Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 23/07/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\ kg$ e raggio $r = 64\ cm$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro C del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 12\ N$. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.55$, determinare:

1.a il modulo dell'accelerazione del cilindro a e la Forza di attrito statico $\overrightarrow{F}_s$

$$a = 1.27\ ms^{-2} \qquad \overrightarrow{F}_s = -4\hat{x}\ \mathrm{N}$$

1.b il modulo della velocità v del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$$v = 5.33\ ms^{-1}$$

2.a l'energia cinetica K del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$$K = 1.34 \times 10^2\ J$$

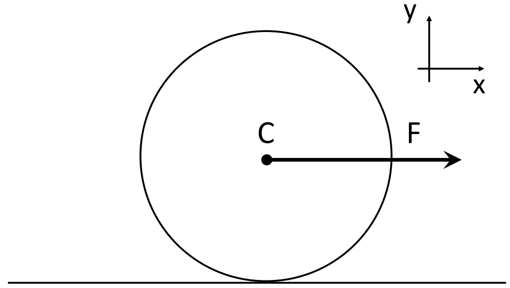
2.b il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 4.2\ s$ dall'inizio del moto

$$\mathcal{L} = 1.34 \times 10^2\ J$$

3.a il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale che può essere applicata affinchè il rotolamento avvenga senza strisciare, F_{max}

$$F_{max} = 1.04 \times 10^2\ N$$

Assumere per i calcoli $g = 10\ \mathrm{m}/s^2$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo
Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2\ m$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3\ A$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

1.a la forza $\overrightarrow{F}_L^{12}$ per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\overrightarrow{F}_L^{12} = \ 9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

1.b la forza $\overrightarrow{F}_L^{21}$ per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\overrightarrow{F}_L^{21} = \ -9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

Nel punto P indicato in figura, a distanza r da entrambi i fili è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2\ cm$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4\ \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^0$ con l'asse y. Determinare:

2.a Il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ nel punto P, e il flusso del campo magnetico $\phi\left(\overrightarrow{B}\right)$ attraverso la spira.

$$\overrightarrow{B} = 3 \times 10^{-7}\ \hat{y}\ T \qquad \phi\left(\overrightarrow{B}\right) = \ 2.67 \times 10^{-10}\ Wb$$

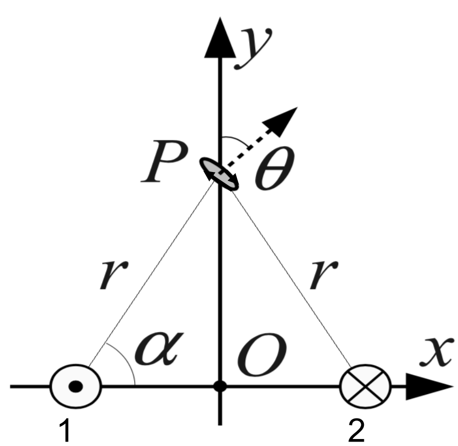
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10$ A/s. Si determini (trascurando l'autoinduzione):

3.a la forza elettromotrice, fem, indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, E_{Diss}, al tempo $t^* = 5\ s$.

$$fem = -8.89 \times 10^{-10}\ V \qquad E_{Diss} = 9.88 \times 10^{-13}\ J$$

3.b la corrente che circola nella spira i_s e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata P al tempo $t^* = 5\ s$

$$i_s = 2.22 \times 10^{-4}\ A \text{ orario} \qquad P = 1.98 \times 10^{-13}\ W$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 23/07/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\ kg$ e raggio $r = 64\ cm$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro C del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 12\ N$. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.55$, determinare:

1.a il modulo dell'accelerazione del cilindro a e la Forza di attrito statico $\overrightarrow{F}_s$

$a =$ .... $\overrightarrow{F}_s =$ ....

1.b il modulo della velocità v del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$v =$ ....

2.a l'energia cinetica K del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$K =$ ....

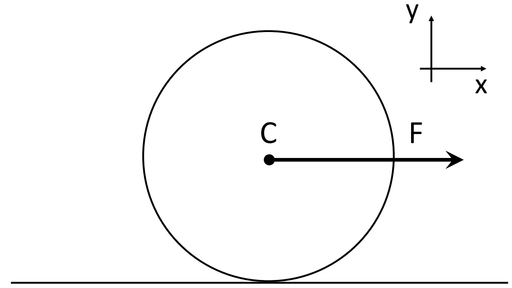
2.b il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 4.2\ s$ dall'inizio del moto

$\mathcal{L} =$ ....

3.a il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale che può essere applicata affinchè il rotolamento avvenga senza strisciare, F_{max}

$F_{max} =$ ....

Assumere per i calcoli $g = 10$ m$/s^2$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2\ m$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3\ A$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

1.a la forza $\overrightarrow{F}_L^{12}$ per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\overrightarrow{F}_L^{12} = \text{.....................}$$

1.b la forza $\overrightarrow{F}_L^{21}$ per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\overrightarrow{F}_L^{21} = \text{.....................}$$

Nel punto P indicato in figura, a distanza r da entrambi i fili, è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2\ cm$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4\ \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^0$ con l'asse y. Determinare:

2.a Il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ nel punto P, e il flusso del campo magnetico $\phi\left(\overrightarrow{B}\right)$ attraverso la spira.

$$\overrightarrow{B} = \text{.....................} \qquad \phi\left(\overrightarrow{B}\right) = \text{.....................}$$

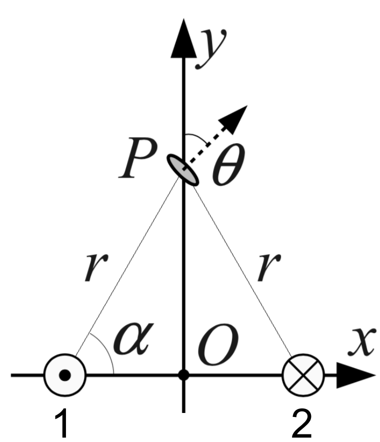
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10$ A/s.
Si determini (trascurando l'autoinduzione):

3.a la forza elettromotrice, fem, indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, E_{Diss}, al tempo $t^* = 5\ s$.

$$fem = \text{.....................} \qquad E_{Diss} = \text{.....................}$$

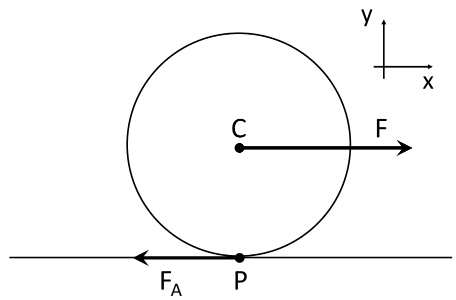
3.b la corrente che circola nella spira i_s e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata P al tempo $t^* = 5\ s$

$$i_s = \text{.....................} \qquad P = \text{.....................}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1a

Le forze agenti sul cilindro sono la forza esterna F e la forza d'attrito statico F_s (vedi figura), la forza peso e la forza perpendicolare di reazione del piano di appoggio che hanno lo stesso modulo e direzione ma verso opposto. La posizione del centro di massa del disco (CM) coincide con C. La prima e la seconda equazione cardinale (scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il CM) forniscono, tenuto conto che la forza di attrito statico ha solo la componente x diversa da 0 essendo parallela alla risultante delle forze parallele al piano agenti:

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_s = m\overrightarrow{a}_{CM} \\ \overrightarrow{M} = I_{CM}\alpha_z\hat{z} \end{cases}$$

che si possono riscrivere, considerando la proiezione lungo x per la prima cardinale, come:

$$\begin{cases} F + F_{sx} = ma_{xCM} = ma \\ F_{sx}r\hat{z} = I_{CM}\alpha_z\hat{z} \quad \Rightarrow \quad F_{sx}r = I_{CM}\alpha_z \end{cases}$$

Poichè il moto è di puro rotolamento $a = -\alpha_z r$, sostituendo otteniamo, tenuto conto che il momento di inerzia del cilindro è $I_{CM} = mr^2/2$:

$$\begin{cases} F_{sx}r = I_{CM}\alpha_z \quad \Rightarrow \quad F_{sx} = -ma/2 \\ F + F_{sx} = ma = F - ma/2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \\ F_{sx} = -ma/2 = -m\frac{1}{3}\frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F}_s = (-\frac{1}{3}F, 0, 0) \end{cases}$$

La forza di attrito statico in questo caso è parallela al piano ed ha verso opposto alla velocità del CM. Si poteva anche utilizzare questa informazione fin dall'inizio ($F_{sx} = -F_s$).

Domanda.1b

Si ottengono ovviamente gli stessi risultati per l'accelerazione considerando l'asse di rotazione passante per il punto P di contatto; in questo caso il momento d'inerzia, per il teorema di Huygens-Steiner, vale:

$$I_P = I_{CM} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

mentre la seconda equazione cardinale e la relazione tra a e α_z forniscono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} -rF = I_P\alpha_z = \frac{3}{2}mr^2\alpha_z \\ a = -\frac{\alpha_z}{r} = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \end{cases}$$

Notiamo che l'accelerazione è costante, per cui il moto è uniformemente accelerato. Pertanto, la velocità v dopo un tempo t^* è data da :

$$v = at^* = \frac{2}{3}\frac{F}{m}t^*$$

Domanda.2a

L'energia cinetica può essere calcolata utilizzando il teorema di König considerando l'energia di rotazione attorno al centro di massa più l'energia di traslazione del CM:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{F^2t^{*2}}{3m}$$

Lo stesso calcolo si può effettuare considerando la rotazione attorno al punto fisso P; in questo caso non vi è traslazione ma solo rotazione attorno a P, e il momento di inerzia da utilizzare è I_P, pertanto:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

che concide con il risultato ottenuto in precedenza.
Domanda.2b

L'unica forza che compie lavoro è F in quanto la forza di attrito statico agisce su un punto fermo e quindi non vi è spostamento. La forza F agisce sul centro di massa che si muove di moto uniformemente accelerato, partendo da fermo, con accelerazione a trovata sopra, quindi il suo spostamento nel'intervallo di tempo t^* è dato da:

$$s = \frac{1}{2} a t^{*2} = \frac{F t^{*2}}{3m}$$

Il lavoro compiuto nel tempo t^* è pertanto:

$$\mathcal{L} = \int_0^s \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = F s = \frac{F^2 t^{*2}}{3m}$$

Tale espressione corrisponde alla variazione di energia cinetica in accordo con il teorema dell'energia cinetica: lo stesso teorema si sarebbe potuto utilizzare per calcolare tale lavoro.

Domanda.3
Dalla relazione $\frac{1}{3} F = F_s \leq \mu_s m g$ otteniamo che la forza massima che può essere applicata per il moto di puro rotolamento è:

$$F_{max} = 3 \mu_s m g$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1.a

Per ciascun filo, per l'invarianza del campo magnetico per rotazioni attorno all'asse del filo e traslazioni lungo l'asse, le linee di campo magnetico sono delle circonferenze con centro sul filo e che giacciono su piani paralleli al piano xy (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso di percorrenza delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse z per il filo 1, e orario per il filo 2.

Utilizzando il teorema di Ampere per calcolare il campo magnetico generato dal filo 1 in ogni punto del filo 2 e la regola della mano destra, si ottiene:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\,(\hat{y})$$

Dalla legge di Laplace la forza esercitata dal filo 1 su un tratto L_2 del filo 2 è data da

$$\overrightarrow{F}^{12} = i_2 \overrightarrow{L}_2 \wedge \overrightarrow{B}_1 = i_0 L_2 \left(-\hat{z} \wedge \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y}\right) = L_2 \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

Per cui la forza esercitata per unità di lunghezza dal filo 1 sul filo 2 è data da:

$$\overrightarrow{F}^{12}_L = \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

Domanda 1.b

Per calcolare la forza esercitata per unità di lunghezza dal filo 2 sul filo 1 basta osservare che mentre la direzione il modulo e il verso del campo magnetico sono identici a quelli del campo magnetico sul filo 1 il verso della corrente è opposto. Pertanto:

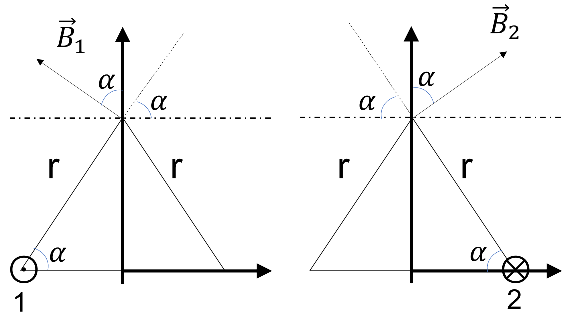
$$\overrightarrow{F}^{21}_L = -\frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

Domanda 2.a

Per un triangolo equilatero $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Il campo $\overrightarrow{B}$ dovuto ai due fili nel punto P si ottiene, in base al principio di sovrapposizione, sommando vettorialmente i campi magnetici dovuti ai due fili considerati separatamente. I campi magnetici dovuti al filo 1 e al filo 2 hanno stesso modulo (essendo i due fili percorsi dalla stessa corrente ed equidistanti dal punto P. Con (vedi figura):

$$\overrightarrow{B}_1 = (-B_1 sin\alpha, B_1 cos\alpha) \qquad \overrightarrow{B}_2 = (B_2 sin\alpha, B_2 cos\alpha)$$

e $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$



Per cui il campo magnetico risultante in P è dato da:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = 2cos\alpha\frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y}$$

Sfruttando il fatto che essendo $a \ll r$ il campo magnetico può essere considerato uniforme su tutta la superficie della spira, e pari a $\overrightarrow{B}$ in P, il flusso di $\overrightarrow{B}$ concatenato con la spira, poichè il campo magnetico è uniforme e la superficie orientata della spira ha normale fissa $\hat{n}$, è dato da:

$$\phi\left(\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}\cdot\hat{n}S = Bcos\theta\pi a^2 = 2cos\alpha\frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}cos\theta\pi a^2 = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{r}cos\alpha cos\theta$$

Domanda 3.a

Per determinare la forza elettromotrice indotta dobiamo utilizzare la corrente $i(t)$ al posto di i_0 nell'espressione del flusso concatenato con la spira (che dipenderà quindi dal tempo) e la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Pertanto, per il flusso otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{B}, t) = \frac{\mu_0 (i_0 + \beta t) a^2}{r} cos\alpha cos\theta$$

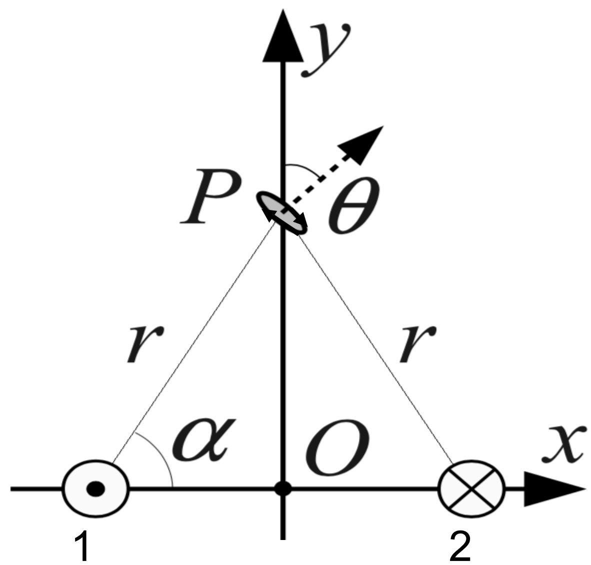
e dalla legge di di Faraday-Neumann-Lenz:

$$fem = -\frac{d\phi(\overrightarrow{B},t)}{dt} = -\frac{\mu_0 \beta a^2}{r} cos\alpha cos\theta$$

Poichè la fem è costante anche la corrente indotta nella spira i_s è costante come lo è la potenza P dissipata nella spira. Pertanto: $P = i_s^2 R_s = \frac{fem^2}{R_s}$ L'energia dissipata al tempo t^* sarà data da :

$$E_{Diss} = \int_0^{t*} Pdt = Pt^* = \frac{fem^2}{R_s} t^*$$

Domanda 3.b
il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta, e pertanto, dato che il flusso del campo magnetico aumenta nel tempo per i dati del problema, il suo verso è orario rispetto alla normale orientata della spira. Il verso della corrente indotta è indicato nella seguente figura.



la sua intensità è data da:

$$i_s = \frac{| fem |}{R_s}$$

mentre la potenza dissipata (vedi anche Domanda 3.a per espressione alternativa) è data da

$$P = i_s^2 R_s$$