Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 17/09/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un piano inclinato forma un angolo θ= 40.0° con l'orizzontale ed ha un'altezza h= 0.5 m.
Una sfera di massa M= 8.7 kg e raggio R= 10 cm viene rilasciata da ferma dalla sommità del piano.
La metà più alta del piano è perfettamente liscia, mentre nella metà più bassa il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano vale μ= 8.7.

1.a Calcolare il modulo della velocità v_0 con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$v_0 = \quad 2.21 \text{ m/s}$$

1.b Calcolare l'energia cinetica E_0 con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$E_0 = \quad 21.3 \text{ J}$$

2.a Calcolare l'accelerazione $\vec{a}_{cm}$ del centro di massa della sfera non appena entra nel tratto scabro *(fare riferimento al sistema di riferimento indicato in figura)*

$$\vec{a}_{cm} = \quad -58.6\ \hat{x} \text{ m/s}^2$$

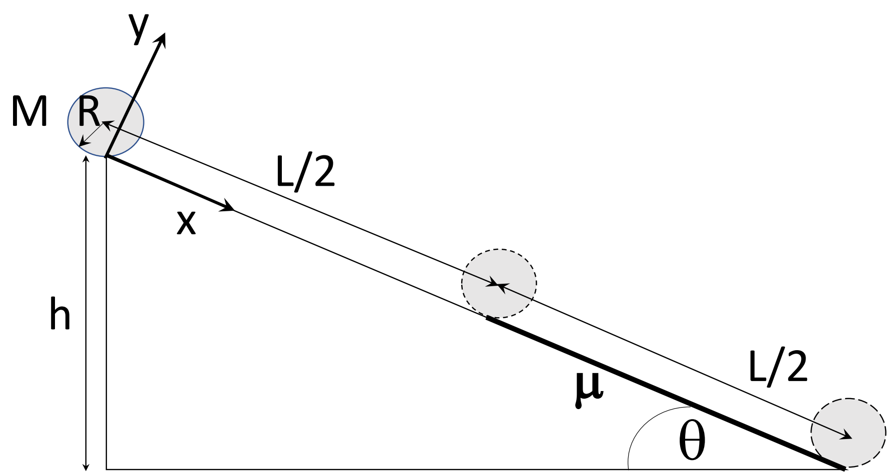
2.b Calcolare il modulo dell'accelerazione angolare α della sfera non appena entra nel tratto scabro

$$\alpha = \quad 1.62{\times}10^3 \text{ rad}/s^2$$

3 Determinare il tempo t^* (assumendo $t = 0$ l'istante in cui la sfera entra nel tratto scabro) al quale la sfera inizia il moto di puro rotolamento

$$t^* = \quad 0.01 \text{ s}$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9.81$ m/s^2



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Un cilindro ideale di lunghezza infinita è costituito di materiale isolante, ha un raggio $R = 2.7\ cm$ ed ha una densità volumetrica di carica elettrica che dipende dalla distanza r dall'asse del cilindro (asse z della figura) con $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

1.a Scrivere l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in coordinate cilindriche in tutto lo spazio e determinare per quale valore r_{max} della distanza r dall'asse z del cilindro (vedi figura) l'intensità del campo elettrico è massima.

$$\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0) \quad con \quad E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right) & 0 \leq r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

r_{max}=0.02025 m

2.a Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $\frac{R}{2}$ e $2R$

$$\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}=2$$

2.b Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $3R$ e $\frac{R}{4}$

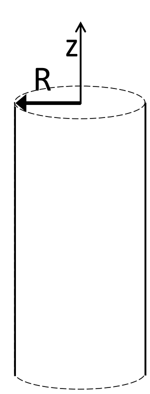
$$\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|}=7/15=0.47$$

3.a Determinare ρ_{0-max}, il massimo valore di ρ_0, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico ΔV_{0-100R}, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (100 R) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

ρ_{0-max}= $2.22\times10^{-2}\ \frac{C}{m^3}$ ΔV_{0-100R}= 1.66×10^{6} V

3.b Determinare ρ_{0-max}, il massimo valore di ρ_0, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-R/2}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (R/2) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

ρ_{0-max}= $2.22\times10^{-2}\ \frac{C}{m^3}$ $\Delta V_{0-R/2}$= 8.89 $\times10^{4}$ V



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 17/09/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un piano inclinato forma un angolo $\theta = 40°$ con l'orizzontale ed ha un'altezza $h = 0.5$ m.
Una sfera di massa $M = 8.7$ kg e raggio $R = 10$ cm viene rilasciata da ferma dalla sommità del piano.
La metà più alta del piano è perfettamente liscia, mentre nella metà più bassa il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano vale $\mu = 8.7$

1.a Calcolare il modulo della velocità v_0 con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$v_0 = \text{................}$$

1.b Calcolare l'energia cinetica E_0 con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$E_0 = \text{................}$$

2.a Calcolare l'accelerazione $\vec{a}_{cm}$ del centro di massa della sfera non appena entra nel tratto scabro *(fare riferimento al sistema di riferimento indicato in figura)*

$$\vec{a}_{cm} = \text{................}$$

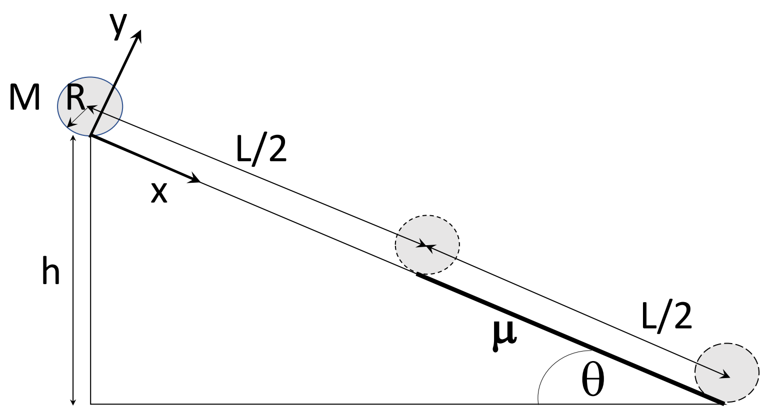
2.b Calcolare il modulo dell'accelerazione angolare α della sfera non appena entra nel tratto scabro

$$\alpha = \text{................}$$

3 Determinare il tempo t^* (assumendo $t = 0$ l'istante in cui la sfera entra nel tratto scabro) al quale la sfera inizia il moto di puro rotolamento

$$t^* = \text{................}$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9.81$ m/s^2



($Figura\ qualitativa\ e\ non\ in\ scala\ a\ scopo\ illustrativo$)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Un cilindro ideale di lunghezza infinita è costituito di materiale isolante, ha un raggio $R = 2.7\ cm$ ed ha una densità volumetrica di carica elettrica che dipende dalla distanza r dall'asse del cilindro (asse z della figura) con $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

1.a Scrivere l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in coordinate cilindriche in tutto lo spazio e determinare per quale valore r_{max} della distanza r dall'asse z del cilindro (vedi figura) l'intensità del campo elettrico è massima.

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad r_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $\frac{R}{2}$ e $2R$

$$\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.b Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $3R$ e $\frac{R}{4}$

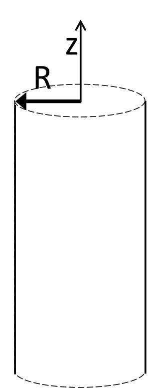
$$\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.a Determinare ρ_{0-max}, il massimo valore di ρ_0, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico ΔV_{0-100R}, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (100 R) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$$\rho_{0-max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{0-100R} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

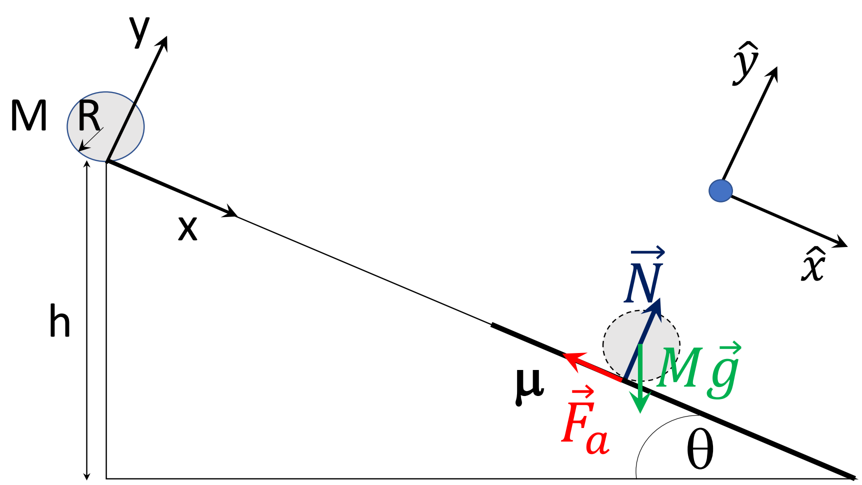
3.b Determinare ρ_{0-max}, il massimo valore di ρ_0, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-R/2}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (R/2) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$$\rho_{0-max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{0-R/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Nel primo tratto la sfera scende senza ruotare perchè la forza di attrito è nulla e la forza peso (applicata nel centro di massa) e la reazione normale (la cui direzione contiene il centro di massa) hanno entrambe momento nullo rispetto al centro di massa. L'energia si conserva perchè il lavoro delle forze non conservative è nullo. Imponendo la conservazione dell'energia ed assumendo ad esempio l'origine dell'energia potenziale alla base del piano possiamo determinare v_0:

$$Mg\,(h+R) \;=\; \frac{1}{2}Mv_0^2 + Mg\left(\frac{h}{2}+R\right) \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{g\,h}$$

Per il calcolo dell'energia cinetica, la sfera non ruota e pertanto non vi è energia cinetica di rotazione acquistata dalla sfera fino al tratto scabro. L'energia E_0 con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano corrisponde alla differenza di energia potenziale del centro di massa tra la posizione inziale e l'inizio del tratto scabro. Dalla conservazione dell'energia, e assumendo lo zero dell'energia potenziale alla base del piano, otteniamo E_0:

$$E_0 \;= Mg\,(h+R) - Mg\left(\frac{h}{2}+R\right) = \frac{1}{2}Mgh$$

Domanda.2
Inizialmente le forze da considerare sono: la forza peso $\vec{F}_g = M\vec{g} = Mg(\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y})$, la reazione vincolare normale al piano inclinato $\vec{N} = N\hat{y}$ e la forza di attrito dinamico $\vec{F}_a = -\mu N\;\hat{x}$.

Poichè entrando nel tratto scabro la sfera non sta rotolando, la velocità del suo punto di contatto è diversa da zero e quindi si sviluppa un attrito dinamico: la forza di attrito in questo caso è diretta come la velocità ed ha verso opposto ad essa. Questa forza ha momento $\vec{\tau} = -\mu MgR\cos\theta\;\hat{z}$ rispetto al centro di massa e provoca un accelerazione angolare. In accordo con il sistema di assi cartesiani scelto in cui l'asse z è ortogonale a xy e con verso verso chi legge il foglio (vedi figura) e ricordando che il momento di inerzia baricentrico per una sfera di massa M e raggio R è $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, scrivendo la prima equazione cardinale si ottiene proiettando lungo y, e osservando che la coordinata y del c.m. è costante per cui $a^y_{cm} = 0$:

$$N - Mg\cos\theta = Ma^y_{cm} = 0 \quad\Rightarrow\quad N = Mg\cos\theta$$

Mentre sempre dalla prima equazione proiettando lungo x

$$Mg\sin\theta - \mu N = Ma^x_{cm} = \quad\Rightarrow\quad a^x_{cm} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

lungo z non ci sono forze, di conseguenza $a^z_{cm} = 0$ per cui otteniamo:

$$\vec{a}_{cm} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\hat{x}$$

Dalla seconda equazione cardinale usando come polo il centro di massa si ottiene

$$-\mu MgR\cos\theta\hat{z} = \;I_{cm}\;\vec{\alpha} = \;I_{cm}\;\alpha_z\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \mid\vec{\alpha}\mid = \alpha = \frac{\mu MgR\cos\theta}{I_{cm}} = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\theta}{R}$$

Notiamo che l'accelerazione angolare è costante.

Domanda.3

Il moto nella parte scabra è uniformemente accelerato angolarmente, essendo l'accelerazione angolare costante. Valendo la relazione $\alpha_z = \dot{\omega}_z$, integrando tra 0 e t otteniamo $\omega_z(t) = \alpha_z t$, essendo al tempo $t = 0$ $\omega_z(0) = 0$. Ovviamente la sfera da questa equazione ruota in senso orario rispetto all'asse z con la velocità angolare che in modulo aumenta. Anche il moto del centro di massa che è rettilineo (lungo x) nella parte scabra è uniformemente accelerato. Possiamo quindi scrivere che:

$$v_{cm}(t) = v_0 + a^x_{cm} t \qquad\qquad \omega_z(t) = \alpha_z t$$

Il puro rotolamento viene raggiunto nell'istante t^* quando la velocità del punto di contatto diventa nulla, e la velocità del c.m. soddisfa le seguenti relazioni:

$$v_{cm}(t^*) = -\omega_z(t^*) R \quad \rightarrow \quad v_0 + a^x_{cm} t^* = \alpha \;\; t^* R$$

Per cui la condizione di puro rotolamento è raggiunta al tempo:

$$t^* = \frac{v_0}{\alpha R - a^x_{cm}}$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1.a

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale E_r e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro, r, essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse z, per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di π attorno al piano xy, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse z) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r, applicando la legge di Gauss otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove Q_{int} è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} \int_0^r \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right) & 0 < r < R \\ \int_0^R \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) = 2\pi\rho_0 h\frac{R^2}{6} & R \leq r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r'hdr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\mathrm{E}_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right) & 0 \leq r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

Il valore massimo che può assumere il campo elettrico per $r \geq R$ si ha per $r = R$ e corrisponde a $\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}$, mentre per $0 \leq r < R$ il valore massimo del campo si ottiene imponendo che la derivata prima del campo elettrico sia nulla. In quest'ultimo caso, derivando, il massimo si ottiene per $r = \frac{3}{4}R$ e l'intensità del campo elettrico è data da $\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16}$. Per cui il valore massimo del campo elettrico si ottiene nell'ultimo caso e corrisponde a $r_{max} = \frac{3}{4}R$.

Domanda 2.a

Utilizzando l'espressione del C.E. per $0 \leq r < R$ per $r = \frac{R}{2}$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) \mid = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}$$

mentre utilizzando l'espressione del C.E. per $r \geq R$ per $r = 2R$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}(2R) \mid = \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$$

per cui:

$$\frac{\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) \mid}{\mid \overrightarrow{E}(2R) \mid} = 2$$

Domanda 2.b

Utilizzando l'espressione del C.E. per $0 \leq r < R$ per $r = \frac{R}{4}$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right) \mid = \frac{\rho_0 R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{5}{48}$$

mentre utilizzando l'espressione del C.E. per $r \geq R$ per $r = 3R$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}(3R) \mid = \frac{\rho_0 R}{18\varepsilon_0}$$

per cui:

$$\frac{\mid \overrightarrow{E}(3R) \mid}{\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right) \mid} = \frac{7}{15}$$

Domanda 3.a

Dalla risposta alla prima domanda il valore massimo dell'intensità del campo elettrico è data da $\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16}$, tale espressione deve essere minore o uguale al valore di E_{max}, per cui, ρ_{0-max} `dato dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16} \leq E_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{0-max} = \frac{16\varepsilon_0 E_{max}}{3R}$$

Sfruttando il fatto che per le stesse proprietà di simmetria, assumendo un sistema di coordinate cilindriche r,θ,z, il potenziale dipende unicamente dalla coordinata radiale r e che quindi tutti i punti sull'asse (r=0) sono allo stesso potenziale, come pure tutti i punti alla stessa distanza dall'asse sono allo stesso potenziale, utilizzando la relazione che lega il potenziale al campo elettrico otteniamo:

$$\Delta V_{0-100R} = V(0) - V(100R) = \int_0^{100R} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^{100R} E_r(r)dr = \int_0^{R} E_r(r)dr + \int_R^{100R} E_r(r)dr$$

$$= \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\int_0^R \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)dr + \frac{\rho_{0-max}R^2}{6\varepsilon_0}\int_R^{100R}\frac{dr}{r}$$

Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\Delta V_{0-100R} = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{2} - \frac{1}{3R}\frac{R^3}{3}\right) = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{6}ln(100)\right]$$

Semplificando:

$$\Delta V_{0-100R} = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{5 + 6ln(100)}{36}\right]$$

Domanda 3.b

La prima domanda coincide con la prima domanda del 3.a, pertanto:

$$\rho_{0-max} = \frac{16\varepsilon_0 E_{max}}{3R}$$

Facendo le stesse considerazioni della seconda domanda del 3.a in questo caso otteniamo:

$$\Delta V_{0-R/2} = V(0) - V(R/2) = \int_0^{\frac{R}{2}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^{\frac{R}{2}} E_r(r)dr = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\int_0^{\frac{R}{2}}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)dr$$

Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\Delta V_{0-R/2} = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{8} - \frac{1}{3R}\frac{R^3}{24}\right) = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{72}\right)\right.$$

Semplificando:

$$\Delta V_{0-R/2} = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{7}{144}\right]$$