Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.99 - **Esame di Fisica Generale sessione del 12/06/2020**

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Il disco forato in Figura è di spessore trascurabile, di materiale omogeneo, ha raggio R= 29 cm e massa M= 2.5 kg .
I fori praticati nel disco corrispondono a due circonferenze di raggio (R/4) e due finestre rettangolari di dimensioni (R/8)×(R/2) e sono disposti come in Figura.
I centri dei fori circolari e rettangolari giacciono su di una circonferenza (tratteggiata in Figura) di raggio r=R/2 .
Al centro del disco è attaccata una molla di massa trascurabile e di costante elastica k= 208 N/m .
Nell'ipotesi in cui il disco rotola senza strisciare sulla superfice orizzontale, si calcoli:

1) La massa rimossa dal disco pieno (m_{2r}) corrispondente ai 2 fori rettangolari

$$m_{2r} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) Il momento di inerzia del disco forato per rotazioni rispetto al punto di contatto con la superficie orizzontale, (I_{pc})

$$I_{pc} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

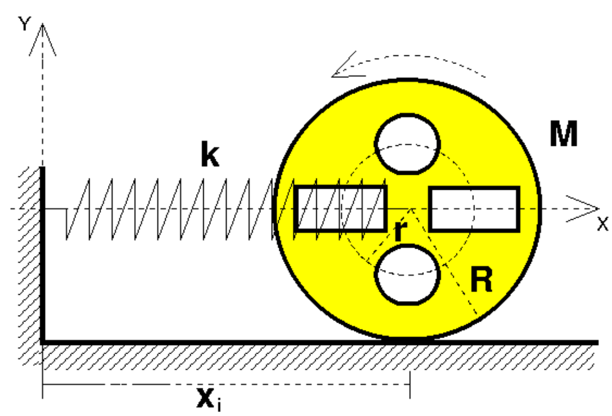
Suggerimento: per una lastra rettangolare sottile di massa m, lati a e b e densità di massa superficiale costante $\sigma = \frac{m}{ab}$, il momento di inerzia I^r_{cm} rispetto ad un asse ortogonale al piano che contiene la lastra e passante per il suo CM al centro del rettangolo è dato da:

$$I^r_{cm} = \frac{m}{12}\ (\ a^2\ +\ b^2\ )$$

Il disco è lasciato libero da fermo dalla posizione (x_i) in cui la molla è allungata di Δx= 27.3 cm

3) Si calcoli l'energia cinetica di rotazione del disco (E_k^{rot}) nell'istante in cui il centro di massa del disco forato passa per la posizione di equilibrio della molla, per la quale l'allungamento della molla è nullo.

$$E_k^{rot} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Nella Figura(a) è rappresentata una spira $MNPQ$ con i lati NP, PQ e QM di lunghezza variabile nel tempo.
Il lato MN ha una lunghezza L = 147 cm e una resistenza elettrica R = 482 mΩ .
Questa spira variabile giace in un piano orizzontale ed è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di intensità B = 11.4 T diretto come in Figura(a).
Le equazioni orarie delle coordinate orizzontali degli estremi del lato PQ sono rispettivamente:

- x_P(cm) = 588.0 + 73.5 cos(0.285 t)
- x_Q(cm) = 588.0 + 73.5 cos(0.683 t)

La spira, instantaneamente indeformabile, è vincolata a giacere nel piano xy e non può ne ruotare ne traslare.

1) Determinare l'espressione del flusso del campo magnetico (Φ_m) attraverso la spira in funzione del tempo.

$$\Phi_m = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

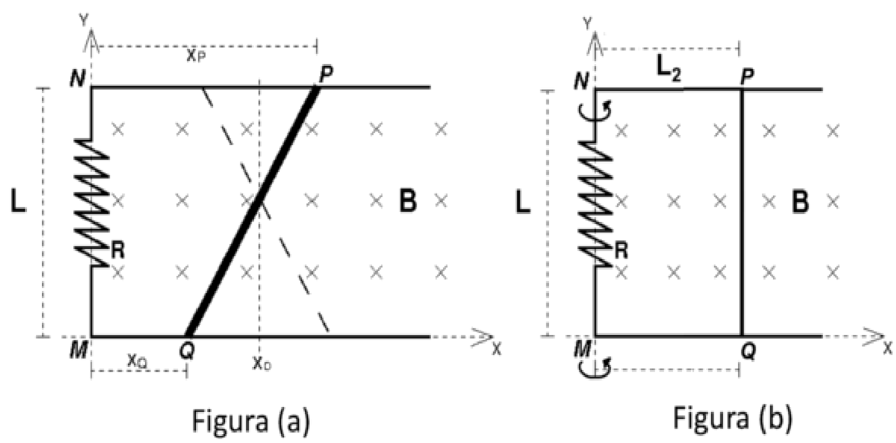
2) Determinare la f.e.m. indotta nella spira $MNPQ$ all'istante t^*= 22.0 s

$$fem(t^*) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Consideriamo ora una spira che si ottiene da quella di prima con le lunghezze dei lati uguali NP=MQ= 73.5 cm , immersa come la prima nello stesso campo magnetico di intensità B = 11.4 T vedi Figura(b)
Per $t = 0$ s la spira viene messa in rotazione con una velocità angolare $\vec{\Omega}$ = 0.691 $\hat{y}$ rad/s

3) Determinare la potenza dissipata nella resistenza all'istante t^{**}= 24.9 s

$$P(t^{**}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1

Domanda.1

Il disco ha uno spessore trascurabile, quindi calcoliamo la densità superficiale σ (massa per unità di superficie) come il rapporto tra la massa M del disco forato di raggio R e la sua superficie (data dalla superficie del disco senza fori meno la superficie dei fori, che corrispondono a due circonferenze di raggio (R/4) e a due rettangoli di dimensioni (R/8)×(R/2)):

$$\sigma \;=\; \frac{M}{\pi\, R^2 \;-\; \pi\,\frac{R^2}{8} \;-\; \frac{R^2}{8}} \;=\; \frac{8M}{R^2}\,\frac{1}{(\;7\pi - 1\;)} \;\rightarrow\; \sigma \;\approx\; 0.3811\;\frac{M}{R^2} \tag{1}$$

Nota σ, la massa rimossa dal disco di ciascun foro circolare (m_c) e di ciascun foro rettangolare (m_r) valgono rispettivamente:

$$m_c \;=\; \pi\sigma\,\frac{R^2}{16} \;\approx\; 0.0748\;M \qquad\qquad m_r \;=\; \sigma\,\frac{R^2}{16} \;\approx\; 0.0238\;M \tag{2}$$

Domanda.2

I fori sono simmetrici, pertanto il centro di massa del disco che prima di praticare i fori coincide con il centro del disco, non si sposta a causa dei fori.

Il momento di inerzia del disco forato rispetto al CM del disco (I_{CM}^{tot}) si può ottenere considerando un disco pieno (di massa M^* e raggio R, con $M^* = \sigma\pi R^2$), e i fori come due dischi (di massa $-m_c$ e raggio R/4), e due rettangoli (di massa $-m_r$ e dimensioni (R/8)×(R/2)).

Il calcolo è fatto rispetto al centro del disco.

I tre contributi da considerare al momento di inerzia sono vedi (3): (I_{disc}) per il disco di raggio R di massa M^*; (I_{circ}^{hole}) per i due dischi di raggio (R/4), ciascuno di massa $-m_c$, il cui CM ruota a (R/2) dal centro del disco pieno; (I_{rect}^{hole}), per le due lastre rettangolari di dimensioni (R/8)×(R/2) ciascuna di massa -m_r il cui CM ruota a (R/2) dal centro del disco pieno.

Per ciascun disco massa $-m_c$ il momento di inerzia (I_{circ0}^{hole}) rispetto al centro del disco di massa M^* è dato da (Teorema di Steiner):

$$I_{circ0}^{hole} = -\frac{m_c}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 - m_c\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Sfuttando il suggerimento del testo, per ciascun rettangolo di massa $-m_r$ il momento di inerzia (I_{r0}^{hole}) rispetto al centro del disco di massa M^* (sempre dal Teorema di Steiner) è dato da:

$$I_{r0}^{hole} = -m_r\frac{1}{12}\left[\left(\frac{R}{8}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] - m_r\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

ottenendo:

$$\begin{aligned}
I_{disc} \;&=\; M^*\,\frac{R^2}{2} \;=\; \pi\sigma\,\frac{R^4}{2} && \rightarrow\; I_{disc} \approx 0.5987\;MR^2\\
I_{circ}^{hole} \;=\; 2I_{circ0}^{hole} \;&=\; -\,2\;m_c\;R^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4}\right) \;=\; -\;\frac{18}{32}\;m_c\;R^2 && \rightarrow\; I_{circ}^{hole} \approx -0.0421\;MR^2\\
I_{rect}^{hole} \;=\; 2I_{r0}^{hole} \;&=\; -\,2\;m_r\;R^2\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right) \;=\; -\;\frac{209}{384}\;m_r\;R^2 && \rightarrow\; I_{rect}^{hole} \approx -0.0130\;MR^2\\
I_{CM}^{tot} \;=\; I_{disc} + I_{circ}^{hole} + I_{rect}^{hole} \;&=\; \Big(0.5987 \;-\; 0.0421 \;-\; 0.0130\Big)\;MR^2 && \rightarrow\; I_{CM}^{tot} \;=\; 0.5436\;MR^2\\
I_{pc} \;&=\; I_{CM}^{tot} \;+\; MR^2 && \rightarrow\; I_{pc} \;=\; 1.5436\;MR^2
\end{aligned} \tag{3}$$

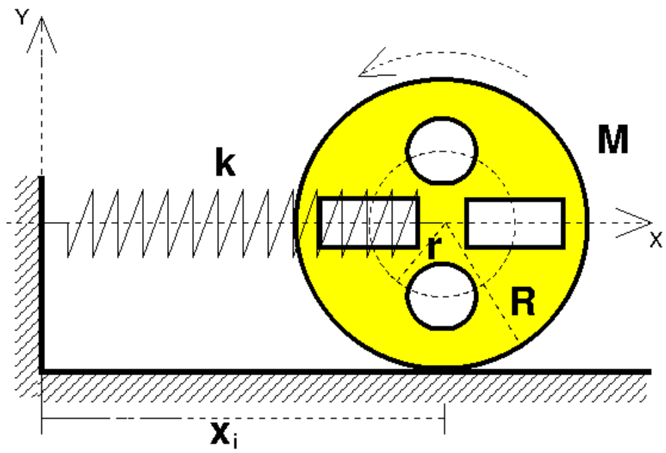
Domanda.3

Nel moto di puro rotolameno il punto di contatto è fermo, pertanto la forza di attrito non compie lavoro e l'energia si conserva (è costante). Di conseguenza, poichè all'inizio il sistema disco forato più molla è fermo, l'energia iniziale del sistema coincide con l'energia potenziale della molla, $\frac{1}{2}\;k\;\Delta x^2$. Mentre quando il disco passa per la posizione di equilibrio della molla l'allungamento della molla è nullo e l'energia potenziale della molla è stata convertita in energia cinetica e rotazionale del disco forato. Pertanto, indicando con ω la velocità angolare del disco e ricordando che la condizione di rotolamento puro implica che per il punto di contatto del disco sia $v_{cm} = \omega R$, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\;k\;\Delta x^2 \;=\; \frac{1}{2}\;M\;v_{cm}^2 \;+\; \frac{1}{2}\;I_{CM}^{tot}\;\omega^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\;M\;v_{cm}^2 \;+\; 0.5436\;MR^2\;\frac{v_{cm}^2}{R^2}\;\right)\\
\Rightarrow k\;\Delta x^2 \;=\; 1.5436\;M\;v_{cm}^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Questa relazione fornisce v_{cm}^2 necessaria per calcolare l'energia cinetica di traslazione ovvero di rotazione:

$$\begin{aligned} v_{cm}^2 &\approx 0.6478 \, \frac{k}{M} \, \Delta x^2 \\ E_k^{tra} &\approx 0.3239 \; k \; \Delta x^2 \\ E_k^{rot} &\approx 0.1761 \; k \; \Delta x^2 \end{aligned} \tag{5}$$



Soluzione Esercizio 2

Domanda.1 Notiamo, dalla Figura (a), che i vertici oscillanti del trapezio hanno una ascissa iniziale (x_0) e una ampiezza massima (x_m) di oscillazione in comune. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} x_p &= x_0 + x_m \cos(\omega_p t) \\ x_q &= x_0 + x_m \cos(\omega_q t) \end{aligned} \tag{6}$$

Indicando con A l'area istantanea della spira, che quando x_p è diverso da x_q è quella di un trapezio, il flusso del campo magnetico attraverso la spira vale :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= B\, A = B\, \frac{L}{2}\, (x_p + x_q) \\ \Phi_m &= B\, \frac{L}{2} \left(2\, x_0 + x_m \left(\cos(\omega_p t) + \cos(\omega_q t) \right) \right) \end{aligned} \tag{7}$$

Domanda.2 L'area variabile della spira immersa nel campo magnetico uniforme e costante da luogo a una forza elettromotrice indotta (fem(t)) nella spira che, dalla legge di Faraday Neuman Lenz, è data dalla derivata dell'equazione (7) rispetto al tempo cambiata di segno:

$$fem(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\, \frac{L}{2}\, x_m \left(-\omega_p \sin(\omega_p t) - \omega_q \sin(\omega_q t) \right) \tag{8}$$

Notiamo anche (vedi Figura (a)) che il campo magnetico è entrante nel piano del foglio ma non sempre il verso della corrente indotta sarà orario poichè anche la variazione di flusso concatenato (Φ_m) ha una espressione sinusoidale perdiodica e quindi non necessariamente sempre positiva.

Essendo la spira costituita da conduttori, possiamo calcolare a partire dalla (8) la fem indotta al tempo t^* (V) e, dal valore (R) della resistenza del lato MN della spira dato nel testo, rispettivamente la relativa corrente indotta (i) e la potenza assorbita dalla resistenza (P)

$$\begin{aligned} V &= fem(t^*) \\ i &= \frac{|V|}{R} \\ P &= R\, i^2 = \frac{V^2}{R} \end{aligned} \tag{9}$$

Domanda.3 La spira ruota con velocità angolare costante, pertanto scelta la normale alla superficie della spira al tempo t=0 (messa in rotazione) diretta e orientata come il campo magnetico, l'angolo che essa forma con il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in funzione del tempo è $\theta(t) = \Omega t$.
Indicando con Φ_B Il flusso attraverso la spira in rotazione, e con fem la forza elettomotrice indotta si ottiene:

$$\Phi_B = BLL_2 cos(\Omega t) \qquad fem = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BLL_2\Omega sin(\Omega t)$$

dove LL_2 è l'area della spira rettangolare.
Pertanto, la corrente indotta nella spira, $I(t)$ e la potenza dissipata nella resistenza R, $P(t)$, in funzione del tempo sono rispettivamente date da:

$$I(t) = \frac{|fem|}{R} = \frac{BLL_2\Omega|sin(\Omega t)|}{R} \qquad P(t) = I^2 R = \frac{(BLL_2\Omega sin(\Omega t))^2}{R}$$

per cui:

$$I_{rot} = I(t_1) = \frac{BLL_2\Omega|sin(\Omega t_1)|}{R} \qquad P_{rot} = I_{rot}^2 R$$

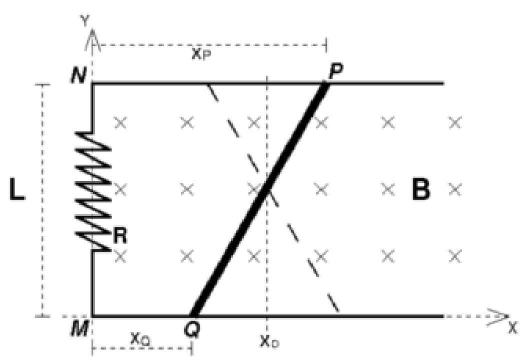


Figura (a)

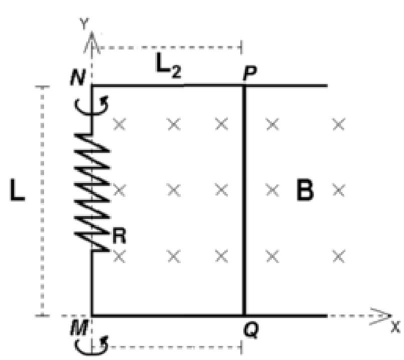


Figura (b)