

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021

Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1 = 62$ kg e $m_2 = 31$ kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8$ ms⁻¹ e $v_2 = 16$ ms⁻¹ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- Energia del sistema, E
- quantità di moto del sistema, \vec{P}
- momento angolare con polo nel centro dell'asta, \vec{L}^o

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).

2.a Calcolare la posizione \vec{R}_{cm} e la velocità \vec{v}_{cm} del centro di massa dopo l'urto

$$\vec{R}_{cm} = (0,0,0) \text{ m} \quad \vec{v}_{cm} = (0,0,0) \text{ m/s}$$

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, \vec{L}

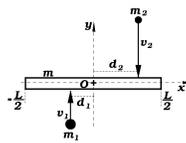
$$\vec{L} = -2.66 \times 10^4 \hat{z} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$$K = 1190 \text{ J}$$

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$$E_{rot} = 1190 \text{ J}$$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ m Ω è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\vec{B}_0 = (0 ; 0 ; 7)$ T per $(-\infty \leq x \leq 0 ; y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \leq \infty ; y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s. Si trascuri l'induttanza della spira.

- 1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione x del lato a destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\vec{B}, x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$\phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} B_0 ab & x \leq 0 \\ B_0 a(b-x) & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

$$\phi(\vec{B}, x) = 2.24 \times 10^{-2} \text{ wb per } -\infty \leq x \leq 0 \text{ e } \phi(\vec{B}, x) = (2.24 \times 10^{-2} - 2.8 \times 10^{-1} x) \text{ wb per } 0 < x \leq b$$

- 1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione x del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$i(x) = 10.26 \text{ A per } 0 < x < b$$

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

- 2.a Calcolare la forza esterna \vec{F} che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

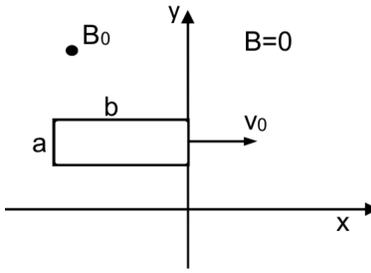
$$\vec{F} = 2.87 \times 10^{-1} \hat{x} \text{ N}$$

- 3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

$$L = 0.23 \text{ J}$$

- 3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss} .

$$E_{Diss} = 0.23 \text{ J}$$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021

Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1 = 62$ kg e $m_2 = 31$ kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8$ ms⁻¹ e $v_2 = 16$ ms⁻¹ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- Energia del sistema, E
- quantità di moto del sistema, \vec{P}
- momento angolare con polo nel centro dell'asta, \vec{L}^o

2.a Calcolare la posizione \vec{R}_{cm} e la velocità \vec{v}_{cm} del centro di massa dopo l'urto

$$\vec{R}_{cm} = \dots\dots\dots \quad \vec{v}_{cm} = \dots\dots\dots$$

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, \vec{L}

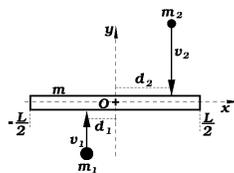
$$\vec{L} = \dots\dots\dots$$

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$$K = \dots\dots\dots$$

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$$E_{rot} = \dots\dots\dots$$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ m Ω è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\vec{B}_0 = (0 ; 0 ; 7)$ T per $(-\infty \leq x \leq 0 ; y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla ($0 < x \leq \infty ; y \in \mathcal{R}$) a velocità costante $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s. Si trascuri l'induttanza della spira.

- 1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione x del lato a destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\vec{B}, x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$\phi(\vec{B}, x) = \dots\dots\dots$$

- 1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione x del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$i(x) = \dots\dots\dots$$

- 2.a Calcolare la forza esterna \vec{F} che è necessario applicare nel tratto ($0 < x < b$) al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

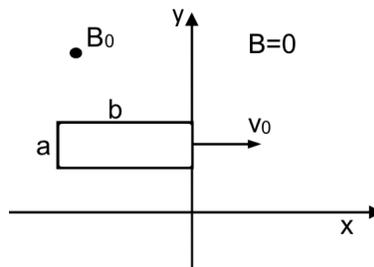
$$\vec{F} = \dots\dots\dots$$

- 3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

$$L = \dots\dots\dots$$

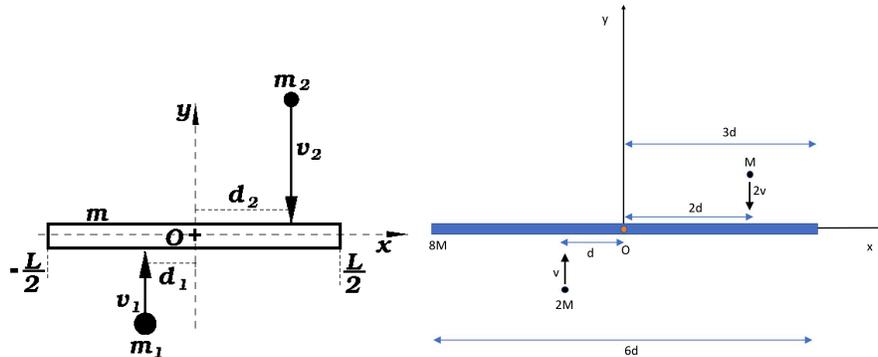
- 3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss} .

$$E_{Diss} = \dots\dots\dots$$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Soluzione Esercizio 1



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

Domanda.1

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).

Domanda.2

Notiamo che: $m = 8m_2 = 8M$, $m_1 = 2m_2 = 2M$, $d_2 = 2d_1 = 2d$ e $v_2 = 2v_1 = 2v$. Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = m + m_1 + m_2 = 8M + 2M + M$ la massa del sistema, per la posizione del centro di massa otteniamo:

$$x_{cm} = \frac{m(0) + (m_1)(-d_1) + m_2(d_2)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Ovviamente, si ottiene lo stesso risultato se usiamo le espressioni delle masse e delle distanze in funzione di d e M

$$x_{cm} = \frac{8M(0) + (2M)(-d) + M(2d)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O:

$$\vec{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Dalla conservazione della quantità di moto del sistema, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$, otteniamo per le tre componenti:

$$\begin{cases} 0 = m_{tot}v_{cm}^x = 0 \\ m_1v_1 - m_2v_2 = m_{tot}v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot}v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Oppure vedi fig.b usando M e v :

$$\begin{cases} 0 = m_{tot}v_{cm}^x = 0 \\ (2M)v - M(2v) = m_{tot}v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot}v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Per cui:

$$\vec{v}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = M + 2M + 8M$ la massa del sistema vale :

$$x_{cm} = \frac{M(2d) + (2M)(-d) + 8M(0)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O e con la posizione del centro di massa prima dell'urto:

$$\vec{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Come era prevedibile dalla conservazione della quantità di moto, dalla conservazione della velocità del cm e dal fatto che quest'ultima è nulla.

Dalla conservazione del momento angolare $\vec{L}_i^o = \vec{L}_f^o$ si ottiene:

$$\vec{L}_i^o = -(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1) \hat{z} = \vec{L}_f^o = \vec{L}$$

ma anche usando M , v e d :

$$\vec{L}_i^o = -(M(2v)(2d) + (2M)vd) \hat{z} = -6Mvd \hat{z} = \vec{L}_f^o = \vec{L}$$

Domanda.3

Dalla conservazione del momento angolare (domanda 2)

$$\vec{L}_i^o = -(m_1 v_1 d_1 + m_2 v_2 d_2) \hat{z} = \vec{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

ma anche usando M , v e d :

$$\vec{L}_i^o = -(M(2v)(2d) + (2M)vd) \hat{z} = -6Mvd \hat{z} = \vec{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

con I_O momento di inerzia rispetto al centro di rotazione che coincide con il cm del sistema dato da:

$$I_0 = \frac{1}{12}(m)(L)^2 + m_2(d_2)^2 + m_1 d_1^2$$

ma anche, notando che $L = 6d$, e usando M e v e d :

$$I_0 = \frac{1}{12}(8M)(6d)^2 + M(2d)^2 + 2Md^2 = (24 + 4 + 2)Md^2 = 30Md^2$$

Di conseguenza dopo l'urto poichè il centro di massa è fermo (domanda 2) e coincide con il centro dell'asta, il sistema ruoterà attorno ad esso (domanda 2) con velocità angolare ω data da:

$$\omega = -\frac{(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1)}{I_0}$$

ma anche, usando M e v e d

$$\omega = -\frac{6Mvd}{30Md^2} = -\frac{v}{5d}$$

Utilizzando il teorema di Koenig per determinare l'energia cinetica del sistema dopo l'urto, otteniamo:

$$K = \frac{1}{2} m_{tot} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{30Md^2 v^2}{25d^2} = \frac{3}{5} Mv^2$$

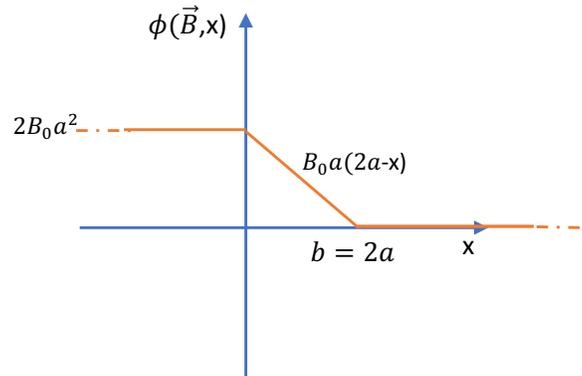
Poichè l'energia cinetica è solo rotazionale: $K = E_{rot}$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1.a

Notando che $b=2a$, il flusso del campo magnetico attraverso la spira è dato da:

$$\phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} B_0 ab = 2B_0 a^2 & x \leq 0 \\ B_0 a(b-x) = B_0 a(2a-x) & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

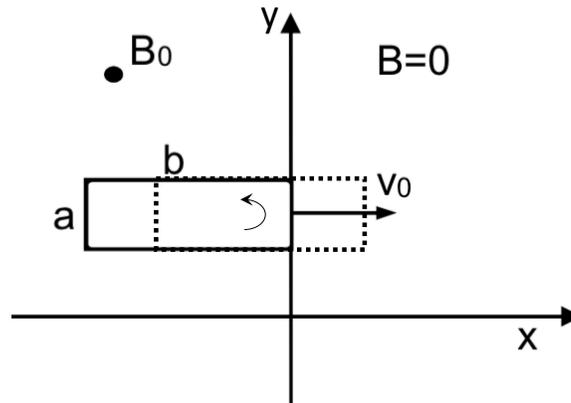


Domanda 1.b

La corrente indotta nella spira è non nulla solo per $0 < x < b$ dove il flusso non è costante in funzione del tempo. In questa regione dalla legge di Lenz:

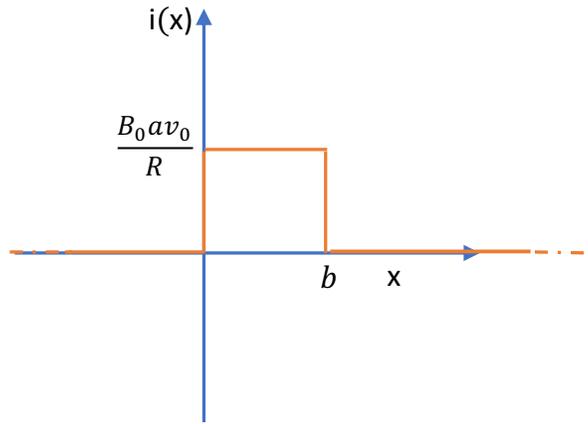
$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v_0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{B_0 a v_0}{R}$$

dove con fem abbiamo indicato la forza elettromotrice indotta e con i la corrente indotta che circola nella spira. Poiché nella regione $0 < x < b$ il flusso diminuisce, il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta, e pertanto, dato che il flusso del campo magnetico diminuisce, il suo verso è antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde a B_0 . Il verso della corrente indotta è indicato nella seguente figura.



La corrente indotta in funzione della coordinata x del lato a destro è data da:

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$



Domanda 2.a

Poichè la spira è percorsa da corrente per $0 < x < b$, essa è sottoposta su ciascun lato L alla forza magnetica (forza di Laplace) $i \vec{L} \wedge \vec{B}$. Le forze sui due lati paralleli alla velocità sono uguali in modulo e direzione ma hanno versi opposti in quanto il campo magnetico è lo stesso ma il verso della corrente è opposto nei due lati, la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B \neq 0$ è $\vec{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$, mentre la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B = 0$ è nulla. Per cui la forza magnetica risultante è $\vec{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$. D'altra parte se la spira si muove con velocità costante durante l'estrazione, la forza totale agente sulla spira deve essere nulla:

$$\vec{F}(a) + \vec{F} = 0$$

per cui la forza esterna applicata durante l'estrazione è

$$\vec{F} = iaB_0\hat{x} = \frac{B_0 a v_0}{R} a B_0 \hat{x} = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} \hat{x}$$

Domanda 3.a

Il lavoro L compiuto dalla forza \vec{F} per estrarre tutta la spira è dato da:

$$L = \int_0^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot b = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} b = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

Domanda 3.b

Poiche la potenza (W) dissipata sulla resistenza è costante, l'energia dissipata per effetto Joule sarà uguale alla potenza dissipata (W) per il tempo t^* necessario ad estrarre tutta la spira:

$$W = i^2 R = \frac{fem^2}{R} = \frac{(B_0 a v_0)^2}{R} \Rightarrow E_{Diss} = \int_0^{t^*} W dt = W t^* = W \frac{b}{v_0} = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

Ovviamente l'energia dissipata coincide con il lavoro fatto dalla forza esterna (L) per estrarre la spira.