Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3\ m$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40\ N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\ m$. All' estremità della molla attaccata una pallina di massa $m = 1\ kg$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto d_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo T oscillerà la pallina?

$d_e =$ .... $T =$ ....

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento h_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza f oscillerà la pallina?

$h_e =$ .... $f =$ ....

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l' energia cinetica E_c della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$E_c=$ ....

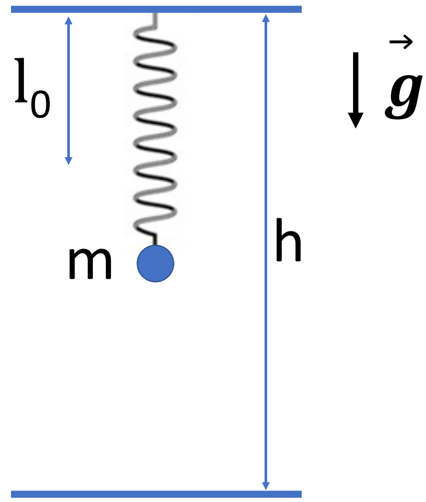
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto (E_{pf}) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento (E_{pi}).

$E_{pf} - E_{pi}=$ ....

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h^{'}$=1 m dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa E_{diss} nell'urto con il soffitto.

$E_{diss}=$ ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESCERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5\ ms^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo lasse x. All'istante $t = 0\ s$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1\ cm$, distanti $d = 1\ mm$ e parallele al piano xz (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^0$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale $(V_A - V_B)$ tra l'armatura inferiore (V_A) e l'armatura superiore (V_B).

$t^* =$ .... $V_A - V_B =$ ....

1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ nella regione tra le armature del condensatore.

$t^* =$ .... $\overrightarrow{E} =$ ....

2.a Determinare il campo magnetico $\overrightarrow{B} = B_z\hat{z}$ che è necessario applicare lungo z affinchè il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

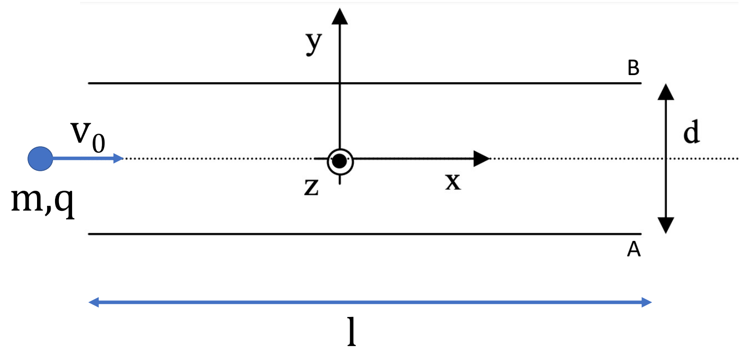
$\overrightarrow{B} =$ ....

3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore

$\beta =$ .... $\overrightarrow{v}_B =$ ....

3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la lunghezza della traiettoria L percorsa dal protone all'interno del condensatore

$\beta =$ .... $L =$ ....



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3\ m$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40\ N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\ m$. All' estremità della molla attaccata una pallina di massa $m = 1\ kg$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto d_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo T oscillerà la pallina?

$$d_e = \ 1.25\ m \qquad T = \ 9.93\times10^{-1}\ \mathrm{s}$$

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento h_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza f oscillerà la pallina?

$$h_e = \ 1.75\ m \qquad f = \ 1.01\ s^{-1}$$

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l' energia cinetica E_c della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$$h > 2d_e \quad \Rightarrow \quad 3\ m > 2.5\ m \qquad E_c = \ 30\ J$$

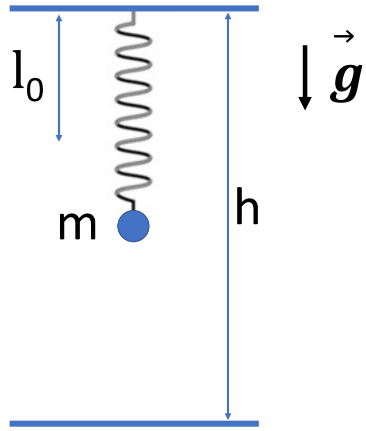
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto (E_{pf}) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento (E_{pi}).

$$h > 2d_e \quad \Rightarrow \quad 3\ m > 2.5\ m \qquad E_{pf} - E_{pi} = \ \text{-30}\ J$$

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h^{'}$=1 m dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa E_{diss} nell'urto con il soffitto.

$$E_{diss} = \ 50\ J$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$



($Figura$ $qualitativa$ e non in $scala$ a $scopo$ $illustrativo$)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5\ ms^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo lasse x. All'istante $t = 0\ s$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1\ cm$, distanti $d = 1\ mm$ e parallele al piano xz (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$.Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale $(V_A - V_B)$ tra l'armatura inferiore (V_A) e l'armatura superiore (V_B).

$$t^* = \ 1 \times 10^{-7}\ s \qquad V_A - V_B = \ \text{-1.01}\ V$$

1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ nella regione tra le armature del condensatore.

$$t^* = \ 1 \times 10^{-7}\ s \qquad \overrightarrow{E} = \ (0, -1.01 \times 10^3, 0)\ Vm^{-1}$$

2.a Determinare il campo magnetico $\overrightarrow{B} = B_z\hat{z}$ che è necessario applicare lungo z affinchè il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

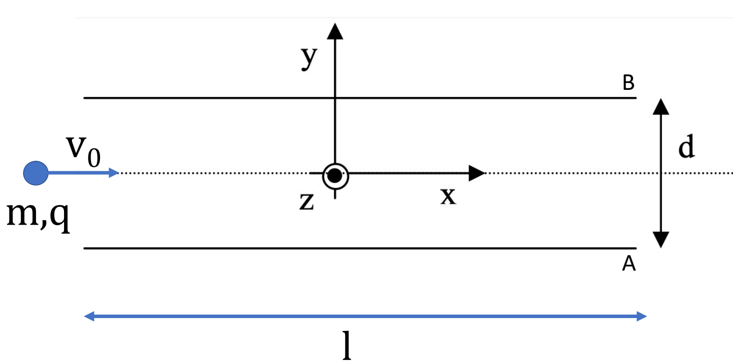
$$\overrightarrow{B} = \ -1.01 \times 10^{-2}\hat{z}\ T$$

3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore

$$\beta = \ 5.53^o \qquad \overrightarrow{v}_B = \ (9.95 \times 10^4, 9.63 \times 10^3, 0)\ ms^{-1}$$

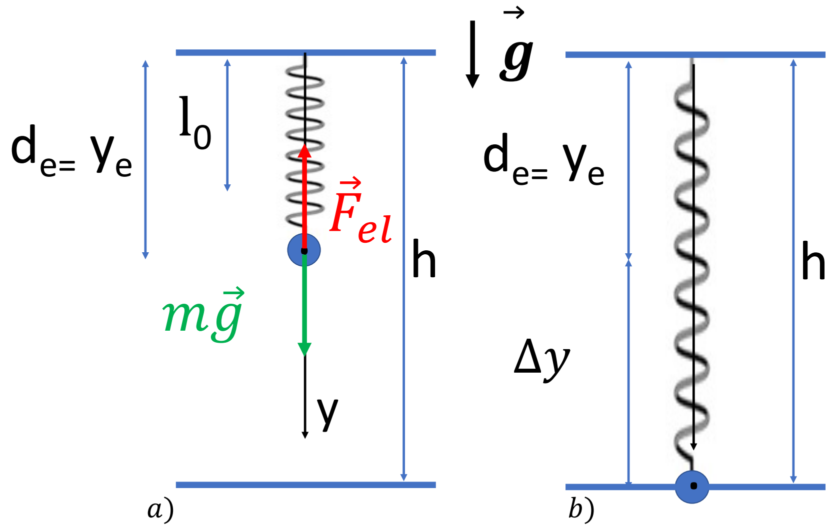
3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale in radianti e la lunghezza della traiettoria L percorsa dal protone all'interno del condensatore

$$\beta = \ 5.53^o \qquad L = \ 0.01\ m$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1

Le forze agenti sulla pallina sono la forza peso e la forza di richiamo della molla. All'equilibrio la somma di tali forze è nulla per cui, nel sistema di riferimento indicato in figura a):

$$-K(y_e - l_0) + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad d_e = y_e = l_0 + \frac{mg}{K}$$

dove abbiamo indicato con y_e la posizione di equilibrio della pallina e del sistema (pallina più molla) nel sistema di riferimento indicato, che corrisponde alla distanza d_e dal soffitto. Mentre la distanza dal pavimento è pari a $h_e = h - d_e$

Quando il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, l'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico:

$$m\ddot{y} = -K(y - l_0) + mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{K}{m}\left(y - l_0 - \frac{m}{k}g\right) = 0$$

la cui pulsazione è $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, e $l_0 + \frac{m}{k}g$ è la lunghezza della molla in condizioni di equilibrio . Per cui:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Il sistema se spostato dalla posizione di equilibrio di $\mid \Delta y \mid$, oscillerà attorno alla posizione di equilibrio con:

$$y(t) \in [y_e - \mid \Delta y \mid, y_e + \mid \Delta y \mid]$$

L'ampiezza dell'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio dipende dall'allungamento (o dalla compressione) rispetto alla posizione di equilibrio.

Domanda.2

Quando la molla viene allungata fino a portare la pallina sul pavimento,(vedi figura b), l'allungamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio è $\Delta y = h - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$. Affinchè la pallina arrivi a colpire il soffitto è necessario che $\Delta y = h - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) > \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$, per cui $h > 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$. I dati del problema verificano questa relazione.

Prima dell'urto con il soffitto, poichè le forze in gioco, forza gravitazionale e forza elastica, sono forze conservative, si conserva l'energia meccanica. Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, dalla conservazione dell'energia, indicando con E_i ed E_f l'energia iniziale e finale del sistema molla-pallina, possiamo scrivere:

$$E_i = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 \quad E_f = \frac{1}{2}K\left(l_0\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Per cui l'energia cinetica della pallina quando arriva sul soffitto è data da:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kh\left(h - 2l_0\right) - mgh$$

Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, l'energia potenziale iniziale e finale sono date rispettivamente da:
$E_{pi} = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{pf} = \frac{1}{2}K\left(l_0\right)^2 + mgh$ dalle quali $E_{pf} - E_{pi} = -\frac{1}{2}Kh\left(h - 2l_0\right) + mgh$

Domanda.3

In questo caso, se la pallina non arriva a terra ma si ferma vuol dire che l'urto è anelastico e l'energia non si conserva. L'energia dissipata è data da $E_i - E_f^{'}$, dove E_i è stata determinata nella Domanda 2 e $E_f^{'}$ si ottiene da:

$$E_f' = \frac{1}{2}K\left(h - l_0 - h'\right)^2 + mgh^{'}$$

Per cui l'energia dissipata è data da:

$$E_{diss} = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(h - l_0 - h'\right)^2 - mgh'$$

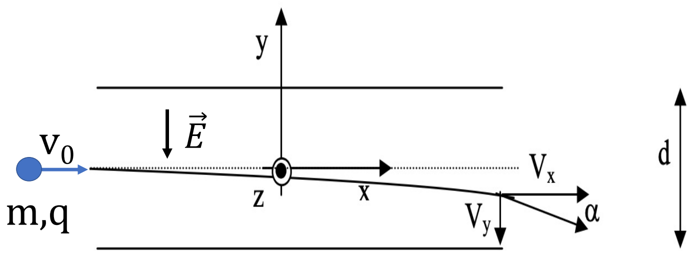
Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y per cui $\overrightarrow{E} = E_y\hat{y}$. La forza $\overrightarrow{F}$ agente sulla massa m quando questa è all'interno del condensatore è $\overrightarrow{F} = (0, qE_y, 0)$. Per cui, lungo x il moto è rettilineo ed uniforme con $v_x = v_0$. Usando il sistema di coordinate assegnato, $x(t) = -\frac{l}{2} + v_0 t$. Da $x(t^*) = \frac{l}{2}$ si ottiene che il tempo impiegato ad attraversare il condensatore è pari a $t^* = \frac{l}{v_0}$. Lungo y, il moto è uniformemente accelerato con $a_y = \frac{qE_y}{m}$ dalla quale $v_y(t^*) = a_y t^* = \frac{qE_y}{m}\frac{l}{v_0}$ Dalle quali:

$$\frac{v_y(t^*)}{v_x} = \frac{qE_y}{m}\frac{l}{v_0^2} = -tg(\alpha) \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}tg\alpha \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E} = \left(0, -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}tg\alpha, 0\right)$$

$$V_A - V_B = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_y dy = E_y d = -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}dtg\alpha$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

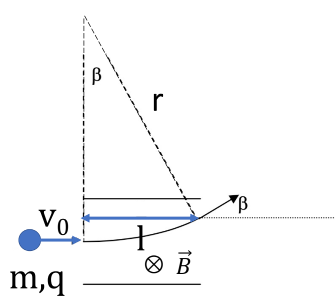
Domanda 2

Affinchè il protone non venga deflesso la risultante delle forza elettrica ($\overrightarrow{F}_{el}$) e magnetica ($\overrightarrow{F}_m$) agenti sul protone deve essere nulla:

$$\overrightarrow{F}_{el} + \overrightarrow{F}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad qE_y\hat{y} = -q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = -qv_0\hat{x} \wedge B_z\hat{z} = qv_0B_z\hat{y} = qE_y\hat{y} \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{E_y}{v_0} = -\frac{m}{q}\frac{v_0}{l}tg\alpha$$

Domanda 3

Se nello spazio occupato dal condensatore è presente solo il campo magnetico uniforme determinato nella domanda 2, il protone compie un moto circolare uniforme nel piano xy fino a quando è all'interno del condensatore.



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

L'unica forza agente è infatti la forza magnetica e vale $\frac{mv_0^2}{r} = qv_0B$, per cui il raggio di curvatura del moto è $r = \frac{mv_0}{qB}$. Pertanto, all'uscita del condensatore (vedi figura) l'angolo di deflessione si ottiene dalle seguenti relazioni:

$$sin\beta = \frac{l}{r} = \frac{lqB}{mv_0} \quad \Rightarrow \quad \beta = asin\left(\frac{lqB}{mv_0}\right)$$

Da notare che $sin\beta = tg\alpha$, e che per i dati numerici del problema ($\alpha \ll 10^0$) $\beta \simeq \alpha$.
Con riferimento alla figura, la lunghezza della traiettoria L e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore sono rispettivamente date da:

$$L = r\beta \qquad \overrightarrow{v}_B = (v_0cos\beta, v_0sin\beta)$$