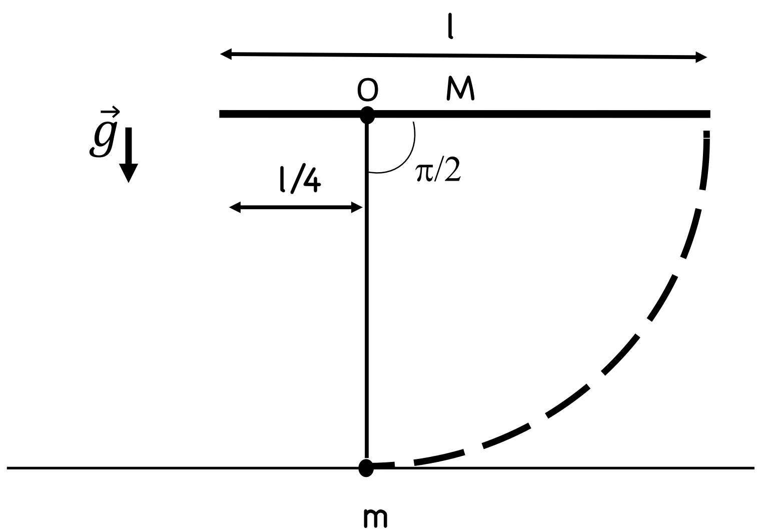
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 31/1/2020
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un'asta omogenea di lunghezza l e massa M è libera di ruotare nel piano verticale (vedi figura) attorno ad un perno posto in O ad una distanza pari a 1/4 della sua lunghezza dal suo estremo superiore. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata cadere e quando giunge nella posizione verticale, urta elasticamente in corrispondenza del suo estremo un punto materiale di massa m. Si calcoli:

1. Il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, I_O.

$$I_O = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. La velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto, ω.

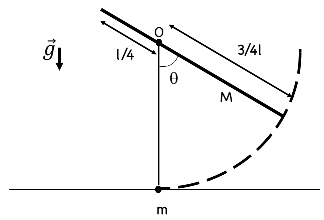
$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. La velocità del punto materiale subito dopo l'urto, v.

$$v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: $l = 2\ m$, $M = 5\ kg$, $m = 200\ g$

Soluzione Esercizio 1



1. Il calcolo del momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il punto O si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner.

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{16} = \frac{7}{48}Ml^2 = 2.92\ kgm^2$$

Il primo termine rappresenta il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il centro di massa dell'asta ed il secondo termine tiene conto, secondo il citato teorema, della distanza tra quest'asse e l'asse di rotazione passante per O.

2. Per lo studio del moto dell'asta prima dell'urto si sfrutta il principio di conservazione dell'energia meccanica. Sul sistema agisce la forza peso (conservativa) e la reazione vincolare in O, che non fa lavoro. Assumendo l'origine dell'energia potenziale la quota per cui l'asta è in posizione orizzontale, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$-Mg\frac{l}{4}cos\theta + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = 0$$

in cui il primo termine rappresenta l'energia potenziale dell'asta per un generico valore dell'angolo θ ed il secondo termine è l'energia cinetica in corrispondenza del medesimo angolo. Per $\theta = 0$, quando l'asta è verticale:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mg\frac{l}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_O}} = 4.1\frac{rad}{s}$$

3. L'asta urta la massa m in modo elastico con $\theta = 0$.
Nel processo:

a) si conserva l'energia cinetica del sistema asta-massa, poichè si tratta di un urto completamente elastico

b) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata all'asta in O

c) il momento angolare del sistema calcolato rispetto al polo O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto al polo O è nullo. Di conseguenza, dalla conservazione dell'energia cinetica tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo :
1)$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2$

e dalla conservazione del momento angolare (polo in$O$), tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo :
2)$I_O\omega = I_O\omega' + \frac{3}{4}lmv$
dove ω' è la velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto e v è la velocità acquisita dalla massa m in conseguenza dell'urto. Dalla 1) e dalla 2):

$$3)\ \left(\omega^2 - \omega'^2\right) = (\omega - \omega')(\omega + \omega') = \frac{mv^2}{I_O} \qquad 4)\ (\omega - \omega') = \frac{3}{4I_O}mlv$$

Dividendo la 3) per la 4) otteniamo:

$$5)\ (\omega + \omega') = \frac{4v}{3l}$$

che sommata alla 4), dopo alcuni semplici passaggi ci permette di ottenere:

$$v = \frac{\omega}{\frac{2}{3l} + \frac{3ml}{8I_O}} = 10.7\ m/s$$

Esercizio 2

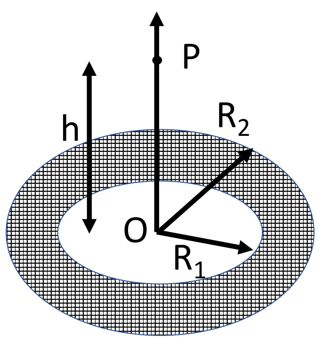


Fig.A

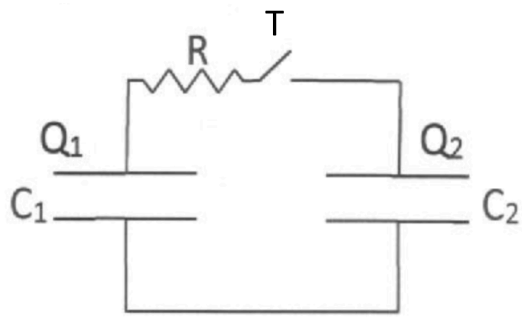


Fig.B

(Fig.A) Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale σ, su di una corona circolare di raggio interno R_1, raggio esterno R_2 e centro in O.

2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza h da O e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $R_2 = h = 2R_1$, $\Delta V_{R_2=h=2R_1}$

$$\Delta V = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{R_2=h=2R_1=}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Consideriamo ora due condensatori di capacità C_1 e C_2, inizialmente caricati con carica Q_1 e Q_2 e isolati (vedi Fig.B). Se l'interruttore T viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio. Calcolare:

2.2 Il valore della ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori, ΔV_{C_1} e ΔV_{C_2}

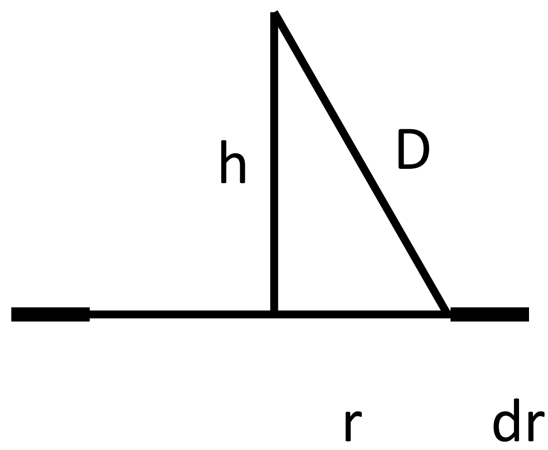
$$\Delta V_{C_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{C_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.3 La variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale (E_i) e quello finale(E_f), ΔE=$E_f - E_i$

$$\Delta E = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: Es. Fig.A) $\sigma = 1.8 \times 10^{-11}\ C/m^2$, $R_1 = 10\ cm$. Es. Fig.B) $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $Q_1 = Q_2 = 2\ nC$.

Soluzione Esercizio 2



2.1 Il potenziale generato da una sottile corona circolare di larghezza dr e raggio r (vedi figura) è dato da:

$$dV(r,h) = k\frac{dq}{D} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

Per cui, il potenziale dovuto alla corona di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, è dato da:

$$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+h^2}} = k\sigma\pi \int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2} \frac{d(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

dalla quale:

$$V(h) = \frac{2\sigma\pi}{4\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2}\right] \quad \Rightarrow \quad V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[R_2 - R_1\right]$$

Per cui l'espressione di ΔV è data da:

$$\Delta V = V(O) - V(h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(R_2 - R_1 + \sqrt{R_1^2+h^2} - \sqrt{R_2^2+h^2}\right)$$

Per $R_2 = h = 2R_1$ otteniamo:

$$\Delta V_{R_2=h=2R_1} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(2R_1 - R_1 + \sqrt{R_1^2+4R_1^2} - \sqrt{4R_1^2+4R_1^2}\right) = \frac{\sigma R_1}{2\epsilon_0}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{8}\right) = 0.04\ V$$

2.2 Alla fine del processo, all'equilibrio non circola più corrente, la differenza di potenziale ai capi di C_1 e C_2 è la stessa, e la capacità equivalente finale (C_F) essendo le due capacità in parallelo, è pari a $C_F = C_1 + C_2$, mentre dalla conservazione della carica segue che $Q_F = Q_{1F} + Q_{2F} = Q_1 + Q_2$. Per cui:

$$\Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{Q_F}{C_F} = \frac{4nC}{3\mu F} = \frac{4}{3}\times 10^{-3}\ V$$

2.3 L'energia iniziale, E_i, corrisponde alla somma delle energie immagazzinate nei due condensatori all'istante iniziale:

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = 3\times 10^{-12}\ J$$

L'energia finale, E_f, corrisponde all'energia immagazzinata nel condensatore equivalente di capacità C_F e carica Q_F:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C_F} = \frac{8}{3}\times 10^{-12}\ J$$

Per cui:

$$\Delta E = -\frac{1}{3}\times 10^{-12}\ J$$

Il risultato deve essere negativo perchè parte dell'energia è stata dissipata sulla resistenza.