**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/1/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, una carrucola, di massa $M$= 0.5 kg e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo $\theta$= 30$^o$ rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carrucola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa $m$= 0.3 kg, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carrucola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente $\mu$= 0.3 . Il corpo di massa $m$ è inizialmente fermo.

Determinare:

1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano$| \overrightarrow{T} |$

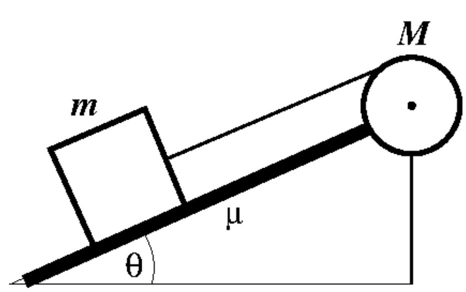
$| \overrightarrow{T} |$ = ......................

2. Calcolare la velocità del corpo di massa $m$ dopo che ha percorso un tratto di lunghezza $L$= 3 m lungo il piano inclinato

v = ......................

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attito $\mathscr{L}$ quando la massa $m$ ha percorso il tratto di lunghezza $L$ lungo il piano.

$\mathscr{L}$= ......................




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio $R_1$= 0.03 m e carica $Q$= 1.1 nC, è contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio $R_2$= 0.05 m, sulla quale è distribuita la stessa carica $Q$ in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in $O$ e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

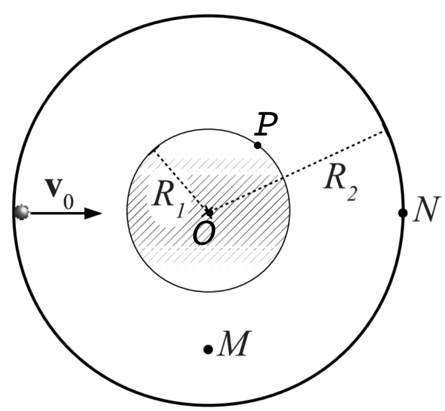
2. Determinare la differenza di potenziale $V_{MN} = V(M) - V(N)$ tra il punto $M$, posto a distanza $\frac{(R_1+R_2)}{2}$ dal centro delle sfere, e il punto $N$, posto a distanza $R_2$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{MN} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= $4\times10^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

$$v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/1/2021**

| | |
|---|---|
| **Nome:** | **Matricola:** |
| **Cognome:** | **Anno di Corso:** |

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, una carrucola, di massa $M$= 0.5 kg e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo $\theta$= $30^o$ rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carrucola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa $m$= 0.3 kg, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carrucola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente $\mu$= 0.3 . Il corpo di massa $m$ è inizialmente fermo.

Determinare:

1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano $|\vec{T}|$

$$|\vec{T}| = \quad 0.32 \text{ N}$$

2. L'accelerazione del corpo durante la discesa lungo piano $a$

$$a = \; 1.28 \text{ m/s}^2$$

3. Calcolare la velocità del corpo di massa $m$ dopo che ha percorso un tratto di lunghezza $L$= 3 m lungo il piano inclinato

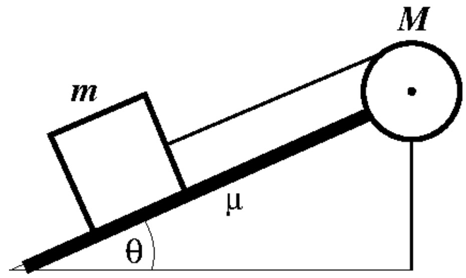
$$\text{v} = \; 2.77 \text{ ms}^{-1}$$

4. Calcolare il tempo, $t_d$, che il corpo massa $m$ impiega a percorrere un tratto di lunghezza $L$ = 3 m lungo il piano inclinato, partendo dalla posizione iniziale.

$$t_d = \; 2.16 \text{ s}$$

5. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attito $\mathscr{L}$ sul corpo quando la massa $m$ ha percorso il tratto $L$ lungo il piano.

$$\mathscr{L} = \; \text{-2.29 J}$$



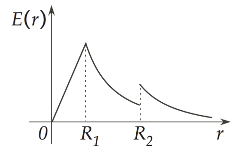

(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio $R_1$= 0.03 m e carica $Q$= 1.1 nC, è contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio $R_2$= 0.05 m, sulla quale è distribuita la stessa carica $Q$ in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in $O$ e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

$$\overrightarrow{E}(r) = \ E(r)\hat{r} \qquad\qquad E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$




2. Determinare la differenza di potenziale $V_{MN} = V(M) - V(N)$ tra il punto $M$, posto a distanza $\frac{(R_1+R_2)}{2}$ dal centro delle sfere, e il punto $N$, posto a distanza $R_2$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{MN} = \ 49.5 \text{ V}$$

3. Determinare la differenza di potenziale $V_{OP} = V(O)-V(P)$ tra il punto $O$, centro delle sfere, e il punto $P$, posto a distanza $R_1$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{OP} = \ 14.8 \text{ V}$$

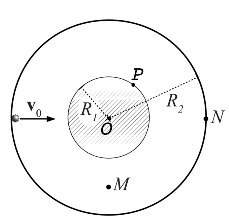
4. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= 4×10$^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

$$v_0 = \ 14.1 \text{ m}s^{-1}$$

5. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= 4×10$^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna con velocità $v_1 = 5\ ms^{-1}$.

$$v_0 = \ 14.9 \text{ m}s^{-1}$$

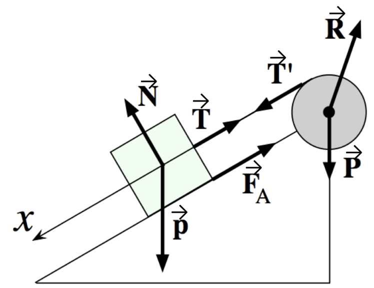
**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

# Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla Figura, indichiamo con $\overrightarrow{N}$ la reazione vincolare del piano, con $\overrightarrow{p}$ la forza peso agente sulla massa $m$, con $\overrightarrow{P}$ la forza peso agente sulla carrucola di massa $M$, con $\overrightarrow{T}'$ la tensione del filo dal lato $M$, con $\overrightarrow{T}$ la tensione del filo dal lato $m$, con $\overrightarrow{F}_A$ la forza di attrito esercitata dal piano e con $\overrightarrow{R}$ la reazione vincolare del perno attorno al quale ruota la carrucola.
Poichè il corpo non presenta accelerazione nella direzione ortogonale al piano, lungo tale direzione la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla. Pertanto, $N = mgcos\theta$ e $F_A = \mu N = \mu mgcos\theta$.
Per il moto del corpo lungo l'asse x, dalla seconda legge di Newton:

$$mgsin\theta - \mu mgcos\theta - T = ma \tag{1}$$

Per la rotazione della carrucola attorno al proprio asse, dalla seconda equazione cardinale:

$$\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{T}' = I\overrightarrow{\alpha} = rT'\hat{z} = I\alpha\hat{z} \tag{2}$$

Dove con $I$ abbiamo indicato il momento di inerzia della carrucola di forma cilindrica con $I = \frac{Mr^2}{2}$ dove $r$ è il raggio della carrucola. Dall'ultima eguaglianza dell'equazione (2) poichè $|\overrightarrow{T}'| = |\overrightarrow{T}|$ e l'accelerazione di un punto della corda coincide con l'accelerazione del corpo $a = \alpha r$, possiamo scrivere:

$$rT = I\alpha = \frac{Mr^2}{2}\frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma \tag{3}$$

sommando l'ultima equazione della(3) all'equazione (1) otteniamo:

$$mgsin\theta - \mu mgcos\theta = ma + \frac{1}{2}Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Sostituendo infine l'espressione dell'accelerazione $a$ nell'ultima equazione della(3) otteniamo:

$$T = \frac{1}{2}M\frac{g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{M}{2m}} = \frac{mg\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{2m}{M}}$$

**Domanda.2**
Il corpo scivola sul piano inclinato con accelerazione costante, e con velocità iniziale nulla di un tratto $L$ pertanto:

$$L = \frac{1}{2}at_d^2 \quad \Rightarrow \quad t_d = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

inoltre la velocità dopo aver percorso un tratto $L$ nel tempo $t_d$ è

$$v = at_d = \sqrt{2aL}$$

**Domanda.3**
Il lavoro compiuto dalla forza di attrito quando la massa $m$ scende del tratto $L$ è pari a:

$$\mathscr{L} = -\mu mgcos\theta L$$

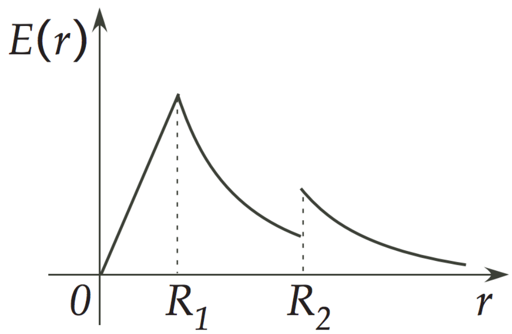
## Soluzione Esercizio 2

**Domanda.1**

Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio $r$ concentrica al sistema, sfruttando la simmetria sferica della distribuzione di carica si ottiene il campo elettrostatico $\vec{E}$ in tutto lo spazio, che ha un diverso andamento nelle tre regioni ($r < R_1,\ R_1 < r < R_2,\ r > R_2$) ed è diretto radialmente:

$$\vec{E}(r) = \quad E(r)\hat{r} \qquad\qquad E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

Il campo è diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro ($O$) del sistema (poichè $Q > 0$).
Per cui il grafico di E(r) è il seguente:




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**Domanda.2**

Indicando con $V(M)$ e $V(N)$ i valori del potenziale nei punti M e N rispettivamente, e poichè il campo elettrico per i punti a distanza $r$ dal centro con $R_1 < r < R_2$, è dato da $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, otteniamo:

$$V_{MN} = V(M) - V(N) = \int_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\,|_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{R_2 - R_1}{R_1+R_2}$$

Indicando con $V(O)$ e $V(P)$ i valori del potenziale nei punti O e P rispettivamente, e poichè il campo elettrico per i punti a distanza $r$ dal centro con $0 < r < R_1$, è dato da $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}$ otteniamo:

$$V_{OP} = V(O) - V(P) = \int_0^{R_1} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\int_0^{R_1} r\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\frac{R_1^2}{2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

**Domanda. 3**

Poichè la carica è positiva la forza elettrostatica è diretta come $\hat{r}$ e quindi rallenta il moto della particella. La velocità minima $v_0$ che è necessario impartire alla particella è pertanto quella che le permette di arrivare sulla superficie sferica interna con velocità nulla. Inoltre, il potenziale dipende solo dalla distanza dal centro, per cui possiamo prendere come posizione di partenza della particella qualsiasi punto sulla superficie esterna (ad esempio, N). Indicando con P un generico punto sulla superficie sferica interna, per la conservazione dell'energia meccanica vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV(N) = qV(P) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V(P) - V(N)) = q\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Dall'ultima equazione otteniamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

Nel caso in cui la particella deve arrivare in $N$ con una velocità $v_1$, per la conservazione dell'energia meccanica vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV(N) = qV(P) + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V(P) - V(N)) + \frac{1}{2}mv_1^2 = q\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Dall'ultima equazione otteniamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + v_1^2}$$