Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/09/2020

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Nel sistema rappresentato in figura, il corpo di massa $M = 2\ kg$ parte da fermo al tempo t = 0 e viene accelerato su un piano orizzontale scabro dall'azione di un secondo corpo di massa $m = 1\ kg$ posto inizialmente alla quota $h = 50\ cm$. Carrucola e filo sono ideali e di massa trascurabile, mentre μ_s e μ_d sono, rispettivamente, i coefficienti di attrito statico e dinamico tra la massa M e la superficie con $\mu_d = 0.2$. Entrambi i corpi sono assimilabili a punti materiali.
Quando la massa m raggiunge il suolo (al tempo $t = t_1$) si ferma, ma la massa M continua il suo moto sul piano, fino a fermarsi a causa dell'attrito (al tempo $t = t_1 + \Delta t$).
Determinare:

1. il massimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s^{max} per cui la massa M si muove

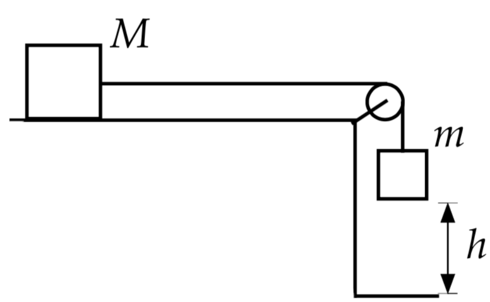
$$\mu_s^{max} = ...$$

2. la massima velocità raggiunta dalla massa M, v_M^{max}

$$v_M^{max} = ...$$

3. il tempo Δt necessario affinchè la massa M si fermi e l'energia meccanica complessivamente dissipata nel processo, E_{Diss}

$$\Delta t = ... \qquad E_{Diss} = ...$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

ESCERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Una sfera uniformemente carica, di raggio $R_1 = 9\ cm$ e densità di carica $\rho = 12\ nC/m^3$, è racchiusa da un guscio conduttore neutro, di raggio interno R_1 ed esterno $R_2 = 2R_1$.
Si determinino:

1. la carica Q_{int} sulla superficie interna (per $r = R_1$) del guscio conduttore e la densità di carica superficiale σ_{ext} sulla superficie esterna (per $r = R_2$) del guscio conduttore

   $Q_{int} =$ .... $\sigma_{ext} =$ ....

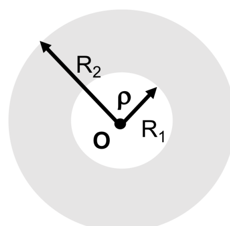
2. il campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$, in tutto lo spazio e l'intensità del campo elettrostatico $E(r)$ nei punti a distanza $r = 0$ e $r = 4R_1$ dal centro O

   $\overrightarrow{E} =$ .... $E(0) =$ .... $E(4R_1) =$ ....

3. assumendo nullo il potenziale a distanza infinita dal centro O del sistema, il potenziale in tutto lo spazio in funzione della distanza r da O (centro del sistema) $V(r)$ e il grafico di $V(r)$, sempre in funzione della distanza r dal centro del sistema

   $V(r) =$ ....

Costanti Utili: $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/09/2020

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Nel sistema rappresentato in figura, il corpo di massa $M = 2\ kg$ parte da fermo al tempo t = 0 e viene accelerato su un piano orizzontale scabro dall'azione di un secondo corpo di massa $m = 1\ kg$ posto inizialmente alla quota $h = 50\ cm$. Carrucola e filo sono ideali e di massa trascurabile, mentre μ_s e μ_d sono, rispettivamente, i coefficienti di attrito statico e dinamico tra la massa M e la superficie con $\mu_d = 0.2$. Entrambi i corpi sono assimilabili a punti materiali.
Quando la massa m raggiunge il suolo (al tempo $t = t_1$) si ferma, ma la massa M continua il suo moto sul piano, fino a fermarsi a causa dell'attrito (al tempo $t = t_1 + \Delta t$).
Determinare:

1. il massimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s^{max} per cui la massa M si muove

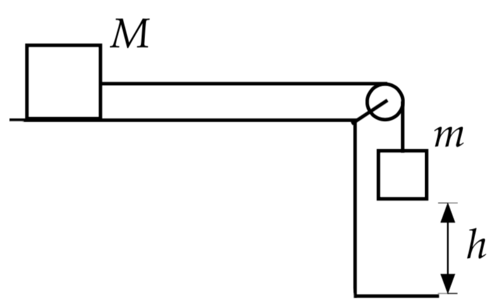
$$\mu_s^{max} = 0.5$$

2. la massima velocità raggiunta dalla massa M, v_M^{max}

$$v_M^{max} = 1.4\ m/s$$

3. il tempo Δt necessario affinchè la massa M si fermi e l'energia meccanica complessivamente dissipata nel processo, E_{Diss}

$$\Delta t = 0.71\ s \qquad E_{Diss} = 4.9\ J$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Una sfera uniformemente carica, di raggio $R_1 = 9\ cm$ e densità di carica $\rho = 12\ nC/m^3$, è racchiusa da un guscio conduttore neutro, di raggio interno R_1 ed esterno $R_2 = 2R_1$.
Si determinino:

1. la carica Q_{int} sulla superficie interna (per $r = R_1$) del guscio conduttore e la densità di carica superficiale σ_{ext} sulla superficie esterna (per $r = R_2$) del guscio conduttore

$$Q_{int} = -3.66 \times 10^{-11}\ C \qquad \sigma_{ext} = 9 \times 10^{-11}\ C/m^2$$

2. il campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$, in tutto lo spazio e l'intensità del campo elettrostatico $E(r)$ nei punti a distanza $r = 0$ e $r = 4R_1$ dal centro O

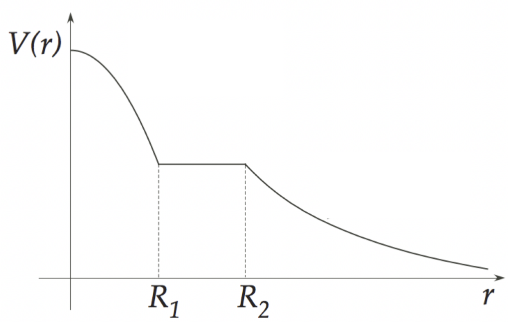
$$\overrightarrow{E}(r) = \ E(r)\hat{r} \qquad E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

$$E(0) = 0 \qquad E(4R_1) = \frac{\rho R_1}{48\varepsilon_0} = 2.5\ V/m$$

3. assumendo nullo il potenziale a distanza infinita dal centro O del sistema, il potenziale in tutto lo spazio in funzione della distanza r da O (centro del sistema) $V(r)$ e il grafico di $V(r)$, sempre in funzione della distanza r dal centro del sistema

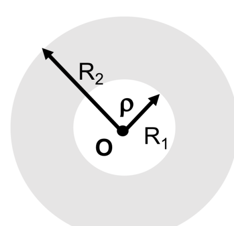
$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + c_1 & r < R_1 \\ c_2 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + c_3 & r > R_2 \end{cases}$$

dove c_3=0 V, c_2=1.83 V, c_1=3.66 V, $\frac{\rho}{6\varepsilon_0}$=$2.26 \times 10^2$ V/m^2 e $\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}$=$3.29 \times 10^{-1}\ Vm$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

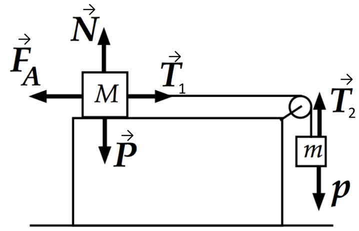
Costanti Utili: $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1

Domanda.1



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Quando il sistema è in equilibrio, la risultante delle forze è nulla per ciascun corpo. Con riferimento alla figura, indicando con $\overrightarrow{N}$ la reazione vincolare del piano, con $\overrightarrow{P}$ la forza peso della massa M, con $\overrightarrow{T}_1$ la tensione del filo dal lato M, con $\overrightarrow{F}_A$ la forza di attrito esercitata dal piano, con $\overrightarrow{T}_2$, la tensione del filo dal lato m e con $\overrightarrow{p}$ la forza peso della massa m, abbiamo:

$$\begin{cases} N = Mg \\ T_1 = F_A \\ T_2 = mg \end{cases}$$

Inoltre, poichè la carrucola è a massa nulla $T_1 = T_2 = T$ per cui $F_A = mg$. Affinchè la condizione di equilibrio sia valida:

$$mg = F_A \leq \mu_s N = \mu_s Mg \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{m}{M}$$

per cui:

$$\mu_s^{max} = \frac{m}{M}$$

rappresenta il massimo valore di μ_s per cui i due corpi si mettono in moto, al di sopra di questo valore i due corpi restano fermi. Quando i due corpi sono in moto, alla massa M è applicata la forza di attrito dinamico, di modulo $\mu_d N = \mu_d Mg$. I due corpi in moto si muovono con la stessa accelerazione in modulo, per cui $a_m = a_M = a$, ricavabile applicando la seconda legge di Newton ai due corpi. Considerando che l'accelerazione $\overrightarrow{a}_M$ ha direzione e verso della tensione del filo lato M, per il corpo di massa M, e che per il corpo di massa m, a_m ha direzione e verso della forza peso possiamo scrivere:

$$\begin{cases} T - \mu_d Mg = Ma \\ mg - T = ma \end{cases}$$

sommando le due equazioni si ricava:

$$a = g\frac{m - \mu_d M}{m + M}$$

Domanda.2
Sottraendo nel sistema di equazioni la seconda equazione dalla prima si ottiene:

$$2T - \mu_d Mg - mg = (M - m)a = (M - m)g\left(\frac{m - \mu_d M}{m + M}\right) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mMg\,(1 + \mu_d)}{m + M}$$

Il moto delle due masse è uniformemente accelerato, con accelerazione positiva a, fino all'istante t_1. Pertanto la massima velocità (v_m^{max}) è quella che possiede la massa m dopo aver percorso la distanza h da t = 0. Quindi:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}at_1^2 \\ v_m^{max} = at_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_m^{max} = \sqrt{2ah}$$

Ovviamente, poichè l'equazione del moto è la stessa $v_m^{max} = v_M^{max}$
Domanda.3
Quando la massa m è arrivata al suolo, il filo non esercita più tensione sulla massa M, che risulta soggetta solo alla forza di attrito con il piano. Indicando con a_1 l'accelerazione di M in questa seconda fase del moto, dalla seconda legge di Newton si ha $-\mu_d Mg = Ma_1$, per cui $a_1 = -\mu_d g$. Quindi, il suo moto è uniformemente decelerato. L'intervallo t è il tempo necessario affinchè la velocità passi dal valore v_m^{max} a 0, quindi:

$$0 = v_m^{max} - \mu_d g \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_m^{max}}{\mu_d g}$$

L'energia meccanica complessivamente dissipata nel processo corrisponde alla differenza tra l'energia meccanica iniziale e quella finale del sistema (-ΔE). Poichè le due masse partono da ferme e arrivano ferme, la differenza di energia cinetica è uguale a zero, per cui -$\Delta E = E_{Diss}$, coincide con la differenza tra l'energia potenziale iniziale e quella finale, per cui:

$$E_{Diss} = mgh$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda.1

La carica su un conduttore si distribuisce sulla superficie del conduttore. Nel nostro caso la carica totale del conduttore è nulla. Sulla superficie interna del guscio conduttore, S_1 (superficie sferica di raggio R_1, $S_1 = 4\pi R_1^2$) viene indotta una carica uguale e opposta alla carica totale (Q) della sfera interna (induzione completa):

$$Q_{int} = -Q = -\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3$$

Sulla superficie esterna del guscio (S_2), essendo il guscio neutro e conduttore (carica dentro il guscio nulla), sarà presente la carica $+Q$, per cui:

$$Q_{ext} = Q = \rho\frac{4}{3}\pi R_1^3$$

di conseguenza, poichè entrambe le cariche sono distribuite uniformemente rispettivamente sulla superficie S_1 e S_2 si ottiene:

$$\sigma_{int} = \frac{Q_{int}}{S_1} = -\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3\frac{1}{4\pi R_1^2} = -\frac{\rho R_1}{3}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{Q_{ext}}{S_2} = \rho\frac{4}{3}\pi R_1^3\frac{1}{4\pi R_2^2} = \frac{\rho R_1^3}{3R_2^2}$$

L'ultima equazione per $R_2 = 2R_1$ fornisce:

$$\sigma_{ext} = \frac{\rho R_1}{12}$$

Domanda.2

Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio r concentrica al sistema, sfruttando la simmetria di carica e la distribuzione di carica si ottiene il campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio, che ha un diverso andamento nelle tre regioni ($r < R_1,\ R_1 < r < R_2,\ r > R_2$):

$$\overrightarrow{E}(r) = \ E(r)\hat{r} \qquad\qquad E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

Il campo è diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro (O) del sistema (poichè $\rho > 0$).
Dalle espressioni del campo elettrico:

$$E(0) = 0 \qquad E(4R_1) = \frac{\rho R_1}{48\varepsilon_0} \qquad E(R_1/2) = \frac{\rho R_1}{6\varepsilon_0} \qquad E(3R_1/2) = 0$$

Domanda.3

Assumendo nullo il potenziale a distanza infinita dal centro O del sistema, il potenziale in tutto lo spazio in funzione della distanza r da O (centro del sistema) $V(r)$ si ottiene dalle seguenti relazioni:

$$V(r) = \begin{cases} -\int E(r')dr' = -\int \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}dr' = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + c_1 & r < R_1 \\ c_2 & R_1 < r < R_2 \\ -\int E(r')dr' = -\int \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r'^2}dr' = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + c_3 & r > R_2 \end{cases}$$

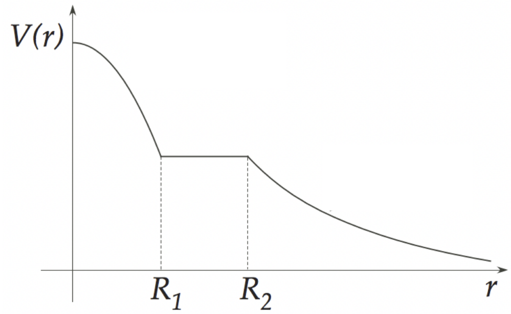
dove c_3=0 per garantire che il potenziale all'infinito è nullo, mentre dalla continuità di $V(r)$ per $r = R_2$:

$$c_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + c_3 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0}$$

Dalla continuità di $V(r)$ in R_1:

$$V(R_1) = -\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} + c_1 = c_2 = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}$$

Il grafico del potenziale $V(r)$ in funzione della distanza r dal centro del sistema (O) è riportato nella figura seguente:



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)