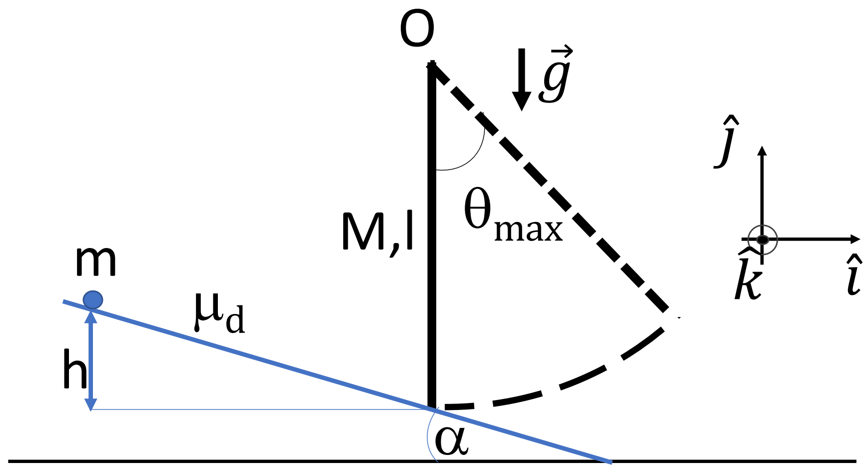
2.b Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare il momento angolare $\overrightarrow{L}$ dell'asta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$$\overrightarrow{L} = 5.64\hat{k}\ kgm^2/s \qquad \text{l'urto è anelastico perchè } E_F - E_I = -1.75\ J \text{ è } < 0$$

3.a Calcolare il massimo angolo in radianti, θ_{max}, formato dall'asta con la verticale nel moto seguente.

$$\theta_{max} = 0.423\ rad$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – **Elettromagnetismo**
Un circuito piano rettangolare di area $S = 10\ cm^2$, è formato da una resistenza $R = 1\ M\Omega$ collegata in serie ad un condensatore a facce piane e parallele distanti $d = 2\ mm$ e con capacità $C = 1\ nF$.
All'interno del volume occupato dal circuito al tempo $t = 0$ viene generato un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ uniforme diretto lungo l'asse z (vedi figura), perpendicolare al piano del circuito, e variabile in funzione del tempo, che per $t \geq 0$ ha la seguente espressione:

$$\overrightarrow{B} = \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) \hat{k}$$

con $t_0 = 1\ s$ e $B_0 = 0.05\ T$.

1.a Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$. Nel caso in cui la corrente non è nulla, determinare il suo verso motivando la risposta e con un disegno.

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S = 5 \times 10^{-5} t\ Wb & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{I(t)=} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 \times 10^{-11} e^{-\frac{t}{0.001}}\ A \quad \textit{verso orario} & t \geq 0 \end{cases}$$

1.b Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore (B) del condensatore (vedi figura) in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$.

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S = 5 \times 10^{-5} t\ Wb & t \geq 0 \end{cases} \quad Q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 \times 10^{-14} \left(1 - e^{\frac{t}{0.001}}\right)\ C & t \geq 0 \end{cases}$$

2.a Fare un grafico della corrente $I(t)$ in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$, riportando sul grafico il valore massimo, I_{max} e a quale istante t^* esso viene raggiunto, e la corrente finale per $t \to \infty$, $I(\infty)$

$$I_{max} = \ 5 \times 10^{-11}\ A \quad per\ t^* = \ 0\ s \qquad I(\infty) = 0\ A$$

2.b Fare un grafico della carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore (B), per $t \in [-\infty, -\infty]$, riportando sul grafico il valore massimo Q_{max} e a quale istante $t^{'}$ esso viene raggiunto, e la carica iniziale $Q(0)$ per $t = 0$

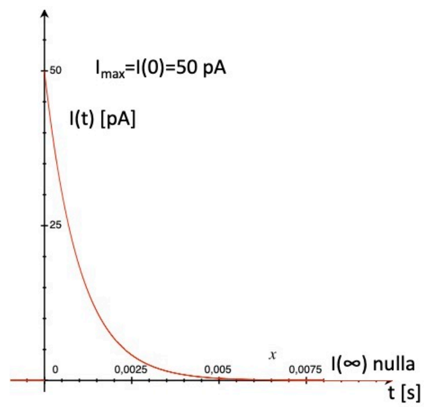
$$Q_{max} = \ 5 \times 10^{-14}\ C \quad t^{'} \to \infty \qquad Q(0) = \ 0\ C$$

3.a Determinare l'energia dissipata nella resistenza E^R_{diss} tra $t = 0$ e $t = \infty$

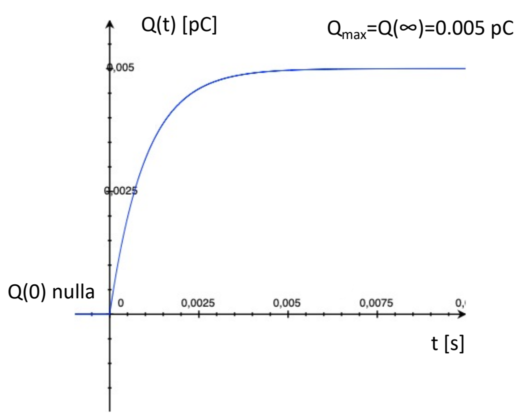
$$E^R_{diss} = \ 1.25 \times 10^{-18}\ J$$

3.b Determinare il campo elettrico $\overrightarrow{E}(\infty)$ all'interno del condensatore per $t \to \infty$

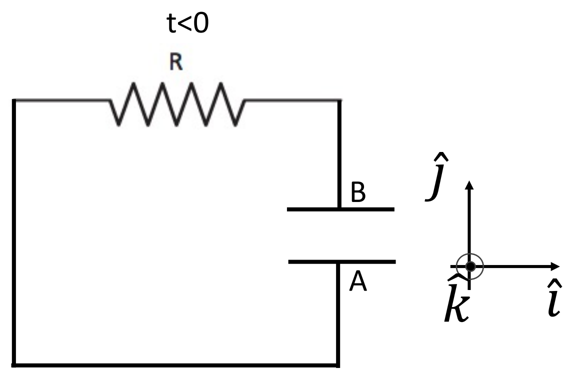
$$\overrightarrow{E}(\infty) = \ -2.5 \times 10^{-2} \hat{y}\ \frac{V}{m}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

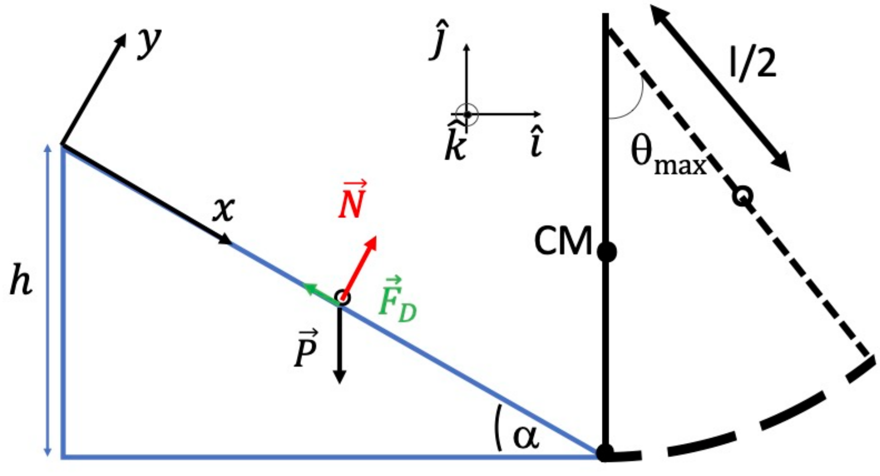


(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Con riferimento alla figura, le forze agenti sul corpo sono la forza peso ($\overrightarrow{P}$) la forza di attrito ($\overrightarrow{F}_a$) e la reazione del piano ($\overrightarrow{N}$). Scomponendo il moto del corpo nella direzione parallela (x) e perpendicolare (y) al piano otteniamo:

$$\begin{cases} Ma_x = Psin\alpha - F_a \\ Ma_y = N - Pcos\alpha \end{cases}$$

con $P = Mg$, $F_a = \mu_d N$, $N = Pcos\alpha$. Dalle relazioni trovate possiamo determinare a_x che è costante:

$$a_x = g\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)$$

Di conseguenza il moto è uniformente accelerato lungo x.
Nella discesa di un tratto h il corpo percorre un tratto di lunghezza $L_h = \frac{h}{sin\alpha}$ e applicando le fomule per il moto uniformemente accelerato e considerando che il corpo parte da fermo abbiamo che:

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = L_h \qquad v = a_x t \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2a_x L_h}$$

dove con t abbiamo indicato il tempo impiegato a scendere di un tratto h.
Dal teorema dell'energia cinetica, poichè il corpo parte da fermo e le uniche forze in gioco che compiono lavoro sono la forza peso (conservativa, C) e la forza di attrito (non conservativa, NC) possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{NC} = U_i - U_f + \mathcal{L}_{NC} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{NC} = \frac{1}{2}mv^2 + U_f - U_i$$

dove abbiamo indicato con $\mathcal{L}_C$ il lavoro fatto dalla forza di gravità che corrisponde alla differenza tra l'energia gravitazionale potenziale iniziale (U_i) e finale (U_f) , e con $\mathcal{L}_{NC}$ il lavoro fatto dalla forza di attrito Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(2a_x L_h\right) = ma_x\frac{h}{sin\alpha} = mg\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)\frac{h}{sin\alpha}$$

e assumendo l'origine dell'energia potenziale ad es. nel punto dell'urto vale:

$$U_f - U_i = -mgh \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = mg\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)\frac{h}{sin\alpha} - mgh = -\mu_d mgcos\alpha\frac{h}{sin\alpha}$$

L'altro modo per calcolare $\mathcal{L}$ consiste nel calcolare direttamente il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto di discesa:

$$\mathcal{L} = \int \overrightarrow{F}_a \cdot \overrightarrow{dl} = -\mu_d mgcos\alpha \int_0^{L_h} dx = -\mu_d mgcos\alpha L_h = -\mu_d mgcos\alpha\frac{h}{sin\alpha}$$

L'energia dissipata nella discesa è data dalla differenza tra l'energia iniziale e quella finale del corpo, $E_i - E_f$, dove:

$$E_i = mgh \quad E_f = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_{Diss} = -\mathcal{L}$$

Domanda.2

Assumendo come polo per il calcolo dei momenti il punto O, poichè non ci sono forze impulsive a braccio non nullo, il momento delle forze rispetto a tale polo è nullo nella brevissima durata dell'urto e il momento angolare con polo in O si conserva nell'urto. Per cui il momento angolare un'istante prima dell'urto ($\overrightarrow{L}_i$) è uguale al momento angolare un istante dopo l'urto ($\overrightarrow{L}_f$). Utilizzando la terna di versori indicata in figura per il calcolo dei momenti otteniamo:

$$\overrightarrow{L}_i = mvlsin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f = mvlcos\alpha\hat{k} = I_O\overrightarrow{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\omega} = \frac{\overrightarrow{L}_i}{I_O}$$

dove I_O è il momento di inerzia dell'asta rispetto a O e vale:

$$I_O = \frac{Ml^2}{3}$$

Dalle relazioni trovate per la velocità angolare si ottiene:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{3mvcos\alpha}{Ml}\hat{k}$$

L'urto è elastico se l'energia si conserva, altrimenti è anelastico con l'energia del sistema un istante dopo l'urto E_F minore di quella un istante prima dell'urto E_I.

Nel nostro caso vanno quindi confrontate E_I e E_F per stabilire se l'urto è elastico o anelastico

$$E_I = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_F = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

dove quando l'asta è in posizione verticale la sua energia potenziale è $Mg\frac{l}{2}\left(1 - cos(0)\right) = 0$, come pure è nulla l'energia potenziale del punto materiale.

Domanda.3

Dopo l'urto l'energia dell'asta si conserva. Indicando con Δd la variazione di quota del centro di massa dell'asta, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mg\Delta d \qquad \Rightarrow \qquad \Delta d = \frac{I_O\omega^2}{2Mg}$$

Inoltre con riferimento alla figura possiamo determinare θ_{max} :

$$\Delta d = \frac{l}{2}\left(1 - cos\theta_{max}\right) \qquad \Rightarrow \qquad cos\theta_{max} = \left(\frac{l}{2} - \Delta d\right)/\frac{l}{2} = 1 - \frac{2\Delta d}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{max} = acos(\theta_{max})$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

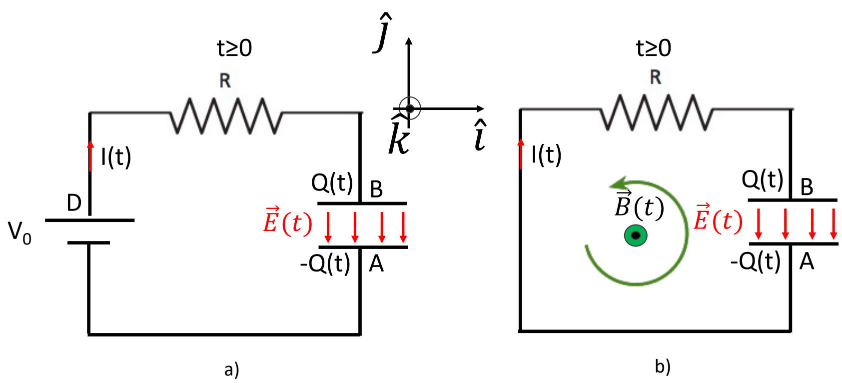
Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito è nullo per $t < 0$ mentre per $t \geq 0$, orientando la normale alla superficie piana racchiusa dal circuito come $\hat{z}$, $\phi_B(t) = \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S$.
Per cui:

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S & t \geq 0 \end{cases}$$

Per determinare la corrente che scorre nel circuito dobbiamo prima calcolare la forza elettromotrice $\varepsilon(t)$ indotta nel circuito. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lentz al flusso determinato nella Domanda 1 otteniamo:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\left(\frac{B_0 S}{t_0}\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

Per cui per $t \geq 0$ il circuito è un RC serie con una forza elettromotrice costante e pari in modulo a $\left(\frac{B_0 S}{t_0}\right) = V_0$, che fa circolare la corrente indotta, in rosso nella figura a), in senso orario (in verso contrario al verso scelto come positivo per la convenzione sulla normale della Domanda 1). Di conseguenza l'armatura superiore (B) si carica positivamente. Il circuito con specificata la corrente indotta e il suo verso (in rosso) e le polarità della fem indotta che fa circolare la corrente indotta nel verso indicato è mostrato in figura a).



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Oppure, con riferimento alla figura b) scegliendo per la circuitazione del campo elettrico il percorso chiuso e orientato $A - B - A$ in accordo con la scelta della normale della Domanda 1, possiamo scrivere, tenuto conto che il verso scelto come positivo della corrente è quello indicato in verde (antiorario), dalla legge di Faraday-Neumann-Lentz :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = V_A - V_B + V_B - V_A = -\frac{Q}{C} - IR \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{Q}{C} + IR$$

Per cui la carica sull'armatura positiva del condensatore (B) è data dalle ben nota formula per la carica di un condensatore:

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con $\tau = RC$. La corrente è data anch'essa dalla ben nota formula:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{dQ}{dt}$$

Domanda 2
Dall'espressione di $Q(t)$, la carica finale del condensatore sull'armatura superiore (B) per $t \longrightarrow \infty$, che corrisponde alla carica massima , è data da:

$$Q(\infty) = Q_{max} = CV_0$$

mentre per $t \leq 0$ la carica è nulla e $Q(0) = 0$.
Dall'espressione di $I(t)$, la corrente che scorre nel circuito è nulla per $t < 0$, è massima all'istante iniziale $t = 0$, con $I_{max} = I(0) = \frac{V_0}{R}$ e tende a $I(\infty) = 0$ per $t \longrightarrow \infty$. I grafici della carica sull'armatura in (B) del condensatore e della corrente sono riportati rispettivamente nelle figure della soluzione con i risultati numerici.
Domanda 3
L'energia dissipata nella resistenza per $t \longrightarrow \infty$ si ottiene integrando la potenza dissipata nella resistenza tra $t = 0$ e $t = \infty$:

$$E^R_{diss} = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{V_0^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} |_0^\infty \right) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q_{max} V_0$$

Con riferimento alla figura, poichè l'armatura che si carica positivamente è quella superiore (B) il campo elettrico ha direzione e verso di $-\hat{y}$. Inoltre vale per $t \geq 0$ $V_B - V_A = \frac{Q}{C} = \int_B^A \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -E_y d$, per cui per $t \longrightarrow \infty$, essendo la carica sul condensatore pari a $Q_{max} = CV_0$, si ottiene:

$$E_y = -\frac{V_0}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{y}$$

Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y per cui $\overrightarrow{E} = E_y \hat{y}$.