Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.0 - Esame di Fisica Generale sessione del 24/07/2020

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un punto materiale di massa m= 16.3 kg può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche k_1= 71 Nm^{-1} e k_2= 571 Nm^{-1} , rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione x_0=0 m il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante t=0 s il punto materiale di massa m viene lasciato, da fermo, dalla posizione x= 133 cm . Determinare:

1) la pulsazione ω delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

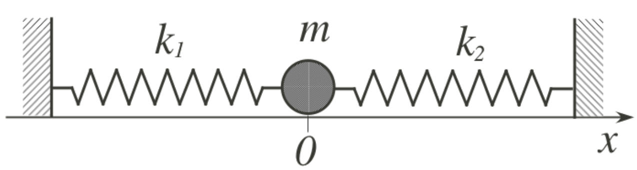
ω = ...

2) la legge oraria del punto per $t \geq$0 s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$|a_{max}|$ = ... ; $x(t)$ =......................

3) l'energia meccanica totale E_{tot} del punto al tempo t=T/ 19 (con T periodo del moto oscillatorio):

E_{tot} = ...



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse Z e hanno raggi r_1= 21 mm ed r_2= 112 mm . I solenoidi hanno entrambi n= 5.38 10^5 spire m^{-1} e sono percorsi da una medesima corrente i_0= 36 A ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse Z e
l'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r, \varphi, z)$ $\forall r \geq 0$; $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = ...$$

2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)|$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

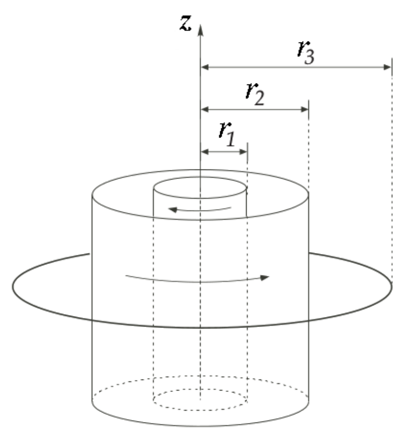
$$|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)| = ...$$

Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio r_3= 71 cm e resistenza ohmica R= 119 Ω, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t) = 24.1\ t$. Determinare:

3) la potenza P dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

$$P = ...$$

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA^{-1}



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.0 - Esame di Fisica Generale sessione del 24/07/2020

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un punto materiale di massa m= 16.3 kg può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche k_1= 71 Nm^{-1} e k_2= 571 Nm^{-1} , rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione x_0=0 m il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante t=0 s il punto materiale di massa m viene lasciato, da fermo, dalla posizione x= 133 cm . Determinare:

1) la pulsazione ω delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

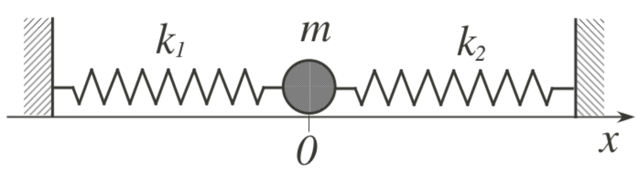
$$\omega = \ 6.3 \text{ rad/s}$$

2) la legge oraria del punto per $t \geq 0$ s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$$|a_{max}| = \ 52.40 \text{ ms}^{-2} \qquad ; \qquad x(t) = 1.33 \cos(\ 6.28 \ t)$$

3) l'energia meccanica totale E_{tot} del punto al tempo t=T/ 19 (con T periodo del moto oscillatorio):

$$E_{tot} = \ 567.8 \text{ J}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse Z e hanno raggi r_1= 21 mm ed r_2= 112 mm . I solenoidi hanno entrambi n= 5.38 10^5 spire m^{-1} e sono percorsi da una medesima corrente i_0= 36 A ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse Z e
l'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r,\varphi,z)$ $\forall r \geq 0$; $\forall \varphi \in [0,2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\vec{B}(r,\varphi,z) = (0;\ 0;\ 24.35\ )\ \mathrm{T}\ per\ r \in [r_1, r_2] \qquad \text{e} \qquad \vec{B}(r,\varphi,z) = (0;\ 0;\ 0)\ \mathrm{T}\ \text{altrove}$$

2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}\Big(0,\varphi,z\Big)|$ $\forall \varphi \in [0,2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

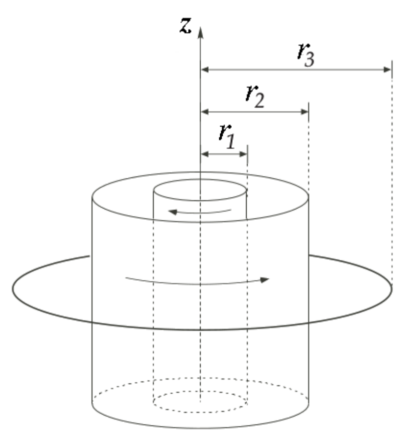
$$|\vec{B}\Big(0,\varphi,z\Big)| = \ 0\ \mathrm{T}$$

Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio r_3= 71 cm e resistenza ohmica R= 119 Ω, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t) = 24.1\ t$. Determinare:

3) la potenza P dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

$$P = \ 3.23\ \mathrm{mW}$$

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}\ \mathrm{TmA}^{-1}$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1

Domanda.1

Per qualsiasi spostamento (x) della massa dalla posizione di equilibrio, le forze esercitate dalle molle sul punto materiale sono parallele e concordi, per cui la forza totale è $F(x) = -(k_1 + k_2)x$, che è l'equazione di un oscillatore armonico $\ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x = 0$. Pertanto il moto è armonico con:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Possiamo anche usare al posto di $k_1 + k_2$, $k_{eq} = k_1 + k_2$ quindi il sistema delle 2 molle è equivalente in questo caso a un'unica molla di costante k_{eq}.

Domanda.2

Il punto materiale si muove di moto armonico con pulsazione pulsazione ω. Al tempo t=0, $x(0) = x_1$ con $x_1 = x$ e velocità iniziale nulla, $v(0) = 0$ (dati del problema). La legge oraria è del tipo $x(t) = Acos(\omega t + \phi)$, per cui imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_1 = Acos(\phi) \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega Asin(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ A = x_1 \end{cases}$$

La legge oraria risulta pertanto:

$$x(t) = x_1 cos(\omega t)$$

Dall'equazione del moto possiamo determinare l'espressione della velocità e dell'accelerazione del punto materiale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\omega x_1 sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_1 cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |v_{max}| = \omega x_1 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}x_1 \\ |a_{max}| = \omega^2 x_1 = \frac{k_1+k_2}{m}x_1 \end{cases}$$

Domanda.3

Il punto si muove con velocità $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_1 sin(\omega t)$, per cui la sua energia cinetica è:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 sin^2(\omega t)$$

per cui al tempo $t = T/n$, ricordando la relazione tra T e ω e l'espressione di ω (Domanda 1) avremo:

$$E_k = E_k(T/n) = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) x_1^2 sin^2\left(\omega\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) x_1^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) x_1^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

L'energia potenziale è la somma delle energie potenziali associate alle due molle quindi:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}k_2 x_1^2 cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}k_{eq} x_1^2 cos^2(\omega t)$$

Al tempo $t = \frac{T}{n}$ esprimendo E_k in funzione dei dati del problema otteniamo:

$$E_p = E_p\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) x_1^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Infine, l'energia totale E_{tot}, poichè non sono in gioco forze non conservative, è costante ed è pari a:

$$E_{tot} = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) x_1^2$$

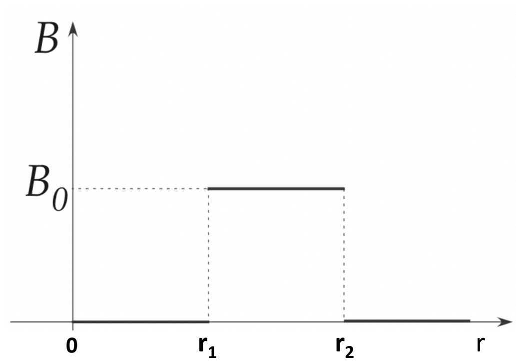
Soluzione Esercizio 2

Domanda.1

Il campo generato da ciascuno dei due solenoidi è nullo all'esterno di ciascun solenoide, mentre all'interno di ciascun solenoide è uniforme ed ha modulo pari a $B_0 = \mu_0 n i_0$. I due campi all'interno di ciascun solenoide sono inoltre entrambi diretti lungo l'asse Z (vedi figura) ma hanno versi opposti. Assumendo i versi delle correnti mostrati in figura, all'interno del solenoide di raggio minore il campo magnetico, che indichiamo con $\vec{B}_1$, vale $\vec{B}_1 = -B_0\hat{z}$, mentre, all'interno dell'altro, $\vec{B}_2 = \mu_0 n i_0 \hat{z}$. Dal teorema di sovrapposizione il campo totale è dato dalla somma vettoriale dei due. Pertanto $\overrightarrow{B}$, $|\overrightarrow{B}|$ e $\hat{B}$ sono dati rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$\overrightarrow{B}(r) = \overrightarrow{B}_1(r) + \overrightarrow{B}_2(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ B_0\hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases} \qquad |\overrightarrow{B}(r)| = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ B_0 & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases} \qquad \hat{B} = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse Z è riportato nella figura seguente:



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Domanda.2

Per il calcolo di $|\overrightarrow{B}|$, ad una distanza nulla dall'asse Z o pari a $2r_1 + 2r_2$ l'intensità del campo magnetico è nulla (vedi risposta al punto 1, per il modulo di B) mentre per una distanza dall'asse pari a $r = (r_1 + r_2)/2$, l'intensità dipende dal valore della distanza r, e si determina utilizzando l'espressione per il modulo del campo magnetico in funzione di r ottenuta al punto 1.

Domanda.3

Per rispondere alle domande del punto 3 calcoliamo dapprima il flusso del campo magnetico attraverso la superfice della spira, ϕ_m, che in generale è dato da:

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n} ds$$

Quando la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare secondo la legge assegnata, mantenendo il verso di percorrenza iniziale dei solenoidi, $\overrightarrow{B}(r,t)$ è dato da:

$$\overrightarrow{B}(r,t) = \overrightarrow{B}_1(r,t) + \overrightarrow{B}_2(r,t) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \mu_0 n i(t)\hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

Poichè il raggio della spira soddisfa $r_3 > r_2$, al flusso di $\overrightarrow{B}$ concatenato con la superfice della spira contribuisce solo la regione in cui il campo magnetico non è nullo ($r_1 < r < r_2$), pertanto in questo caso:

$$\phi_m = \mu_0 n i(t) \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

di conseguenza, dalla legge di Lenz possiamo determinare la forza elettromotrice indotta ε_i :

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\mu_0 n \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) \frac{di}{dt} = -\mu_0 n \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) k$$

Questa quantità è negativa, pertanto, avendo scelto la normale al circuito concorde con il campo magnetico, per la regola della mano destra, la corrente indotta circola in verso orario nella spira, e tende ad opporsi alla variazione di flusso che la ha generata. Infine la potenza dissipata sulla resistenza della spira, P, è data da:

$$P = \varepsilon_i^2 / R$$