Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/02/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – **Meccanica**

Con riferimento alla figura, ad un'estremo di un' asta omogenea di massa M_A è attaccato un anello omogeneo di massa M_B con $M_B = 0,2\ kg = \frac{1}{5}M_A$. L'asta è lunga $L = 1\ m$ e il raggio dell'anello è $R = \frac{L}{4}$. Il sistema asta-anello è libero di muoversi su un piano orizzontale liscio.
Un punto materiale di massa $m = 2M_B$ urta anelasticamente il sistema asta-anello con una velocità $v_m = 1\ \frac{m}{s}$ e a una distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa dell'asta, restando ad esso attaccato.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche del sistema si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- Energia, E
- quantità di moto, $\overrightarrow{P}$
- momento angolare e rispetto a quale polo (o poli nel caso ve ne sia più di uno), $\overrightarrow{L}^o$

2.a Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'anello $I_{CM_{F_{Anello}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a z) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = ... \qquad I_{CM_{F_{Anello}}} = ...$$

2.b Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'asta $I_{CM_{F_{Asta}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a z) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = ... \qquad I_{CM_{F_{Asta}}} = ...$$

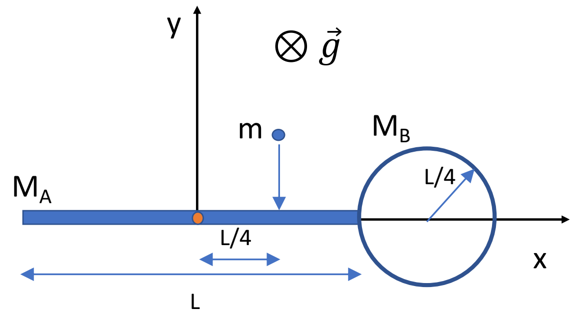
3.a Calcolare il valore della velocità del centro di massa $\overrightarrow{v}_{CM}$ e l'energia rotazionale E_R del sistema entrambe subito dopo l'urto.

$$\overrightarrow{v}_{CM} = ... \qquad E_R = ...$$

3.b Calcolare il valore della velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ del sistema subito dopo l'urto e l'energia meccanica E_{Diss} dissipata nell'urto anelastico.

$$\overrightarrow{\omega} = ... \qquad E_{Diss} = ...$$

Nota Bene: *si consiglia, per calcolare* $\overrightarrow{CM}_F$ *di esprimere le masse in funzione della massa* M_B *dell'anello.*



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un guscio cilindrico infinito, di raggio interno $R_1 = 10\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 2R_1$ ha una densità di carica $\rho = \frac{K}{r}$ con $K = -0.5\ \frac{\mu C}{m^2}$.
All'interno del guscio è presente un filo metallico carico, anch'esso infinito, con densità di carica lineare $\lambda = 1\ \frac{\mu C}{m}$ e raggio interno $a = 1\ cm$ (la sezione del filo non è mostrata in figura).

1.a Determinare l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0)$ in funzione di r_0 con $a < r_0 < R_1$

$$\Delta V_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.b Determinare l'espressione della differenza di potenziale , $\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1)$ in funzione di r_1 con $R_1 < r_1 < R_2$

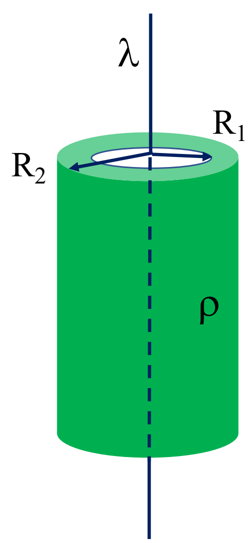
$$\Delta V_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.a Determinare il valore di K massimo, K_{max} affinchè un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, non penetri all'interno del guscio

$$K_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.b Calcolare la velocità v_f con la quale un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico raggiunge la superficie interna del guscio dopo averlo attraversato

$$v_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/02/2022

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, ad un'estremo di un' asta omogenea di massa M_A è attaccato un anello omogeneo di massa M_B con $M_B = 0,2\ kg = \frac{1}{5} M_A$. L'asta è lunga $L = 1\ m$ e il raggio dell'anello è $R = \frac{L}{4}$. Il sistema asta-anello è libero di muoversi su un piano orizzontale liscio.

Un punto materiale di massa $m = 2M_B$ urta anelasticamente il sistema asta-anello con una velocità $v_m = 1\ \frac{m}{s}$ e a una distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa dell'asta, restando ad esso attaccato.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche del sistema si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- ∘ Energia, E
- ∘ quantità di moto, $\vec{P}$
- ∘ momento angolare e rispetto a quale polo (o poli nel caso ve ne sia più di uno), $\vec{L}^o$

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).

2.a Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'anello $I_{CM_{F_{Anello}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a z) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \quad (0.156,0,0\ )\ m \qquad\qquad I_{CM_{F_{Anello}}} = \quad 8.3\times10^{-2}\ kgm^2$$

2.b Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'asta $I_{CM_{F_{Asta}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a z) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \quad (0.156,0,0\ )\ m \qquad\qquad I_{CM_{F_{Asta}}} = \quad 1.08\times10^{-1}\ kgm^2$$

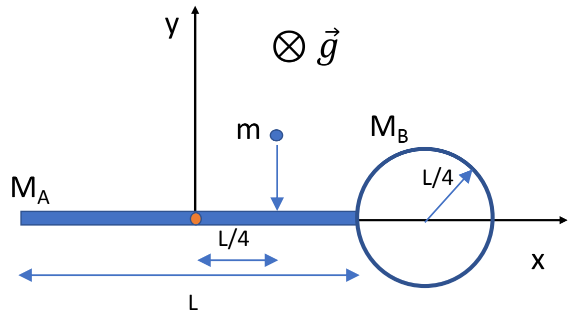
3.a Calcolare il valore della velocità del centro di massa $\vec{v}_{CM}$ e l'energia rotazionale E_R del sistema entrambe subito dopo l'urto.

$$\vec{v}_{CM} = \quad (0,\text{-}0.25,0)\ ms^{-1} \qquad\qquad E_R = \quad 0.0036\ J$$

3.b Calcolare il valore della velocità angolare $\vec{\omega}$ del sistema subito dopo l'urto e l'energia meccanica E_{Diss} dissipata nell'urto anelastico.

$$\vec{\omega} = \quad (0,0,\text{-}0.193)\ rads^{-1} \qquad\qquad E_{Diss} = \quad 0.1464\ J$$

Nota Bene: *si consiglia, per calcolare $\overrightarrow{CM}_F$ di esprimere le masse in funzione della massa M_B dell'anello.*



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un guscio cilindrico infinito, di raggio interno $R_1 = 10\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 2R_1$ ha una densità di carica $\rho = \frac{K}{r}$ con $K = -0.5\ \frac{\mu C}{m^2}$.

All'interno del guscio è presente un filo metallico carico, anch'esso infinito, con densità di carica lineare $\lambda = 1\ \frac{\mu C}{m}$ e raggio interno $a = 1\ cm$ (la sezione del filo non è mostrata in figura).

1.a Determinare l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio

$$\overrightarrow{E} = E_r \hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \le r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r-R_1)}{r} & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(R_2-R_1)}{r} & R_2 \le r \end{cases}$$

2.a Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0)$ in funzione di r_0 con $a < r_0 < R_1$

$$\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{R_1}{R_2}$$

2.b Determinare l'espressione della differenza di potenziale , $\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1)$ in funzione di r_1 con $R_1 < r_1 < R_2$

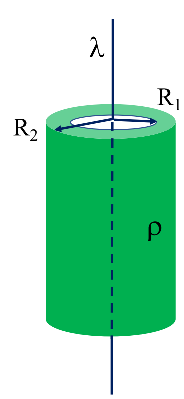
$$\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(r_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{r_1}{R_2}$$

3.a Determinare il valore di K massimo, K_{max} affinchè un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, non penetri all'interno del guscio

$$K_{max} = \text{-1.59} \times 10^{-6}\ Cm^{-2}$$

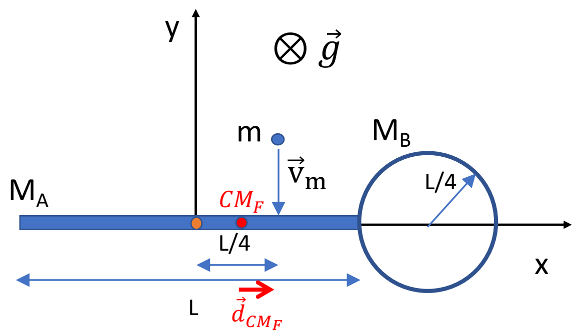
3.b Calcolare la velocità v_f con la quale un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico raggiunge la superficie interna del guscio dopo averlo attraversato

$$v_f = 6.14 \times 10^{7}\ ms^{-1}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Nell'urto, l'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).
Domanda.2
Dopo l'urto il centro di massa del sistema avrà componenti:

$$CM_{F_x} = \frac{m\frac{L}{4} + M_B\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)}{M_A + M_B + m} = \frac{M_B\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)}{8M_B} = \frac{5}{32}L \quad CM_{F_y} = 0 \quad CM_{F_z} = 0$$

Il valore del momento di inerzia del sistema dopo l'urto rispetto a un asse verticale passante per il centro di massa calcolato sopra si ottiene applicando il teorema di Steiner:

$$I_{CM_F} = I_{CM_{F_{Asta}}} + I_{CM_{F_{Anello}}} + I_{CM_{F_m}}$$

Dove i tre termini dopo l'uguaglianza corrispondono rispettivamente ai momenti di inerzia calcolati rispetto alla posizione del centro di massa dopo l'urto di asta, anello e massa m, le cui espressioni sono date da:

$$I_{CM_{F_{Asta}}} = M_A\frac{L^2}{12} + M_A CM_{F_x}^2 = 5M_B\frac{L^2}{12} + 5M_B\left(\frac{5}{32}L\right)^2 = \frac{1655}{3072}M_BL^2$$

$$I_{CM_{F_{Anello}}} = M_B\frac{L^2}{16} + M_B\left(\frac{3}{4}L - CM_{F_x}\right)^2 = M_BL^2\left[\frac{1}{16} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{32}\right)^2\right] = M_BL^2\frac{425}{1024}$$

$$I_{CM_{F_m}} = m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)^2 = 2M_BL^2\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{32}\right)^2 = 2M_BL^2\left(\frac{9}{1024}\right)$$

Per cui:

$$I_{CM_F} = \frac{2984}{3072}M_BL^2 = 0.971M_BL^2$$

Domanda.3
Dalla Conservazione della quantità di moto:

$$m\vec{v}_m = (M_A + M_B + m)\,\vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \frac{m}{(M_A + M_B + m)}\vec{v}_m = \frac{1}{4}\vec{v}_m$$

Poichè $\vec{v}_m = -v_m\hat{y}$ per la velocità del centro di massa otteniamo:

$$\vec{v}_{CM} = \left(0, -\frac{1}{4}v_m, 0\right)$$

Poichè la risultante delle forze esterne sul sistema è nulla, dopo l'urto il CM si muoverà con velocità costante sul piano, con valore dato dall'espressione sopra. Dalla conservazione del momento angolare, prendendo come polo il CM subito dopo l'urto ($\overrightarrow{CM}_F$) per i dati del problema (vedi figura):

$$\vec{L}_i = \vec{d}_{CM_F} \bigwedge (m\vec{v}_m)$$

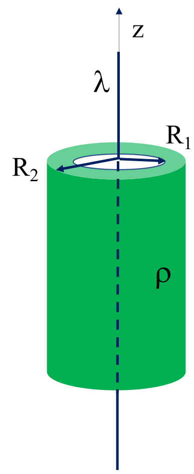
con $\overrightarrow{d}_{CM_F} = \left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)\hat{x}$. Per cui:

$$\overrightarrow{L}_i = -m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)v_m\hat{z} = \overrightarrow{L}_f = I_{CM_F}\overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\omega} = -m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)\frac{v_m}{I_{CM_F}}\hat{z} = -\frac{72}{373}\frac{v_m}{L}\hat{z}$$

$$E_R = \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = 0.018M_Bv_m^2$$

$$E_{Diss} = T_i - T_f = \frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{1}{2}M_{TOT}v_{CM}^2 - \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = \frac{1}{2}2M_Bv_m^2 - \frac{1}{2}8M_Bv_{CM}^2 - \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = 0.732M_Bv_m^2$$

Soluzione Esercizio 2



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 1

Il filo è metallico per cui il campo elettrico è ortogonale alla superficie del cilindro associato al filo e per il teorema di Gauss, al suo interno, essendo la carica nulla, il campo elettrico è nullo. La distribuzione di carica è invariante per rotazioni attorno all'asse del cilindro (asse$z$ della figura, per traslazioni lungo l'asse del cilindro e per riflessioni rispetto a un piano ortogonale all'asse del cilindro. Di conseguenza il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale con $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r}$. Possiamo usare il Teorema di Gauss per calcolare E_r. A tale scopo consideriamo un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse z) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r. Applicando il teorema di Gauss otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove Q_{int} è la carica interna al cilindro di Gauss ed abbiamo considerato solo il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro, essendo nulli i contributi al flusso dalle basi superiore e inferiore del cilindro, dove $\overrightarrow{E}$ e la normale alla superficie sono ortogonali. La carica interna al cilindro di Gauss in esame è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \lambda h & a < r < R_1 \\ \lambda h + \int_{R_1}^{r} \rho(r')2\pi r' h dr' = \lambda h + \int_{R_1}^{r} \frac{K}{r'} 2\pi r' h dr' = \lambda h + K 2\pi h\,(r - R_1) & R_1 < r < R_2 \\ \lambda h + \int_{R_1}^{R_2} \rho(r')2\pi r' h dr' = \lambda h + \int_{R_1}^{R_2} \frac{K}{r'} 2\pi r' h dr' = \lambda h + K 2\pi h\,(R_2 - R_1) & R_2 \leq r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana dovuta alla distribuzione di carica ρ abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r' h dr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\overrightarrow{E} = E_r\hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad E_r\,(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \leq r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r-R_1)}{r} & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(R_2-R_1)}{r} & R_2 \leq r \end{cases}$$

Domanda 2

Per $a \leq r_0 \leq R_1$:

$$V\,(R_2) - V\,(r_0) = \int_{R_2}^{r_0} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{R_2}^{R_1} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r - R_1)}{r}\right) dr + \int_{R_1}^{r_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}\,(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{R_1}{R_2}$$

Per $R_1 \leq r_1 \leq R_2$:

$$V(R_2) - V(r_1) = \int_{R_2}^{r_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{R_2}^{r_1} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(r - R_1)}{r} \right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{r_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(r_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln \frac{r_1}{R_2}$$

Domanda 3

Affinchè l'elettrone, che è fermo in R_2, non penetri all'interno del guscio è necessario che la forza agente sull'elettrone in R_2 sia repulsiva (spinga l'elettrone a raggi maggiori di R_2) o nulla. Per cui $q\overrightarrow{E}(R_2) = c\hat{r}$ con $c \geq 0$. Da questa relazione:

$$qE_r(R_2)) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad q\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \right) \geq 0$$

Quindi poichè la carica è negativa :

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \right) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad K \leq -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{(R_2 - R_1))} \qquad \Rightarrow \qquad K_{max} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{(R_2 - R_1))}$$

Per calcolare la velocità v_f con la quale l'elettrone inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, raggiunge la superficie interna del guscio, non essendoci in gioco forze non conservative, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. In R_2 l'energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è $U_i = qV(R_2)$, mentre nella posizione finale, R_1 l'energia cinetica è $\frac{1}{2}mv_f^2$ e l'energia potenziale è $U_f = qV(R_1)$. Dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$qV(R_2) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(R_1) \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \sqrt{\frac{2q(V(R_2) - V(R_1))}{m}}$$

con

$$V(R_2) - V(R_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln \frac{R_1}{R_2}$$

Dove abbiamo utilizzato l'espressione per $V(R_2) - V(r_1)$ con $r_1 = R_1$ (vedi Domanda 2.b).