# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.11** - **Esame di Fisica Generale sessione del 03/07/2020**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Una sfera omogenea di massa $m$= 31.0 kg e raggio $r$= 130 cm rotola senza strisciare con velocità $v_{cm}$= 23.4 ms$^{-1}$ lungo un piano orizzontale. La sfera urta inelasticamente uno scalino di altezza $h$= 103 cm nel punto $P$ come mostrato in Figura.

Rispondere nell'ipotesi che la sfera non slitti e rimanga in contatto con il punto $P$ dove urta lo scalino:

1) Calcolare l'energia cinetica di rotazione della sfera E$_k$ un istante prima dell'urto:

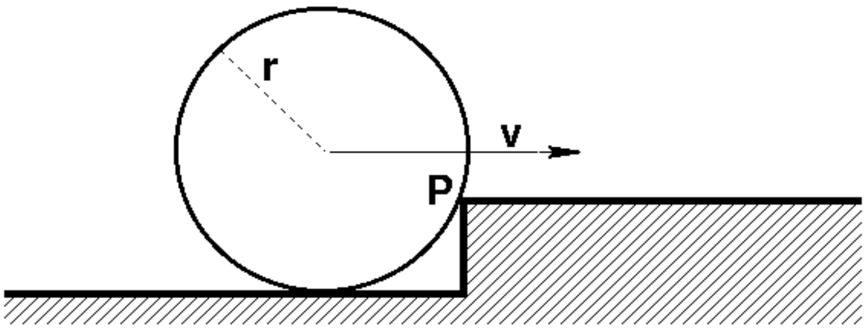
$$\mathrm{E}_k = 3395 \text{ J}$$

2) Calcolare l'energia cinetica di rotazione della sfera E$_k$ un istante dopo l'urto:

$$\mathrm{E}_k = 639 \text{ J}$$

3) Trovare la minima velocità $v^*$ che permette alla sfera di superare il gradino:

$$v^* = 8.8 \text{ m s}^{-1}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Un avvolgimento è realizzato con $N$= 40 strati di un filo conduttore di resistenza per unità di lunghezza $\rho$= 7.0 $10^{-3}$ $\Omega$/m disposti lungo due semi-circonferenze di raggio $r$= 79.4 cm e ortogonali come rappresentato in Figura.
Nell'avvolgimento scorre una corrente $i$= 3.0 A

1) Determinare le componenti del momento di dipolo magnetico ($\vec{\mu}$) su questo avvolgimento

$$\vec{\mu} = \ 120.640 \ ( \ 1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ) \ \mathrm{A \ m^2}$$

L'avvolgimento viene immerso in una regione nella quale è presente un campo magnetico $\vec{B}$= ( 14.2 $\hat{\mathbf{i}}$ + 4.7 $\hat{\mathbf{j}}$ ) T

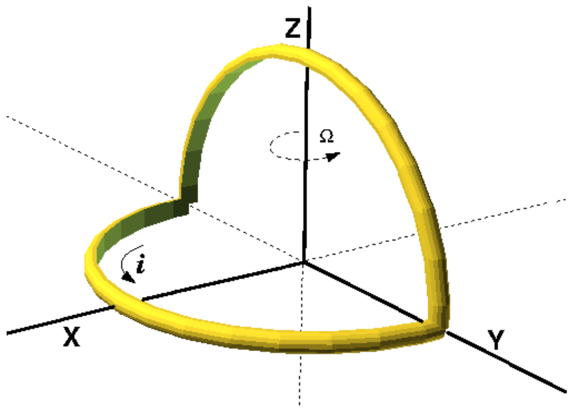
2) Determinare il modulo del momento torcente $|\vec{\tau}|$ che agisce sull' avvolgimento

$$|\vec{\tau}| = \ 1891.430 \ \mathrm{N \ m}$$

Si mantiene l'avvolgimento immerso nel campo magnetico e la corrente in esso cirolante.
Per t = 0 s si mette in rotazione l'avvolgimento con velocità angolare $\vec{\Omega}$= 0.202 $\hat{\mathbf{k}}$ rad/s

3) Determinare la corrente $i_{rot}$ che circola nell'avvolgimento al tempo $t^*$= 15.6 s

$$i_{rot}(t^*) = \ 29.1 \ \mathrm{A}$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**

Prendendo come polo il punto $P$, in quest'urto anelastico rispetto a tale polo si conserva la componente ortogonale al piano della figura del momento angolare ( essendo l'unica forza, non nulla e sul piano xy, la reazione impulsiva che si esplica in P e che è a braccio nullo rispetto a tale polo). Indichiamo con $\overrightarrow{\omega}_{rot}$ e $\overrightarrow{\omega}'_{rot}$ le velocità angolari della sfera prima e dopo l'urto e con $L_i$ e $L_f$ il momento angolare rispettivamente un istante prima e un istante dopo l'urto, entrambi calcolati rispetto al punto $P$ di impatto.

Un istante prima dell'urto (Teorema di König per il momento angolare) vale:

$$\overrightarrow{L}_i = \overrightarrow{d}_{ph} \wedge m\overrightarrow{v}_{cm} + I_{cm}\overrightarrow{\omega}_{rot}$$

dove con $\overrightarrow{d}_{ph}$ abbiamo indicato un vettore che punta dal punto P al centro della sfera, un istante prima di toccare lo scalino e con $I_{cm}$ il momento di inerzia rispetto al centro di massa della sfera. Per cui:

$$\overrightarrow{L}_i = (-mv_{cm}(r-h) - I_{cm}\omega_{rot})\,\hat{z}$$

Ricordando che il moto è di puro rotolamento, date le direzioni e i versi di $\overrightarrow{v}_{cm}$ e $\overrightarrow{\omega}_{rot}$, vale la relazione $v_{cm} = \omega r = |\omega_{rot}|r$. Possiamo pertanto scrivere:

$$|\overrightarrow{L}_i| = L_i = mv_{cm}(r-h) + I_{cm}\omega$$

Dalla quale, poichè per una sfera, $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ otteniamo:

$$L_i \;=\; mv_{cm}(r-h) + \frac{2}{5}mr^2\omega \;=\; \frac{7}{5}mv_{cm}r - mv_{cm}h \qquad \Rightarrow \qquad L_i = m\omega r\left(\frac{7}{5}r - h\right)$$

**Domanda.2**

Un istante dopo l'urto, la sfera ruota attorno attorno al punto P, per cui il momento angolare rispetto al punto P è dato da:

$$\overrightarrow{L}_f = I_p\overrightarrow{\omega}'_{rot}\hat{z}$$

Dove $I_p$ è il momento di inerzia della sfera rispetto a P che coincide, un istante dopo l'urto, con il centro di rotazione:

$$I_p = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

Tenendo conto come prima del verso di rotazione ($\overrightarrow{\omega'}_{rot} = -|\omega'_{rot}|\hat{z}$, è un vettore entrante nel piano del foglio), indicando con $\omega_f = |\overrightarrow{\omega'}_{rot}|$, il modulo della velocità angolare finale, possiamo scrivere:

$$|\overrightarrow{L}_f| = L_f = \left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\omega_f = \frac{7}{5}mr^2\omega_f$$

Imponendo per la conservazione del momento angolare, $L_i = L_f$, si ottiene:

$$\frac{7}{5}mr^2\omega_f = \frac{7}{5}mv_{cm}r - mv_{cm}h \qquad \Rightarrow \qquad \omega_f = \left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)\frac{v_{cm}}{r}$$

Un istante prima dell'urto, l'energia cinetica dovuta alla sola rotazione del corpo, dal teorema di König è data da:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\frac{v_{cm}^2}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v_{cm}^2}{r^2} = \frac{1}{5}mv_{cm}^2$$

Un istante dopo l'urto la sfera ruota attorno al punto $P$, la sua energia cinetica totale attorno a tale punto è data da:

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega_f^2 = \frac{1}{2}m\omega_f^2r^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2$$

dove per l'ultima eguaglianza abbiamo usato il teorema di König.

L'energia cinetica di rotazione un istante dopo l'urto è data dal secondo termine dell'ultima equazione che si può riscrivere in funzione dei dati del problema, permettendo di calcolare la soluzione:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2 = \frac{1}{5}mr^2\left(\left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)\frac{v_{cm}}{r}\right)^2$$

**Domanda.3**

Poichè nel moto successivo all'urto vale la conservazione dell'energia, affinchè la sfera possa superare il gradino, la somma dell'energia cinetica di rotazione attorno al punto P ($E$) e dell'energia potenziale (entrambe calcolate un istante dopo l'urto), deve essere maggiore o uguale alla sola energia potenziale che la sfera possiede una volta arrivata sullo scalino (la sfera deve arrivare sullo scalino anche con velocità rotazionale e traslazionale nulla).
Assumendo lo zero dell'energia potenziale sul piano di partenza, vale:

$$\frac{1}{2} I_P \omega_f^2 + mgr = mg(h+r) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} I_P \omega_f^2 = mgh$$

Dalla quale:

$$\frac{7}{10} mr^2 \left(1 - \frac{5h}{7r}\right)^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgh$$

Che risolta rispetto a $v$, fornisce la soluzione:

$$v^* = \frac{r}{(7r - 5h)} \sqrt{70gh}$$

## Soluzione Esercizio 2

**NB.** Nel testo per un errore di deformazione professionale (il simbolo della resistività: $\rho$) abbiamo scritto "di un filo conduttore di resistività $\rho$= xxx $\Omega$ m", il testo corretto è "di un filo conduttore di resistenza per unità di lunghezza $\rho$= xxx $\Omega$/m": terremo conto di questo nostro errore nella correzione della terza domanda del secondo esercizio.

**Domanda.1**

Il momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ di una bobina piana di N avvolgimenti, è dato da $\vec{\mu} = iNA\hat{n}$ la cui direzione e verso coincide con quella del versore $\hat{n}$ normale al piano della bobina e orientato secondo la regola della mano destra, rispetto al verso della corrente nella bobina.

Nel nostro caso la bobina è costituita dall'unione di due sezioni, entrambe di area $A = \frac{\pi}{2}r^2$, la prima che giace sul piano $XY$ e la seconda che giace nel piano $YZ$.

Il momento magnetico $\vec{\mu}$ risultante avrà quindi due contributi, uno dalla porzione di spira nel piano $YZ$, il cui versore normale, dato il verso della corrente, ha componenti $(1; 0; 0)$ e l'altro dalla porzione che giace nel piano $XY$, il cui versore normale, dato il verso della corrente, ha componenti $(0; 0; 1)$. Pertanto otteniamo:

$$\vec{\mu} = NiA(1;0;0) + NiA(0;0;1) = Ni\frac{\pi}{2}r^2(1;0;1) \tag{1}$$

Dalla (1) è facile dedurre che:

$$|\vec{\mu}| = (NiA)\sqrt{(1+0+1)} = NiA\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}Nir^2 \tag{2}$$

Sempre dalla (1) si possono calcolare le componenti del versore del momento magnetico $\overrightarrow{u}_\mu$:

$$\vec{u}_\mu = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|} = \frac{\frac{\pi}{2}Nir^2(1;0;1)}{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ N\ i\ r^2} = (\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{3}$$

**Domanda.2**

Una bobina di $N$ spire, con sezione di area $A$, con una corrente $i$ che percorre l'avvolgimento, in presenza di un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, è soggetta ad un momento torcente $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ ed ha un'energia potenziale pari a $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Il momento torcente e di conseguenza il suo modulo si possono calcolare svolgendo il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = Ni\frac{\pi}{2}r^2 \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ B_x & B_y & 0 \end{bmatrix} &= Ni\frac{\pi}{2}r^2\left(-B_y\hat{i} + B_x\hat{j} + B_y\hat{k}\right) \\ |\vec{\tau}| &= Ni\frac{\pi}{2}r^2\sqrt{2B_y^2 + B_x^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Svolgendo invece il prodotto scalare si ottiene l'energia potenziale magnetica $(U)$ dell'avvolgimento:

$$\begin{aligned} U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} &= -Ni\frac{\pi}{2}r^2\left(1;0;1\right) \cdot \left(B_x; B_y; 0\right) \\ U &= -Ni\frac{\pi}{2}r^2 B_x \end{aligned} \tag{5}$$

**Domanda.3**

Per determinare la la corrente $i_{rot}$ che circola nell'avvolgimento al tempo $t^*$ notiamo che questa sarà la somma della corrente $i$ già circolante nella bobina e della corrente $i_{ind}$ indotta, il cui verso di circolazione e quindi il segno dipende dalla legge di Lenz. Dobbiamo prima calcolare la forza elettromotrice indotta,$V_{ind}$, e per fare questo calcoliamo il flusso del campo magnetico attraverso la superfice della spira, $\phi_m$ :

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n}_1 ds_1 + \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n}_2 ds_2$$

dove abbiamo indicato con $dS_1$ e $\hat{n}_1$ rispettivamente un elemento della superficie della porzione di avvogimento la cui area giace su $XY$ e il suo versore, in modo analogo $dS_2$ e $\hat{n}_2$ indicano rispettivamente un elemento della superficie della porzione di avvogimento la cui area giace su $YZ$ (che ruota ) e il suo versore (anche lui ruota).

Il primo contributo a $\phi_m$ è nullo, essendo il campo magnetico (che giace sul piano $XY$) ortogonale al versore $\hat{n}_1$.

Per il secondo contributo, le componenti di $\hat{n}_2$ dipendono dal tempo e vale:

$$\hat{n}_2(t) = cos(\Omega t)\hat{i} + sin(\Omega t)\hat{j}$$

infatti al tempo $t = 0$ la normale $\hat{n}_2(0)$ coincide con il versore dell'asse $x$ $(\hat{i})$ per cui :

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n}_2 ds_2 = B_x cos(\Omega t) N \frac{\pi r^2}{2} + B_y sin(\Omega t) N \frac{\pi r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_{ind} = -\frac{d\phi_m}{dt} = N \frac{\pi r^2}{2} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right)$$

Per determinare $i_{ind}$ dobbiamo prima calcolare la resistenza totale $R_{tot}$ dell'avvolgimento: $R_{tot} = \rho l$, dove con $l$ abbiamo indicato la lunghezza totale dell'avvolgimento (data da $2\pi r N$) e ricordiamo che $\rho$ è la resistenza per unità di lunghezza. Per cui:

$$R_{tot} = \rho 2\pi r N \qquad \Rightarrow \qquad i_{ind} = \frac{V_{ind}}{R_{tot}} = N \frac{\pi r^2}{2} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right) \frac{1}{R_{tot}} = \frac{r}{4\rho} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right)$$

Possiamo ora determinare la corrente complessiva che circola nell'avvolgimento:

$$i_{rot} = i + i_{ind}$$

Infine la potenza dissipata nella resistenza è data da:

$$P(t) = R_{tot} i_{rot}^2$$

con $i_{rot}$ che dipende dal tempo.